ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

Циклы дифференциальных уравнений синхронных электрических машин.

Леонов Г.А., Зарецкий А.М.

В работе исследуется новая математическая модель четырехполюсной синхронной электрической машины при последовательном соединении полюсов обмотки возбуждения. Для полученной модели рассматриваются вопросы глобальной устойчивости [1] не нагруженной машины и задача о предельной нагрузке [1, 2, 3]. На основе модифицированного метода нелокального сведения [2] найдены эффективные условия существования круговых решений и циклов второго рода [4]. Метод нелокального сведения и теорема о существовании круговых решений и предельных циклов второго рода является распространением классических результатов Ф. Трикоми [5, 6] на многомерные модели синхронных машин.

Рассмотрим четырехполюсную синхронную электрическую машину при последовательном соединении полюсов обмотки возбуждения, электромеханическая модель которой изображена на рисунке 1(а). Пусть θ – угол между радиус-вектором к стержню с током i_n и вектором напряжённости B магнитного поля; i – ток в обмотке возбуждения; i_k – токи в стержнях короткозамкнутой демпферной обмотки; e – постоянное напряжение, подведённое к обмотке возбуждения; R_1, L_1 – активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения; R_2, L_2 – активное и индуктивное сопротивления стержней демпферной обмотки; n_1 – количество витков в обмотках возбуждения; n_2 – количество стержней в демпферной обмотке; S_1 – площадь витка обмоток возбуждения; S_2 – площадь диаметрального сечения демпферной обмотки; m – коэффициент сильного регулирования; J – момент инерции ротора; M – момент внешних сил.

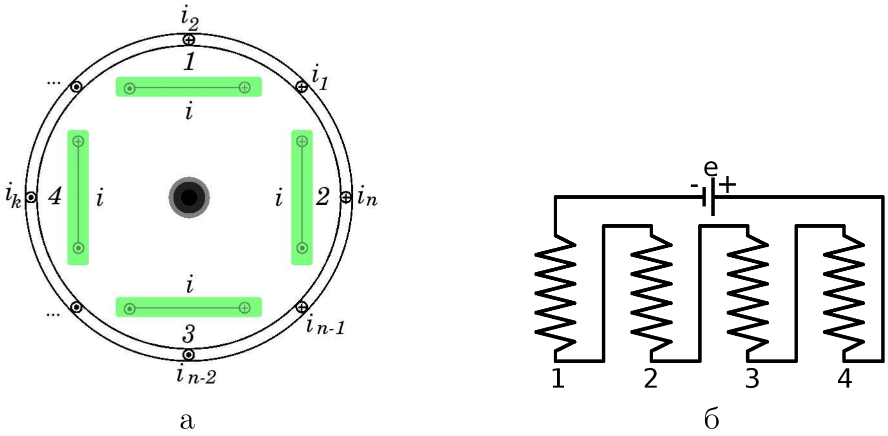

Рис. 1: Электромеханическая модель четырехполюсной синхронной электрической машины: а — электромеханическая модель; б — схема подключения плюсов обмотки возбуждения к источнику постоянного напряжения.

Тогда, используя предположение о равномерно вращающемся магнитном поле и схему соединения полюсов обмотки возбуждения (рис. 1(б)), применим законы Кирхгофа, электромагнитной индукции и уравнение вращения твердого тела для вывода дифференциальных уравнений рассматриваемой электрической машины при сильном регулировании [7, 8]:

$$\begin{aligned}
&\dot\theta = s, J\dot s = m\dot\theta + n_1 S_1 B\sqrt{2}\sin(\theta+\tfrac{\pi}{4})i + \tfrac{S_2B}{2}\sum_{k=1}^{n_2} i_k\cos(\theta+\tfrac{2\pi k}{n_2}) - M,\\
&L_1\dot i + R_1 i = -4n_1S_1B\sqrt{2}\sin(\theta+\tfrac{\pi}{4})s + e,\\
&L_2\dot i_k + R_2 i_k = -\tfrac{S_2B}{2}\cos(\theta+\tfrac{2\pi k}{n_2})s, \qquad\qquad k=1...n_2.
\end{aligned}\tag{1}$$

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (1) к виду более удобному для дальнейшего исследования. Используя невырожденную замену координат

$$\theta\mapsto -\theta-\frac{\pi}{4},\quad s\mapsto -s,\quad x = i+\frac{e}{R},$$

$$z = -\frac{L_2}{n_2S_2B}\sum_{k=1}^{n_2} i_k\sin(\theta-\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi k}{n_2}),\qquad y = -\frac{L_2}{n_2S_2B}\sum_{k=1}^{n_2} i_k\cos(\theta-\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi k}{n_2}),$$

$$z_k = -\sum_{j=-m}^{m} i_{k+j} + \cot(\frac{\pi}{n_2})i_k,\qquad\qquad k=2...(n_2-1),$$

получим систему

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = s,\\
&\dot{s} = -\mu s + a_1 x \sin\theta + a_2 y - \varphi(\theta),\\
&\dot{x} = -c_1 x - b \sin\theta s,\\
&\dot{y} = -c_2 y - zs - s,\\
&\dot{z} = -c_2 z + zs,\\
&\dot{z}_k = -c_2 z_k, \qquad\qquad k = 2...(n_2-1),
\end{aligned}$$

