*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 1, 2018*
*Электронный журнал,*
*рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010*
*ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

*Прикладные задачи*

УДК 513.88

# О некоторых константах сильной единственности

В. В. Локоть, О. М. Мартынов

Мурманский арктический государственный университет

e-mail: natalyalokot@yandex.ru e-mail: olegmartynov@yandex.ru

**Аннотация**

В данной статье находятся константы сильной единственности для некоторого класса операторов проектирования с единичной нормой пространства размерности четыре на подпространство размерности два, а также константы сильной единственности для операторов проектирования пространства всех ограниченных на отрезке [0,1] функций или всех суммируемых на [0,1] функций на подпространство, образованное линейными комбинациями первых n функций Уолша.

**Ключевые слова:**
оператор проектирования, пространство, подпространство, костанта сильной единственности, относительная проекционная константа, функции Уолша.

**Abstract**

In this paper we find constants of strong unicity for minimal norm-one projections in some finite-dimensional space and also we find constants of strong unicity for projections onto subspace formed by Walsh's functions in the space of all bounded on [0,1] functions or the space of all integrable on [0,1] functions.

**Keywords:** projection, constants of strong unicity, the relative projection constant, space, subspace, Walsh's functions.

Пусть $Y_{n-2}$ – подпространство пространства $l_\infty^{(n)}$ размерности $n-2$.

**Определение.** Оператор проектирования $\pi_0 : l_\infty^{(n)} \to Y_{n-2}$ называется сильно единственным, если существует число $r \in (0;1]$ такое, что неравенство

$$\parallel \pi_0 \parallel + r\cdot \parallel \pi - \pi_0 \parallel \leqslant \parallel \pi \parallel \tag{1}$$

выполняется для любого оператора проектирования $\pi : l_\infty^{(n)} \to Y_{n-2}$.

Через $r_0$ обозначим максимальное значение $r$, при котором выполняется неравенство (1).

Очевидно, что оператор $\pi_0$ имеет минимальную норму и обладает свойством единственности.

Известно [1], что любой оператор проектирования $\pi : l_\infty^{(n)} \to Y_{n-2}$ имеет вид

$$\pi_{\alpha,\beta} x = x - \alpha f(x) - \beta g(x),$$

где $\alpha \in l_\infty^{(n)}, \beta \in l_\infty^{(n)}, f$ и $g$ – линейные функционалы, определенные на $l_\infty^{(n)}$, причем

$$f(\alpha) = g(\beta) = 1; f(\beta) = g(\alpha) = 0. \tag{2}$$

Гиперплоскости пространства $l_\infty^{(n)}$ имеют вид

$$f^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^{(n)} \mid f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0 \right\},$$

$$g^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^{(n)} \mid g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i = 0 \right\}$$

а $Y_{n-2} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$.

Нормы операторов $\pi$ и $\pi - \pi_0$ вычисляются по формулам

$$\parallel \pi \parallel = \max_{1\leqslant i\leqslant n} T_i, \parallel \pi - \pi_0 \parallel = \max_{1\leqslant i\leqslant n} B_i \text{ где } T_i = \sum_{j=1}^{n} \mid \delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j \mid,$$

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} \mid (\alpha_i - \alpha_i^{(0)}) f_j + (\beta_i - \beta_i^{(0)}) g_j \mid, \text{ а оператор } \pi_0 \text{ имеет вид}$$

$$\pi_{\alpha,\beta}^{(0)} x = x - \alpha^{(0)} f(x) - \beta^{(0)} g(x).$$

Найдем константы сильной единственности операторов проектирования пространства $l_\infty^{(4)}$ на некоторый класс подпространств коразмерности 2.

Функционалы $f$ и $g$ зададим следующим образом:

$$f = (1, s, 0, 0), g = (0, 0, s, 1), \tag{3}$$

где параметр $s > 0$. Соотношения (2) примут вид:

$$f(\alpha) = \alpha_1 + s\alpha_2 = 1, g(\alpha) = s\alpha_3 + \alpha_4 = 0, f(\beta) = \beta_1 + s\beta_2 = 0, g(\beta) =$$

$$= s\beta_3 + \beta_4 = 1. \tag{4}$$

**Лемма 1.** Пусть $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$ – оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l^{(4)}_\infty$ на подпространство $Y_2$, определяемое функционалами (3). Тогда $\| \pi^{(0)}_{\alpha,\beta} \| = 1$.

**Доказательство.** Найдем значения $T_i^{(0)}$ $(i = 1, ..., 4)$, где $T_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} \mid \delta_{ij} - \alpha_i^{(0)} f_j - \beta_i^{(0)} g_j \mid$ . Имеем

$$T_1^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} \mid \delta_{1j} - \alpha_1^{(0)} f_j - \beta_1^{(0)} g_j \mid = \mid 1 - \alpha_1^{(0)} \mid + s \mid \alpha_1^{(0)} \mid + s \mid \beta_1^{(0)} \mid + \mid \beta_1^{(0)} \mid,$$

$$T_2^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} \mid \delta_{2j} - \alpha_2^{(0)} f_j - \beta_2^{(0)} g_j \mid = \mid \alpha_2^{(0)} \mid + \mid 1 - s\alpha_2^{(0)} \mid + s \mid \beta_2^{(0)} \mid + \mid \beta_2^{(0)} \mid,$$

$$T_3^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} \mid \delta_{3j} - \alpha_3^{(0)} f_j - \beta_3^{(0)} g_j \mid = \mid \alpha_3^{(0)} \mid + s \mid \alpha_3^{(0)} \mid + \mid 1 - s\beta_3^{(0)} \mid + \mid \beta_3^{(0)} \mid,$$

$$T_4^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} \mid \delta_{4j} - \alpha_4^{(0)} f_j - \beta_4^{(0)} g_j \mid = \mid \alpha_4^{(0)} \mid + s \mid \alpha_4^{(0)} \mid + s \mid \beta_4^{(0)} \mid + \mid 1 - \beta_4^{(0)} \mid .$$

Рассмотрим два случая. 1) $0 < s \leqslant 1$. Положим $\alpha_1^{(0)} = \beta_4^{(0)} = 1, \alpha_2^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \alpha_4^{(0)} = \beta_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = \beta_3^{(0)} = 0$. При этом условия (2) выполняются. Тогда $T_1^{(0)} = s \leqslant 1, T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = 1, T_4^{(0)} = s \leqslant 1$.

