ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.9

Альтернативные обобщённые операторы, допускаемые обобщённым уравнением Рэлея

Л. В. Линчук

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru

Аннотация

Рассматривается обобщённое уравнение Рэлея. Предложен метод поиска первых интегралов, основанный на алгоритме, использующем альтернативные обобщённые операторы. Найдены модельные уравнения данного типа и их первые интегралы.

Ключевые слова: альтернативный обобщённый оператор, первый интеграл, обобщённое уравнение Рэлея

Abstract

The article deals with the generalized Rayleigh equation. We offer a method for search of first integrals. It is based on the algorithm that uses alternative generalized operators. Model equations of this type and their first integrals are found.

Keywords: alternative generalized operator, first integral, generalized Rayleigh equation

Поиск первых интегралов (законов сохранения) для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) не менее актуален, чем поиск симметрий (операторов, допускаемых ОДУ), так как позволяет понизить порядок уравнения и получить дополнительную информацию о множестве решений. В каком-то смысле знание первого интеграла даже более информативно: мы получаем уравнение ме́ньшего порядка относительно **исходных** переменных и явную зависимость от одной из произвольных констант. Это позволяет уже на промежуточной стадии решения удовлетворить одному из краевых или начальных условий и тем самым существенно облегчить дальнейшее решение задачи.

Как известно, любой известный метод поиска первых интегралов в общем виде является неалгоритмичным, и для реализации требует какого-то изначального предположения – анзаца, например, задания структуры зависимости первого интеграла от старшей производной (без анзаца оба общеизвестных метода – прямой и метод операторов Эйлера высших порядков неэффективны). Заметим впрочем, что анзац требуется и для алгоритмов группового анализа – классический метод С. Ли основан на поиске **точечных** преобразований, что само по себе является анзацем, причём достаточно жёстким. Поэтому часто успех в решении задачи определяется удачным выбором исходного предположения. Это обстоятельство стимулирует поиск других методов, которые при схожих анзацах могут дать иные результаты. Один из этих методов прямо следует из 2-ой теоремы о факторизации [1] и применения альтернативных симметрий [2].

Рассмотрим класс обобщённых уравнений Рэлея

$$y'' + f(y)g(y') + h(y) = 0. \tag{1}$$

Уравнения такого типа часто встречаются в задачах нелинейной механики. Частными случаями уравнения (1) является хорошо известнее уравнение Льенара [3]. Очевидно, в силу автономности уравнение (1) допускает оператор $X_1 = \partial_x$. Понижение порядка $y' = p(y)$ приводит к уравнению

$$pp' + f(y)g(p) + h(y) = 0, \tag{2}$$

решить которое в аналитическом виде можно лишь для очень небольшого количества троек (f, g, h). Исключениями являются лишь случаи, когда $g(p) = p^2$ (тогда уравнение (2) сводится к линейному) и $g(p) = ap^4 + bp^2$ (уравнение (2) приводится к уравнению Риккати, а следовательно, линеаризуется). Даже при $g(p) = p$ мы получаем уравнение Абеля 2-го рода, как следствие уравнения Льенара.

Заметим, что в редких случаях уравнение (1) для некоторой тройки функций (f, g, h) удаётся проинтегрировать с помощью современных систем аналитических вычислений (например, MAPLE), но это не всегда помогает при решении ряда задач математического моделирования – при построении промежуточной модели требуется найти уравнение, удовлетворяющее некоторым **априорным условиям**, например условию разрешимости в конечном аналитическом виде. По существу это – обратная задача, и алгоритмы её решения пока находятся на стадии активной разработки.