Следовательно,

$$\| \pi^{(0)}_{\alpha,\beta} \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} T_i^{(0)} = 1.$$

2) $s > 1$. В этом случае положим $\alpha_2^{(0)} = \beta_3^{(0)} = \frac{1}{s}, \alpha_1^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \alpha_4^{(0)} = \beta_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = \beta_4^{(0)} = 0$. Условия (2) выполняются. Тогда $T_1^{(0)} = 1, T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = \frac{1}{s} < 1, T_4^{(0)} = 1$.

Следовательно,
$$\| \pi_{\alpha,\beta}^{(0)} \| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4} T_i^{(0)} = 1.$$

Лемма 1 доказана.

**Замечание.** Этот результат можно было получить из более общей теоремы [3, с.88]. Кроме того, из теоремы 1 [3, с.101] следует, что рассмотренный оператор проектирования обладает свойством единственности, если $s \neq 1$ $(s > 0)$.

**Лемма 2.** Значение $r \leqslant \frac{1-s}{1+s}$, если $0 < s < 1$ и $r \leqslant \frac{s-1}{1+s}$, если $s > 1$.

**Доказательство.** Для получения оценки $r$ сверху рассмотрим оператор $\overline{\pi}x = x - \overline{\alpha}f(x) - \overline{\beta}g(x)$. Значения $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ определим следующим образом: $0 < \overline{\alpha}_1 \leqslant 1, \overline{\alpha}_2 \geqslant 0, \overline{\beta}_3 = \overline{\alpha}_2, \overline{\beta}_4 = \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_4 = \overline{\alpha}_3 = \overline{\beta}_1 = \overline{\beta}_2 = 0.$

Вычислим нормы операторов $\overline{\pi}$ и $\overline{\pi} - \pi^{(0)}$.

**1.** $0 < s < 1$. Имеем

$$\| \overline{\pi} \| = \max_{1\leq i\leq 4} \overline{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^{4} \mid \delta_{ij} - \overline{\alpha}_i f_j - \overline{\beta}_i g_j \mid . \text{ Найдем значения } \overline{T}_i.$$

$$\overline{T}_1 = 1 - \overline{\alpha}_1 + s\overline{\alpha}_1 = 1 + (s-1)\overline{\alpha}_1 = 1 + (s-1)(1 - s\overline{\alpha}_2) = s + s(1-s)\overline{\alpha}_2,$$
$$\overline{T}_2 = \overline{\alpha}_2 + 1 - s\overline{\alpha}_2 = 1 + (1-s)\overline{\alpha}_2,$$
$$\overline{T}_3 = \mid 1 - s\overline{\beta}_3 \mid + \mid \overline{\beta}_3 \mid = \mid 1 - s\overline{\alpha}_2 \mid + \mid \overline{\alpha}_2 \mid = 1 + (1-s)\overline{\alpha}_2,$$
$$\overline{T}_4 = s \mid \overline{\beta}_4 \mid + \mid 1 - \overline{\beta}_4 \mid = s \mid \overline{\alpha}_1 \mid + \mid 1 - \overline{\alpha}_1 \mid = s\overline{\alpha}_1 + 1 - \overline{\alpha}_1 = s + s(1-s)\overline{\alpha}_2.$$

Таким образом,
$\overline{T}_1 = \overline{T}_4, \overline{T}_2 = \overline{T}_3, \overline{T}_1 < \overline{T}_2 \Leftrightarrow s + s(1-s)\overline{\alpha}_2 < 1 + (1-s)\overline{\alpha}_2 \Leftrightarrow 0 < 1 - s + +(1-s)^2 \cdot \overline{\alpha}_2$ и
$$\max_{1\leqslant i\leqslant 4} \overline{T}_i = \overline{T}_2 = 1 + (1-s)\overline{\alpha}_2.$$

$$\| \overline{\pi} - \pi^{(0)} \| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4} \overline{B}_i = \max_i \sum_{j=1}^{4} \mid (\overline{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)})f_j - (\overline{\beta}_i - \beta_i^{(0)})g_j \mid =$$

$$= \max\left\{ \sum_{j=1}^{4} \mid (\overline{\alpha}_1 - 1)f_j \mid ; \sum_{j=1}^{4} \mid \overline{\alpha}_2 f_j \mid ; \sum_{j=1}^{4} \mid \overline{\alpha}_2 g_j \mid ; \sum_{j=1}^{4} \mid (\overline{\alpha}_1 - 1)g_j \mid \right\} =$$
$$= \max\{(1+s) \mid \overline{\alpha}_1 - 1 \mid ; (1+s) \mid \overline{\alpha}_2 \mid ; (1+s) \mid \overline{\alpha}_2 \mid ; (1+s) \mid \overline{\alpha}_1 - 1 \mid\} =$$
$$= (1+s)\max\{\mid \overline{\alpha}_1 - 1 \mid ; \mid \overline{\alpha}_2 \mid\} = (1+s)\max\{s \mid \overline{\alpha}_2 \mid ; \mid \overline{\alpha}_2 \mid\} = (1+s)\overline{\alpha}_2.$$

Найдем для $r$ оценку сверху. Из неравенства $\parallel \pi^{(0)} \parallel + r \cdot \overline{B}_2 \leqslant \overline{T}_2 \Leftrightarrow 1 + r \cdot (1+s)\overline{\alpha}_2 \leqslant 1 + (1-s)\overline{\alpha}_2$ получим, что $r \leqslant \frac{1-s}{1+s}$. Очевидно, что $r \in (0,1]$.

**2.** $s > 1$. По-прежнему

$$\parallel \overline{\pi} \parallel = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \overline{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^{4} \mid \delta_{ij} - \overline{\alpha}_i f_j - \overline{\beta}_i g_j \mid. \text{ Найдем значения } \overline{T}_i.$$

$$\overline{T}_1 = \mid 1 - \overline{\alpha}_1 \mid + s \mid \overline{\alpha}_1 \mid = 1 + (s-1)\overline{\alpha}_1,$$

$$\overline{T}_2 = \mid \overline{\alpha}_2 \mid + \mid 1 - s\overline{\alpha}_2 \mid = \frac{1}{s} \mid 1 - \overline{\alpha}_1 \mid + \mid \overline{\alpha}_1 \mid = \frac{1}{s}(1 + (s-1)\overline{\alpha}_1) = \frac{1}{s} \cdot \overline{T}_1 < \overline{T}_1,$$

$$\overline{T}_3 = \mid 1 - s\overline{\beta}_3 \mid + \mid \overline{\beta}_3 \mid = \mid 1 - s\overline{\alpha}_2 \mid + \mid \overline{\alpha}_2 \mid = \frac{1}{s} \cdot \overline{T}_1 < \overline{T}_1,$$

$$\overline{T}_4 = s \mid \overline{\beta}_4 \mid + \mid 1 - \overline{\beta}_4 \mid = s \mid \overline{\alpha}_1 \mid + \mid 1 - \overline{\alpha}_1 \mid = \overline{T}_1.$$

Таким образом,

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \overline{T}_i = \overline{T}_1 = 1 + (s-1)\overline{\alpha}_1.$$

$$\parallel \overline{\pi} - \pi^{(0)} \parallel = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \overline{B}_i = \max_i \sum_{j=1}^{4} \mid (\overline{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)}) f_j - (\overline{\beta}_i - \beta_i^{(0)}) g_j \mid =$$

$$= \max \left\{ \sum_{j=1}^{4} \mid \overline{\alpha}_1 f_j \mid ; \sum_{j=1}^{4} \left| \left( \overline{\alpha}_2 - \frac{1}{s} \right) f_j \right| ; \sum_{j=1}^{4} \left| \left( \overline{\alpha}_2 - \frac{1}{s} \right) g_j \right| ; \sum_{j=1}^{4} \mid \overline{\alpha}_1 g_j \mid \right\} =$$

$$= \max \left\{ (1+s) \mid \overline{\alpha}_1 \mid ; (1+s) \left| \overline{\alpha}_2 - \frac{1}{s} \right| ; (1+s) \left| \overline{\alpha}_2 - \frac{1}{s} \right| ; (1+s) \mid \overline{\alpha}_1 \mid \right\} =$$

$$= (1+s) \max \left\{ \mid \overline{\alpha}_1 \mid ; \left| \overline{\alpha}_2 - \frac{1}{s} \right| \right\} = (1+s) \max \left\{ \mid \overline{\alpha}_1 \mid ; \frac{1}{s} \mid \overline{\alpha}_1 \mid \right\} =$$

$$= (1+s)\overline{\alpha}_1 = \overline{B}_1.$$

Найдем для $r$ оценку сверху. Из неравенства $\parallel \pi^{(0)} \parallel + r \cdot \overline{B}_1 \leqslant \overline{T}_1 \Leftrightarrow 1 + r \cdot (1+s)\overline{\alpha}_1 \leqslant 1 + (s-1)\overline{\alpha}_1$ получим, что $r \leqslant \frac{s-1}{1+s}$. Очевидно, что $r \in (0,1]$.

Лемма 2 доказана.

**Теорема.** Оператор проектирования $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$ пространства $l^4_\infty$ на подпространство $Y_2$, определяемое функционалами (3), является сильно единственным и значение константы сильной единственности $r_0$ равно:

$$r_0 = \frac{1-s}{1+s}, \text{ если } 0 < s < 1 \text{ и } r_0 = \frac{s-1}{1+s}, \text{ если } s > 1.$$

**Доказательство.** Сравним значения $T_i$. Воспользуемся равенствами (4).

$$T_1 = |1 - |\alpha_1| + s|\alpha_1| + (1+s)|\beta_1| = s|\alpha_2| + s|1 - s\alpha_2| + s(1+s)|\beta_2| =$$

$$= s(|\alpha_2| + |1 - s\alpha_2| + (1+s)|\beta_2|),$$

$$T_2 = |\alpha_2| + |1 - s\alpha_2| + (1+s)|\beta_2| \Rightarrow T_1 = sT_2,\ T_3 = (1+s)|\alpha_3| + |1 - s\beta_3| + |\beta_3|,$$

$$T_4 = (1+s)|\alpha_4| + s|\beta_4| + |1 - \beta_4| = s((1+s)|\alpha_3| + |1 - s\beta_3| + |\beta_3|) = sT_3.$$

Если $0 < s < 1$, то $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4} T_i = \max\{T_2, T_3\}$, если же $s > 1$, то

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 4} T_i = \max\{T_1, T_4\}.$$

**1.** Покажем, что $r_0 = \frac{1-s}{1+s}, (0 < s < 1)$ – максимально возможное значение константы сильной единственности. Для этого надо доказать, что неравенство

$$\|\pi^{(0)}\| + r_0 \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} B_i \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} T_i \tag{5}$$

выполняется при любых значениях $\alpha_i, \beta_i$.

Сравним значения $B_i$. Имеем

$$B_1 = \sum_{j=1}^{4} \left| \left(\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) f_j + \left(\beta_1 - \beta_1^{(0)}\right) g_j \right| = \sum_{j=1}^{4} |(\alpha_1 - 1) f_j + \beta_1 g_j| =$$

$$= (1+s)(|\alpha_1 - 1| + |\beta_1|),$$

$$B_2 = \sum_{j=1}^{4} \left| \left(\alpha_2 - \alpha_2^{(0)}\right) f_j + \left(\beta_2 - \beta_2^{(0)}\right) g_j \right| = \sum_{j=1}^{4} |\alpha_2 f_j + \beta_2 g_j| =$$

$$= (1+s)(|\alpha_2| + |\beta_2|),$$

$$B_3 = \sum_{j=1}^{4} \left| \left(\alpha_3 - \alpha_3^{(0)}\right) f_j + \left(\beta_3 - \beta_3^{(0)}\right) g_j \right| = \sum_{j=1}^{4} |\alpha_3 f_j + \beta_3 g_j| =$$

$$= (1+s)(|\alpha_3| + |\beta_3|),$$

$$B_4 = \sum_{j=1}^{4} \left| \left(\alpha_4 - \alpha_4^{(0)}\right) f_j + \left(\beta_4 - \beta_4^{(0)}\right) g_j \right| = \sum_{j=1}^{4} |\alpha_4 f_j + (\beta_4 - 1) g_j| =$$

$$= (1+s)(|\alpha_4| + |\beta_4 - 1|).$$

Используя равенства (4), получим

$$B_1 = s(1+s)(|\alpha_2| + |\beta_2|) = sB_2,\ B_4 = s(1+s)(|\alpha_3| + |\beta_3|) = sB_3.$$

$$\text{Так как } 0 < s < 1, \text{ то } \max_{1\leqslant i\leqslant 4} B_i = \max\{B_2, B_3\}.$$