Если обыкновенное дифференциальное уравнение допускает некоторый альтернативный обобщённый оператор (в частности, точечный), то первый интеграл получается в результате решения соответствующей факторсистемы. К сожалению, при этом возникает несколько сложностей, связанных как с разрешимостью уравнения, которому удовлетворяют инварианты допускаемого оператора, так и с решением самой факторсистемы. Поэтому, формулируя обратную задачу, приходится накладывать дополнительные условия на коэффициенты оператора. Например, при исследовании симметрий класса обобщённых уравнений Релея (1) допускаемый оператор искался в виде

$$X = \partial_x + \alpha(x,y)y^k\partial_y + \beta(x,y)y^m\partial_{y'}.$$

Одним из первых результатов, который получается сравнительно просто, является уравнение

$$y'' + a\mathrm{e}^{3y}(y')^{-1} + b\mathrm{e}^{2y} = 0, \quad a,\, b \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

допускающее оператор

$$X = \partial_x - x^{-1}\partial_y - x^{-1}y'\partial_{y'}.$$

Нетрудно проверить, что это уравнение допускает двумерную точечную алгебру, а следовательно, представимо в виде факторсистемы:

$$\begin{cases} t = x\mathrm{e}^y, \\ u = -xy', \\ u' = \dfrac{au^3 - ut - bt^3}{t^2(u-1)}. \end{cases}$$

Весьма интересной получилась форма его первого интеграла: он автономный и выражается через квадратуры от дробно-рациональных функций

$$I = y + \int \frac{z^2\,dz}{z^3 + bz + a}, \quad z = y'\mathrm{e}^{-y},$$

хотя при этом сам интеграл дробно-рациональной функцией не является. Такого рода формы достаточно удобны для исследования пакетами символьных вычислений, так как эти пакеты хорошо справляются с задачами на расщепление многочленов на слагаемые по степеням переменных, а следовательно, дают возможность проводить исследования задач с достаточно большими степенями и большим числом слагаемых. К тому же автономность первого интеграла уравнения 2-го порядка гарантирует нам решение исходного уравнения в квадратурах (допускаемый оператор $X = \partial_x$ является в этом случае оператором вариационной симметрии).

Вполне разумно проверить гипотезу о том, что существует подкласс уравнений класса (1), обладающих первым интегралом вида

$$I = y + \int \frac{P(z)\,dz}{Q(z)}, \quad z = u(y')v(y),$$

где $P(z)$, $Q(z)$ – многочлены. В результате удалось не только обобщить уравнение (3), но и получить ещё два новых модельных уравнения:

1) уравнение

$$y'' + a\mathrm{e}^{(2-n)y}(y')^n + b\mathrm{e}^{2y} = 0$$

и его первый интеграл

$$I = y + \int \frac{z\,dz}{az^n + z^2 + b}, \quad z = y'\mathrm{e}^{-y};$$

2) уравнение

$$y'' + y^{-1}(y')^2(ay' - 1) + by^2 = 0$$

и его первый интеграл

$$I = y + \int \frac{z\,dz}{az^3 + b}, \quad z = y'/y;$$

3) уравнение

$$y'' + 2y^{-1}(y')^2\left(a(y')^2 - 1\right) + by = 0$$

и его первый интеграл

$$I = y + \int \frac{z\,dz}{az^2 + 2b}, \quad z = (y')^2/y.$$

Следующим вопросом (естественным для группового анализа) является вопрос об операторах, инварианты которых факторизуют уравнение таким образом, что решение внешнего уравнения факторсистемы даёт первый интеграл. Действительно, если для уравнения

$$y'' = F(x, y, y')$$

факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} u = u(x, y, y'), \\ t = t(x, y, y'), \\ u'_t = 0, \end{cases}$$

то $u = u(x, y, y')$ – первый интеграл исходного уравнения. Как оказалось, для всех полученных уравнений класса (1) первый интеграл является инвариантом оператора

$$X = y'\partial_y - [f(y)g(y') + h(y)]\partial_{y'} = y'\partial_y + y''\Big|_{(1)}\partial_{y''} = (D_x - \partial_x)\Big|_{(1)}.$$

Это совпадение не случайно. Любое автономное уравнение

$$y'' = F(y, y') \tag{4}$$

в качестве допускаемого оператора уже имеет оператор переноса ∂_x и оператор полной производной D_x, поэтому оно также допускает альтернативный обобщённый оператор

$$X = (D_x - \partial_x)\Big|_{(4)} = y'\partial_y + y''\Big|_{(4)}\partial_{y'}. \tag{5}$$