Неравенство (5) перепишем в виде

$$1 + r_0 \cdot \max\{B_2, B_3\} \leqslant \max\{T_2, T_3\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + (1-s)\cdot\max\{|\alpha_2| + |\beta_2|; |\alpha_3| + |\beta_3|\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{|\alpha_2| + |1 - s\alpha_2| + (1+s)|\beta_2|; (1+s)|\alpha_3| + |1 - s\beta_3| + |\beta_3|\}.$$

Рассмотрим два случая:

а) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} B_i = B_2$. Достаточно доказать неравенство

$$1 + (1-s)(|\alpha_2| + |\beta_2|) \leqslant |\alpha_2| + |1 - s\alpha_2| + (1+s)|\beta_2|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + (1-s)|\alpha_2| \leqslant |\alpha_2| + |1 - s\alpha_2| \text{ и } (1-s)|\beta_2| \leqslant (1+s)|\beta_2|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1 - s|\alpha_2| \leqslant |1 - s\alpha_2| \text{ и } 1 - s \leqslant 1 + s.$$

б) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} B_i = B_3$. Достаточно доказать неравенство

$$1 + (1-s)(|\alpha_3| + |\beta_3|) \leqslant (1+s)|\alpha_3| + |1 - s\beta_3| + |\beta_3|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + (1-s)|\beta_3| \leqslant |\beta_3| + |1 - s\beta_3| \text{ и } (1-s)|\alpha_3| \leqslant (1+s)|\alpha_3|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1 - s|\beta_3| \leqslant |1 - s\beta_3| \text{ и } 1 - s \leqslant 1 + s.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

**2.** Пусть $s > 1$. Тогда

$$\|\pi - \pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4} B_i = \max_i \sum_{j=1}^{4} |(\alpha_i - \alpha_i^{(0)})f_j + (\beta_i - \beta_i^{(0)})g_j| =$$

$$= \max\left\{\sum_{j=1}^{4}|\alpha_1 f_j + \beta_1 g_j|; \sum_{j=1}^{4}\left|\left(\alpha_2 - \frac{1}{s}\right)f_j + \beta_2 g_j\right|; \sum_{j=1}^{4}\left|\alpha_3 f_j + \left(\beta_3 - \frac{1}{s}\right)g_j\right|;\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{4}|\alpha_4 f_j+\beta_4 g_j|\right\}=\max\left\{(1+s)(|\alpha_1|+|\beta_1|);(1+s)\left(\left|\alpha_2-\frac{1}{s}\right|+|\beta_2|\right);\right.$$

$$\left.(1+s)\left(|\alpha_3|+\left|\beta_3-\frac{1}{s}\right|\right);(1+s)(|\alpha_4|+|\beta_4|)\right\}=(1+s)\cdot\max\{|\alpha_1|+|\beta_1|;$$

$$\left.\left|\alpha_2-\frac{1}{s}\right|+|\beta_2|;|\alpha_3|+\left|\beta_3-\frac{1}{s}\right|;|\alpha_4|+|\beta_4|\right\}=(1+s)\cdot\max\{|\alpha_1|+|\beta_1|;$$

$$\left.\frac{1}{s}(|\alpha_1|+|\beta_1|);\frac{1}{s}(|\alpha_4|+|\beta_4|);|\alpha_4|+|\beta_4|\right\}=(1+s)\cdot\max\{|\alpha_1|+|\beta_1|;|\alpha_4|+|\beta_4|\}.$$

Неравенство (5) перепишем в виде

$$1+r_0\cdot\max\{B_1,B_4\}\leqslant\max\{T_1,T_4\}\Leftrightarrow 1+(s-1)\cdot\max\{|\alpha_1|+|\beta_1|;|\alpha_4|+|\beta_4|\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\{|1-\alpha_1|+s|\alpha_1|+(1+s)|\beta_1|;(1+s)|\alpha_4|+s|\beta_4|+|1-\beta_4|\}.$$

Рассмотрим два случая:

а) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}B_i=B_1$. Достаточно доказать неравенство

$$1+(s-1)(|\alpha_1|+|\beta_1|)\leqslant|1-\alpha_1|+s|\alpha_1|+(1+s)|\beta_1|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1+(s-1)|\alpha_1|\leqslant|1-\alpha_1|+s|\alpha_1| \text{ и } (s-1)|\beta_1|\leqslant(1+s)|\beta_1|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1-|\alpha_1|\leqslant|1-\alpha_1| \text{ и } s-1\leqslant 1+s.$$

б) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}B_i=B_4$. Достаточно доказать неравенство

$$1+(s-1)(|\alpha_4|+|\beta_4|)\leqslant(1+s)|\alpha_4|+s|\beta_4|+|1-\beta_4|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1+(s-1)|\beta_4|\leqslant s|\beta_4|+|1-\beta_4| \text{ и } (s-1)|\alpha_4|\leqslant(1+s)|\alpha_4|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1-|\beta_4|\leqslant|1-\beta_4| \text{ и } s-1\leqslant 1+s.$$

Теорема доказана.

## II. Операторы проектирования по системе Уолша в пространстве $L_1$

### 1. Неединственность оператора $F_5 : X_8 \to X_5$

Частные суммы ряда Фурье-Уолша $F_n$ имеют минимальные нормы среди всех операторов проектирования $\pi_n : X \to X_n$, где $X$ – пространство $M$ всех ограниченных на $[0; 1]$ функций или пространство $L_1$ всех суммируемых на $[0; 1]$ функций $[3, \text{глава}\, 12, \S 2]$.
Уолш [2] показал, что норма оператора $F_n$ достигается на множестве $X_{2^s}$ ($s = 0, 1, \ldots;\ n \leqslant 2^s$). Пусть

$$L_n^{(s)} = \sup_{P \in X_{2^s},\, \|P\|=1} \|F_n(P)\|,$$

тогда

$$L_1^{(s)} = L_{2^s}^{(s)} = 1, L_n^{(s-1)} = L_{2n}^{(s)}, L_{2n+1}^{(s+1)} = 0,5\left(L_{2n}^{(s+1)} + L_{2n+2}^{(s+1)}\right) + 0,5 =$$

$$= 0,5\left(L_n^{(s)} + L_{n+1}^{(s)}\right) + 0,5,$$

$$\|F_n\| = L_n^{(s)}[2].$$

Легко проверить, что $\|F_5\| = \frac{7}{4}$, $\|F_6\| = \frac{3}{2}$. Крайними точками единичной сферы пространства $X_8$ в интегральной метрике являются элементы $\pm v^{(j)} = \sum_{i=1}^{8} a_{ij} w_{i-1}$ $(j = \overline{1,8})$. Действительно, пусть $x_m \in \left(\frac{m-1}{8}, \frac{m}{8}\right)$, $(m = \overline{1,8})$. Тогда

$$v^{(j)}(x_m) = \sum_{i=1}^{8} a_{ij} a_{im} = \begin{cases} 8,\ j = m \\ 0,\ j \neq m, \end{cases} \quad \|v^{(j)}\|_{L_1} = \int_0^1 |v^{(j)}(x)| dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{8} 2^{-3} |v^{(j)}(x_m)| = 1,$$

поэтому любой полином $P \in X_8$ с единичной нормой может быть представлен в виде выпуклой линейной комбинации элементов $\pm v^{(j)}$. Всего единичная сфера пространства $X_8$ содержит 16 крайних точек (в метрике $L_1$).
Так как

$$\|F_6(v^{(j)})\| = \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{6} a_{ij} w_{i-1} \right| dx = \sum_{m=1}^{8} 2^{-3} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij} a_{im} \right| =$$

$$= 2^{-3}\left(\sum_{m\neq j}\left|\sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{im}\right| + \left|\sum_{i=1}^{6} a_{ij}^2\right|\right) = 2^{-3}(6+6) = \frac{3}{2} = \|F_6\|, (j=\overline{1,8}),$$

то все крайние точки $\pm v^{(j)}$ являются экстремальными для оператора $F_6$. Элементы $\pm v^{(j)}$ экстремальные и для оператора $F_5 : X_8 \to X_5$, т.е. $\|F_5(v^{(j)})\| = \frac{7}{4} = \|F_5\|, (j = \overline{1,8})$.

Оператор $\bar{\pi}_5$ определим следующим образом:

$$\bar{\pi}_5(w_{i-1}) = w_{i-1},\ i=\overline{1,5},\ \bar{\pi}_5(w_6) = 0,\ \bar{\pi}_5(w_7) = \bar{\pi}_5(w_8) = \varepsilon(w_0 - w_1),$$
$$0 < |\varepsilon| < \frac{1}{4}.$$

$$\bar{\pi}_5(v^{(j)}) = \sum_{i=1}^{5} a_{ij}w_{i-1} + \varepsilon(w_0 - w_1)(a_{7j} + a_{8j}) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} a_{ij}w_{i-1} + 2\varepsilon(w_0 - w_1)a_{8j},\ j=\overline{1,4}, \\ \sum_{i=1}^{5} a_{ij}w_{i-1},\ j=\overline{5,8}. \end{cases}$$

Если $j = \overline{5,8}$, то

$$\|\bar{\pi}_5(v^{(j)})\| = \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{5} a_{ij}w_{i-1}\right| dx = \sum_{m=1}^{8} 2^{-3}\left|\sum_{i=1}^{5} a_{ij}a_{im}\right| = \|F_5(v^{(j)})\|.$$

Пусть $j = 1$.

$$\bar{\pi}_5(v^{(1)}) = \sum_{i=1}^{5} a_{i1}w_{i-1} + 2\varepsilon(w_0 - w_1), \bar{\pi}_5(v^{(1)}, x_m) = \sum_{i=1}^{5} a_{im} + 2\varepsilon(a_{1m} - a_{2m}) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} a_{im},\ m=\overline{1,4}, \\ \sum_{i=1}^{5} a_{im} + 4\varepsilon,\ m=\overline{5,8}. \end{cases}$$

$$\|\bar{\pi}_5(v^{(1)})\| = 2^{-3}\sum_{m=1}^{8} \|\bar{\pi}_5(v^{(1)}; x_m)\| =$$

$$= 2^{-3}\left(\sum_{m=1}^{4}\left|\sum_{i=1}^{5} a_{im}\right| + \sum_{m=5}^{8}\left|\sum_{i=1}^{5} a_{im} + 4\varepsilon\right|\right) =$$

$$= 2^{-3}(5+3+1+1+|1+4\varepsilon| + |-1+4\varepsilon| + |1+4\varepsilon| + |-1+4\varepsilon|) = \frac{7}{4}.$$

Аналогично доказывается, что $\|\bar{\pi}_5(v^{(j)})\| = \frac{7}{4},\ j = 2, 3, 4$. Таким образом, $\|\bar{\pi}_5\| = \|F_5\|$ и неединственность минимальной проекции $\pi_5 : X_8 \to X_5$ доказана.

## 2. Сильная единственность оператора $F_6 : X_8 \to X_6$

В пространстве $L_1$ свойством единственности оператор $F_n$ обладает только при $n = 2^s, (s = 0, 1, 2, \ldots)$ [3, глава 13, §2]. Если рассматривать операторы $\pi_n$ не на всём пространстве $X$, а на подпространстве $X_{2^s}$ $(\pi_n : X_{2^s} \to X_n,\ n \leqslant 2^s)$, то для некоторых $n$ оператор $F_n$ обладает не только свойством единственности, но и свойством сильной единственности.

**Определение.** Оператор проектирования $\pi_n^{(0)} : Y \to X$ называется сильно единственным, если существует действительное число $r (0 < r \leqslant 1)$ такое, что для любого оператора $\pi_n : Y \to X$ выполняется неравенство

$$\|\pi_n^{(0)}\| + r\|\pi_n - \pi_n^{(0)}\| \leqslant \|\pi_n\|. \tag{1}$$

Очевидно, что сильно единственный оператор обладает свойством минимальности и
единственности. В случае проектирования на гиперплоскость $F_{2^s-1} : X_{2^s} \to X_{2^s-1}$ справедливо следующее утверждение [3, глава 13, §3].

**Утверждение.** Оператор $F_{2^s-1} : X_{2^s} \to X_{2^s-1}$ является сильно единственным. Максимальное значение констант сильной единственности $r_0$ в пространствах $L_1$ и $M$ равны соответственно

$$\frac{1}{2^s - 1} \text{ и } \frac{2^{s-1} - 1}{2^{s-1}(2^s - 1)} \ (s = 1, 2, \ldots).$$

**Теорема.** Оператор $F_6 : X_8 \to X_6$ является сильно единственным и максимальное значение константы $r = r_0$ в неравенстве

$$\|F_6\| + r_0\|\pi_6 - F_6\| \leqslant \|\pi_6\| \tag{2}$$

равно $\frac{1}{3}$.