Рассмотрим инвариант этого оператора $U = U(y, y')$, который удовлетворяет уравнению

$$y'U_y + y''\Big|_{(4)}U_{y'} = 0, \tag{6}$$

и покажем, что он будет первым интегралом уравнения (4). Действительно

$$D_x(U)\Big|_{(4)} = (U_y + y''U_{y'})\Big|_{(4)} = y'U_y + y''\Big|_{(4)}U_{y'} = [(6)] = 0.$$

Таким образом, все первые интегралы автономного уравнения (4) являются первыми дифференциальными инвариантами оператора (5).

Найденные выше частные случаи обобщённого уравнения Рэлея являются новыми и отсутствуют в справочнике [3]. Они могут использоваться в моделировании и при решении задач нелинейной механики:

1) в качестве точной модели – в случае, когда решение модельного уравнения адекватно описывает изучаемый процесс;
2) в качестве промежуточной модели – ;
3) в качестве эталонной модели – .

Рассмотрим класс уравнений Льенара (частный случай уравнения Рэлея (1) при $g(y') = y'$)

$$y'' + f(y)y' + h(y) = 0. \tag{5}$$

Как указывалось выше, понижение порядка $y' = p(y)$ приводит к уравнению Абеля

$$pp' + f(y)p + h(y) = 0, \tag{6}$$

Будем искать допускаемые уравнением (5) альтернативные обобщённые операторы вида [4]

$$X = \partial_x + \frac{a(y)}{y'}\,\partial_y + \frac{b(y)}{y'}\,\partial_{y'}.$$

Нетривиальным решением определяющего уравнения будет подкласс уравнений[1]

$$y'' + F_y y' = \frac{A}{F}, \tag{7}$$

где $A = \text{const}$, $F = F(y)$, и неклассические симметрии вида

$$X_2 = \partial_x + \frac{F}{y'}\,\partial_y + \frac{(A - F^2 F_y)}{y'}\,\partial_{y'}.$$

Соответствующая факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} t = y' - A\displaystyle\int \frac{dy}{F^2} + F, \\ u = \left(y' + F + \dfrac{A}{2}\right)\displaystyle\int \frac{dy}{F^2} - \int \frac{dy}{F} + x, \\ u' = \dfrac{t}{A}. \end{cases}$$

Решение внешнего уравнения факторсистемы

$$u = \frac{t^2}{2A} + C$$

[1]Заметим, что даже в частном случае $F(y) = \alpha y^k$ для соответствующего уравнения Абеля (6) найдены решения в замкнутом виде лишь для $k = 1/2,\ 2/3,\ 1$.

даёт нам первый интеграл уравнения (7)

$$I = (y')^2 + 2Fy' + F^2 - 2A\int \frac{dy}{F} - 2Ax. \tag{8}$$

Порождаемое первым интегралом (8) уравнение первого порядка

$$(y' + F)^2 - 2A\int \frac{dy}{F} - 2Ax = C \tag{9}$$

имеет решение

$$x + \frac{C}{2A} = -\int \frac{dy}{F(y)}, \tag{10}$$

которое **не является (!)** однопараметрическим семейством решений уравнения (7) – на интегральной кривой (10) интегрирующий множитель уравнения (7)

$$R = 2\big(y' + F(y)\big)$$

обращается в нуль. Применение метода введения параметра к уравнению (8) приводит к уравнению Абеля (6), соответствующему уравнению (7), и к решению (10), которое является **особым**.

Список литературы

[1] Зайцев В. Ф. Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений // “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Труды III Международной конференции. – Красноярск, 2002. – С. 101–105.

[2] Линчук Л. В. Альтернативные обобщённые симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”, материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2010” (12–17 апреля 2010 г.). – СПб.: Издательство БАН, 2010. – С. 46–53.

[3] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

[4] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В. Поиск первых интегралов и альтернативные симметрии // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”, материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2015” (13–17 апреля 2015 г.). – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 50–53.