Докажем несколько лемм.

**Лемма 1.**

$$\|\pi_6\| = 2^{-3} \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \sum_{m=1}^{8} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij} a_{im} + c_{jm} \right|, \tag{3}$$

где $c_{jm} = \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \sum_{l=1}^{6} \gamma_{li} a_{lm},\ \gamma_{li} \in R.$

**Доказательство.** Оператор $\pi_6 : X_8 \to X_6$ имеет следующий вид:

$$\pi_6(w_{i-1}) = \begin{cases} w_{i-1},\ (i = \overline{1,6}), \\ \sum_{l=1}^{6} \gamma_{li} w_{l-1},\ (i = 7,8), \end{cases}$$

$$\pi_6(v^{(j)}) = \sum_{i=1}^{6} a_{ij} w_{i-1} + \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \sum_{l=1}^{6} \gamma_{li} w_{l-1}.$$

Тогда

$$\|\pi_6\| = \max_{1 \le j \le 8} \|\pi_6(v^{(j)})\| = 2^{-3} \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \sum_{m=1}^{8} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij} a_{im} + c_{jm} \right|.$$

**Лемма 2.**

$$\|\pi_6 - F_6\| = 2^{-3} \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \sum_{m=1}^{8} \|c_{jm}\|. \tag{4}$$

**Доказательство.** Оператор $F_6 : X_8 \to X_6$ имеет следующий вид:

$$F_6(w_{i-1}) = \begin{cases} w_{i-1},\ i = \overline{1,6}, \\ 0,\ i = 7,8, \end{cases}$$

$F_6(v^{(j)}) = \sum_{i=1}^{6} a_{ij} w_{i-1}$. Тогда

$$\|\pi_6 - F_6\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \|(\pi_6 - F_6)(v^{(j)})\| = 2^{-3} \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \sum_{m=1}^{8} |c_{jm}|.$$

**Лемма 3.** $r_0 \leqslant \frac{1}{3}$.

**Доказательство.** Оператор $\tilde{\pi}_6$ определим следующим образом. Положим $\gamma_{li} = -0,5 h a_{l4}$,
$0 < h < 1,\ l = \overline{1,6},\ i = 7,8$. Вычислим нормы операторов $\|\tilde{\pi}_6\|$ и $\|\tilde{\pi}_6 - F_6\|$.

$$\|\tilde{\pi}_6\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \|\tilde{\pi}_6(v^{(j)})\| = 2^{-3} \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \sum_{m=1}^{8} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij} a_{im} - 0,5h \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \sum_{l=1}^{6} a_{l4} a_{lm} \right|.$$

В зависимости от $m$ сумма $\sum_{l=1}^{6} a_{l4} a_{lm}$ принимает следующие значения:

$$1)\ 1 \leqslant m \leqslant 3,\ \sum_{l=1}^{6} a_{l4} a_{lm} = -2a_{8m},\ 2)\ m = 4,\ \sum_{l=1}^{6} a_{l4}^2 = 6,\ 3)\ 5 \leqslant m \leqslant 8,$$

$$\sum_{l=1}^{6} a_{l4}a_{lm} = 0.$$

Имеем

$$\|\tilde{\pi}_6\| = 2^{-3} \max_{1\leqslant j\leqslant 8} \left( \sum_{m=1}^{3} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{im} + ha_{8m} \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{i4} - 3h \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=5}^{8} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{im} \right| \right) = 2^{-3} \max_{1\leqslant j\leqslant 8} D_j = 2^{-3} \max \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant 3} D_j;\ D_4;\ \max_{5\leqslant l\leqslant 8} D_j \right\},$$

где

$$D_j = \sum_{m=1}^{3} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{im} + ha_{8m} \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{i4} - 3h \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| + \sum_{m=5}^{8} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{im} \right|.$$

Каждый случай рассмотрим отдельно. Заметим, что

$$\sum_{m=5}^{8} \left| \sum_{i=1}^{6} a_{ij}a_{im} \right| = 0 \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant 4.$$

$$1)\ 1 \leqslant j \leqslant 3.\ D_j = \sum_{m=1}^{3} \left| \sum_{i=1}^{8} a_{ij}a_{im} - \sum_{i=7}^{8} a_{ij}a_{im} + ha_{8m} \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{8} a_{ij}a_{i4} - \sum_{i=7}^{8} a_{ij}a_{i4} - 3h \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| =$$

$$= \sum_{m=1,\, m\neq j}^{3} \left| \sum_{i=1}^{8} a_{ij}a_{im} - \sum_{i=7}^{8} a_{ij}a_{im} + ha_{8m} \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{8} a_{ij}^2 - \sum_{i=7}^{8} a_{ij}^2 + ha_{8j} \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=7}^{8} a_{ij}a_{i4} + 3h \sum_{i=7}^{8} a_{ij} \right| =$$

$$= \sum_{m=1,\, m\neq j}^{3} \left| - \sum_{i=7}^{8} a_{ij}a_{im} + 2ha_{8m}a_{8j} \right| + |6 + 2ha_{8j}^2| + |2a_{8j} + 6ha_{8j}| =$$

$$= \sum_{m=1,\, m\neq j}^{3} | - 2a_{8m}a_{8j} + 2ha_{8m}a_{8j}| + |6 + 2h| = 4(1-h) + 8 + 8h = 12 + 4h.$$

$$2)\ j=4.\ D_4=\sum_{m=1}^{3}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{i4}a_{im}+ha_{8m}\sum_{i=7}^{8}a_{i4}\right|+\left|\sum_{i=1}^{6}a_{i4}^2-3h\sum_{i=7}^{8}a_{i4}\right|=$$

$$=\sum_{m=1}^{3}\left|-\sum_{i=7}^{8}a_{i4}a_{im}+2ha_{8m}\right|+|6-6h|=\sum_{m=1}^{3}|-2a_{8m}+2ha_{8m}|+|6-6h|=$$
$$=12-12h.$$

3) $5\leqslant j\leqslant 8$. Так как в этом случае $\sum\limits_{i=7}^{8}a_{ij}=0$, то $D_j=\sum\limits_{m=1}^{4}\left|\sum\limits_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}\right|+$

$$+\sum_{m=5}^{8}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}\right|=\sum_{m=5}^{8}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}\right|=\sum_{m=5,\,m\neq j}^{8}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}\right|+\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}^2\right|=$$
$$=3\cdot 2+6=12.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{\pi}_6\|=2^{-3}\max\{12+4h,12-12h,12\}=2^{-3}(12+4h).$$

Найдём теперь норму оператора $\|\tilde{\pi}_6-F_6\|$.

$$\|\tilde{\pi}_6-F_6\|=\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\sum_{m=1}^{8}\left|0,5h\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\sum_{l=1}^{6}a_{l4}a_{lm}\right|=2^{-4}h\times$$

$$\times\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\left(\sum_{m=1}^{3}\left|\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\sum_{l=1}^{6}a_{l4}a_{lm}\right|+\left|\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\sum_{l=1}^{6}a_{l4}^2\right|+\sum_{m=5}^{8}\left|\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\sum_{l=1}^{6}a_{l4}a_{lm}\right|\right)=$$
$$=2^{-4}h\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\left(2\sum_{m=1}^{3}\left|\sum_{i=7}^{8}a_{ij}a_{8m}\right|+6\left|\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\right|\right)=2^{-3}h\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\left|6\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\right|=\frac{3h}{2}.$$

Подставим найденные значения $\|\tilde{\pi}_6\|$ и $\|\tilde{\pi}_6-F_6\|$ в неравенство (2). Имеем

$$\frac{3}{2}+r\cdot\frac{3h}{2}\leqslant\frac{3}{2}+\frac{h}{2}\Leftrightarrow 3r\leqslant 1,\ \text{откуда}\ r\leqslant\frac{1}{3}.$$

Лемма 3 доказана.

Докажем теперь, что для произвольного оператора проектирования $\pi_6:X_8\to X_6$ справедливо неравенство

$$\|F_6\|+\frac{1}{3}\|\pi_6-F_6\|\leqslant\|\pi_6\| \tag{5}$$

или, используя (3) и (4),

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|\leqslant\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}+c_{jm}\right|. \tag{6}$$

Если $c_{jm}=0$ для любых $j,m=\overline{1,8}$, то (6) выполнено. Пусть теперь не все $c_{jm}$ равны нулю.

Так как

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|=\max\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|;\max_{5\leqslant j\leqslant 8}\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|\right\},$$

$$\text{а }\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|=\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\sum_{l=1}^{6}\gamma_{li}a_{lm}\right|=\sum_{m=1}^{8}\left|a_{7j}\sum_{l=1}^{6}\gamma_{l7}a_{lm}+a_{8j}\sum_{l=1}^{6}\gamma_{l8}a_{lm}\right|,$$

то при $1\leqslant j\leqslant 4$ имеем

$$a_{7j}=a_{8j}\text{ и }\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|=\sum_{m=1}^{8}\left|a_{8j}\sum_{l=1}^{6}(\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|=$$

$$=\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{l=1}^{6}(\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|.$$

Если же $5\leqslant j\leqslant 8$, то $a_{7j}=-a_{8j}$ и

$$\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|=\sum_{m=1}^{8}\left|a_{8j}\sum_{l=1}^{6}(-\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|=$$

$$=\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{l=1}^{6}(-\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|.$$

Таким образом,

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|=\max\left\{\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{l=1}^{6}(\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|;\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{l=1}^{6}(-\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|\right\}.$$

Пусть для определённости

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 8}\sum_{m=1}^{8}|c_{jm}|=\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{l=1}^{6}(\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|.$$

Для доказательства неравенства (6) достаточно доказать, что

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{l=1}^{6}(\gamma_{l7}+\gamma_{l8})a_{lm}\right|\leqslant\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}+c_{jm}\right|. \tag{7}$$

Правую часть неравенства (7) оценим снизу. Воспользуемся очевидными соотношениями:

$$1)\ 1\leqslant m\leqslant 4,\ m\neq j,\ \sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}=\sum_{i=1}^{8}a_{ij}a_{im}-\sum_{i=7}^{8}a_{ij}a_{im}=-2a_{8j}a_{8m}.$$

$$2)\ m=j,\ \sum_{i=1}^{6}a_{jj}^2=6.$$

$$3)\ 5\leqslant m\leqslant 8,\ \sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}=0.$$

Имеем

$$\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}+c_{jm}\right|=\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\left(\sum_{m=1,\,m\neq j}^{4}|-2a_{8j}a_{8m}+c_{jm}|+|6+c_{jj}|+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=5}^{8}|c_{jm}|\right)=\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\left(\sum_{m=1,\,m\neq j}^{4}|2-a_{8j}a_{8m}c_{jm}|+|6+c_{jj}|+\sum_{m=5}^{8}|c_{jm}|\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\left(6-\sum_{m=1,\,m\neq j}^{4}a_{8j}a_{8m}c_{jm}+6+c_{jj}+\sum_{m=5}^{8}|c_{jm}|\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\left(12-\sum_{m=1}^{4}a_{8j}a_{8m}c_{jm}+2c_{jj}+\sum_{m=5}^{8}|c_{jm}|\right).$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{4}a_{8j}a_{8m}c_{jm}=a_{8j}\sum_{m=1}^{4}a_{8m}\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\sum_{l=1}^{6}\gamma_{li}a_{lm}=a_{8j}\sum_{i=7}^{8}a_{ij}\sum_{l=1}^{6}\gamma_{li}\sum_{m=1}^{4}a_{8m}a_{lm}=0,$$

то

$$\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\sum_{m=1}^{8}\left|\sum_{i=1}^{6}a_{ij}a_{im}+c_{jm}\right|\geqslant\frac{1}{8}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\left(12+2c_{jj}+\sum_{m=5}^{8}|c_{jm}|\right)=$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} \left( 2c_{jj} + \sum_{m=5}^{8} |c_{jm}| \right) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} \left( 2c_{jj} + \sum_{m=5}^{8} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| \right) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} c_{jj} + \frac{1}{8} \sum_{m=5}^{8} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right|.$$

После упрощения неравенство (7) примет вид

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{8} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} c_{jj} + \frac{1}{8} \sum_{m=5}^{8} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{4} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| \leqslant 6 \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} c_{jj} + 2 \sum_{m=5}^{8} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right|. \qquad (8)$$

Уменьшим правую часть неравенства (8). Докажем неравенство

$$\sum_{m=1}^{4} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| \leqslant 6 \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} c_{jj}. \qquad (9)$$

Преобразуем обе части неравенства (9).

$$\sum_{m=1}^{4} \left| \sum_{l=1}^{6} (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| = \sum_{m=1}^{4} \left| \sum_{l=1}^{6} t_l a_{lm} \right| = |t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6| +$$

$+|t_1+t_2+t_3+t_4-t_5-t_6|+|t_1+t_2-t_3-t_4+t_5+t_6|+|t_1+t_2-t_3-t_4-t_5-t_6| =$
$= |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3|$, где $t_l = \gamma_{l7} + \gamma_{l8}$ $(l = \overline{1,6})$,

$d_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - t_5 - t_6$, $d_2 = t_1 + t_2 - t_3 - t_4 + t_5 + t_6$, $d_3 = -t_1 - t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + -t_6$.

$c_{11} = \sum_{i=7}^{8} a_{i1} \sum_{l=1}^{6} \gamma_{li} a_{l1} = \sum_{l=1}^{6} t_l a_{l1} = d_1 + d_2 + d_3$,
$c_{22} = \sum_{i=7}^{8} a_{i2} \sum_{l=1}^{6} \gamma_{li} a_{l2} = -\sum_{l=1}^{6} t_l a_{l2} = -(t_1+t_2+t_3+t_4-t_5-t_6) = -d_1$,
$c_{33} = \sum_{i=7}^{8} a_{i3} \sum_{l=1}^{6} \gamma_{li} a_{l3} = -\sum_{l=1}^{6} t_l a_{l3} = -(t_1+t_2-t_3-t_4+t_5+t_6) = -d_2$,
$c_{44} = \sum_{i=7}^{8} a_{i4} \sum_{l=1}^{6} \gamma_{li} a_{l4} = \sum_{l=1}^{6} t_l a_{l4} = (t_1 + t_2 - t_3 - t_4 - t_5 - t_6) = -d_3$.

После преобразований неравенство (9) примет вид

$$|d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \leqslant$$

$$\leqslant 6 \cdot \max\{d_1 + d_2 + d_3,\ -d_1,\ -d_2,\ -d_3\} = K. \tag{10}$$

Докажем его. В силу симметрииии без уменьшения общности будем считать, что $|d_1| \geqslant |d_2| \geqslant |d_3|$. Рассмотрим несколько случаев.

**1**. $d_1 \leq 0$. $|d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \leqslant 6|d_1| \leqslant K$.

**2**. $d_1 > 0,\ d_2 \geqslant 0$. Очевидно, что $d_2 + d_3 \geqslant 0$, поэтому $d_1 + d_2 + d_3 \geqslant d_1$ и $K \geqslant 6(d_1 + d_2 + d_3) \geqslant 6d_1 \geqslant |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3|$.

**3**. $d_1 > 0,\ d_2 < 0,\ d_3 \geqslant 0,\ \max\{d_1 + d_2 + d_3,\ -d_2\} = d_1 + d_2 + d_3$. Докажем, что $6(d_1+d_2+d_3) \geqslant |d_1+d_2+d_3|+|d_1|+|d_2|+|d_3| \Leftrightarrow 5(d_1+d_2+d_3) \geqslant d_1 - d_2 + d_3 \Leftrightarrow 2d_1 + 3d_2 + 2d_3 \geqslant 0$. По условию $d_1 + d_2 + d_3 \geqslant -d_2 \Leftrightarrow d_1 + 2d_2 + d_3 \geqslant 0$ и $d_1 + d_2 + d_3 \geqslant 0$. Сложив эти два неравенства, получим требуемое неравенство $2d_1 + 3d_2 + 2d_3 \geqslant 0$.

**4**. $d_1 > 0,\ d_2 < 0,\ d_3 \geqslant 0,\ \max\{d_1 + d_2 + d_3,\ -d_2\} = -d_2$. Требуется доказать, что $-6d_2 \geqslant d_1 + d_2 + d_3 + d_1 - d_2 + d_3 \Leftrightarrow d_1 + 3d_2 + d_3 \leqslant 0$. По условию $d_1+d_2+d_3 < -d_2 \Leftrightarrow d_1+2d_2+d_3 < 0$. Тогда и подавно $d_1+3d_2+d_3 \leqslant 0$.

**5**. $d_1 > 0,\ d_2 < 0,\ d_3 < 0,\ \max\{d_1 + d_2 + d_3,\ -d_2\} = d_1 + d_2 + d_3$. Требуется доказать, что $6(d_1 + d_2 + d_3) \geqslant d_1 + d_2 + d_3 + d_1 - d_2 - d_3 \Leftrightarrow 2d_1 + 3d_2 + 3d_3 \geqslant 0$. По условию $d_1 + 2d_2 + d_3 \geqslant 0$ и $-d_2 + d_3 \geqslant 0$. Тогда $2d_1 + 3d_2 + 3d_3 = (2d_1 + 4d_2 + 2d_3) + (-d_2 + d_3) \geqslant 0$.

**6**. $d_1 > 0,\ d_2 < 0,\ d_3 < 0,\ \max\{d_1 + d_2 + d_3,\ -d_2\} = -d_2,\ d_1+d_2+d_3 \geqslant 0$. Требуется доказать, что $-6d_2 \geqslant d_1 + d_2 + d_3 + d_1 - d_2 - d_3 \Leftrightarrow d_1 + 3d_2 \leqslant 0$. По условию $d_1 + 2d_2 + d_3 \geqslant 0$ и $d_2 - d_3 \leqslant 0$. Тогда $d_1 + 3d_2 = (d_1 + 2d_2 + d_3) + (d_2 - d_3) \leqslant 0$.

**7**. $d_1 > 0,\ d_2 < 0,\ d_3 < 0,\ \max\{d_1 + d_2 + d_3,\ -d_2\} = -d_2,\ d_1+d_2+d_3 \leqslant 0$. Требуется доказать, что $-6d_2 \geqslant -d_1 - d_2 - d_3 + d_1 - d_2 + d_3 \Leftrightarrow 2d_2 - d_3 \leqslant 0$. Последнее неравенство очевидно.

Неравенство (10), а вместе с ним и теорема, доказаны.

## Список литературы


[1] Blatter J.,Cheney E.W., Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces. Ann. math. pura et appl., 101 (1974), p.215-227.

[2] Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math., 45, 1923, P. 5-24.

[3] Локоть В., Мартынов О. Операторы проектирования в конечномерных пространствах. - Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing, 2016, 245 с.