где

$$a = \tfrac{4n_1BS_1}{J}, \qquad b = \tfrac{n_2(BS_2)^2}{8JL}, \qquad c_1 = \tfrac{R_1}{L_1}, \qquad c_2 = \tfrac{R_2}{L_2},$$
$$d = \tfrac{n_1BS_1}{L_1}, \quad \mu = \tfrac{m}{J}, \quad \gamma = \tfrac{M}{J}, \quad \gamma_{max} = \tfrac{en_1BS_1}{JL}, \quad \varphi(\theta) = \gamma_{max}\sin\theta - \gamma.$$

Заметим, что уравнения с переменными z_k интегрируются независимо от остальной системы. Поэтому, будем рассматривать систему

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = s,\\
&\dot{s} = -\mu s + ax \sin\theta + by - \varphi(\theta),\\
&\dot{x} = -c_1 x - d \sin\theta s,\\
&\dot{y} = -c_2 y - zs - s,\\
&\dot{z} = -c_2 z + xs.
\end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1 *Любое решение системы дифференциальных уравнений (2) при* $\gamma = 0$ *стремится при* $t \to +\infty$ *к некоторому состоянию равновесия.*

Доказательство этой теоремы основано на использовании функций Ляпунова [1, 9, 10] вида

$$V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{a}{2d}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{b}{2}z^2 + \int\limits_{\theta_1}^{\theta} \varphi(\zeta)d\zeta.$$

Далее рассмотрим задачу о предельной нагрузке [1, 2, 3] для системы (2). Математическая постановка задачи такова: найти условия, при которых решение $\theta(t)$, $s(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ с начальными данными $\theta(0) = s(0) = x(0) = y(0) = z(0) = 0$ находилось бы в области притяжения стационарного решения $\theta(t) = \theta_0$, $s(t) = x(t) = y(t) = z(t) = 0$, т.е. должны быть выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \quad \lim_{t\to+\infty} s(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0,\\
&\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} z(t) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь θ_0 удовлетворяет условиям

$$\varphi(\theta_0) = 0, \quad \varphi'(\theta_0) > 0, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi).$$

Теорема 2 *Пусть существует такое число $\lambda > 0$, что выполнены следующие условия*

1.

$$\lambda < \min\{\mu, c_1, c_2\};$$

2. решение $F(\sigma)$ дифференциального уравнения

$$F\frac{dF}{d\sigma} = -2\sqrt{\lambda(\mu - \lambda)}F - \varphi(\sigma) \tag{4}$$

с начальными данными

$$F(\theta_1) = 0,$$

удовлетворяет условию

$$F(0) > 0. \tag{5}$$

Здесь θ_1 удовлетворяет условиям

$$\varphi(\theta_1) = 0, \quad \varphi'(\theta_1) < 0, \quad \theta_1 \in [0, 2\pi).$$

Тогда решение системы (2) с начальными данными $\theta = x = y = z = 0$ удовлетворяет соотношениям (3).

Доказательство. Пусть F решение уравнения (4) удовлетворяет условиям теоремы. Введём функцию

$$V(\theta, s, x, y, z) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{a}{2d}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{b}{2}z^2 - \frac{1}{2}F^2(\theta).$$

Тогда, на решениях системы (2) имеет место соотношение

$$\begin{aligned}\dot{V} + 2\lambda V = &-\frac{a}{d}(c_1 - \lambda)x^2 - (c_2 - \lambda)(y^2 + z^2) - \\ &-(\mu - \lambda)s^2 - \lambda F^2(\theta) + \Big(-\frac{dF}{d\theta}F(\theta) - \varphi(\theta)\Big)s \leq \\ &\leq -(\sqrt{\mu - \lambda}s - \sqrt{\lambda}F(\theta))^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, множество [4]

$$\Omega_0 = \Big\{V(\theta, s, x, y, z) \leq 0\Big\}$$

является положительно инвариантным множеством.

Используя инвариантность системы (2) относительно сдвига на $2\pi k$, $k \in Z$ по координате θ, получим положительную инвариантность множеств

$$\Omega_k = \left\{ V_k(\theta, s, x, y, z) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{a}{2d}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{b}{2}z^2 - \frac{1}{2}F_k^2(\theta) \leq 0 \right\},$$

где $F_k(\sigma)$ – сдвинутое на величину $2\pi k$ решение $F(\sigma)$.

В силу условия (5) дифференциальное уравнение (4) имеет решение $F(\sigma)$ такое, что либо существует точка θ_2, удовлетворяющее

$$F(\theta_2) = F(\theta_1) = 0, \quad F(\sigma) > 0, \quad \theta_2 < 0, \forall \sigma \in (\theta_2, \theta_1);$$

либо для решения выполнено неравенство

$$F(\sigma) > 0, \forall \sigma \in (-\infty, \theta_1).$$

Здесь θ_1 соответствует неустойчивому состоянию равновесия системы (2) и удовлетворяет условиям

$$\varphi(\theta_1) = 0, \qquad \varphi'(\theta_1) < 0, \qquad \theta_1 \in [0, 2\pi).$$

В первом случае положительно инвариантное множество Ω_0 является ограниченным. Во втором случае множество $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_0$ является ограниченным. Очевидно, что множество Ω также является положительно инвариантным, так как является пересечением положительно инвариантных множеств.

Покажем, что при выполнении условий теоремы множества Ω и Ω_0 содержат начальные данные $\theta = s = x = y = z = 0$ и состояние равновесия системы (2) $\theta = \theta_0, s = x = y = z = 0$. Так как $\theta_0 \in (0, \theta_1)$ и выполнено $F(\sigma) > 0$ для всех $\sigma \in (0, \theta_1)$, то

$$(\theta_0, 0, 0, 0, 0) \in \Omega, \qquad (\theta_0, 0, 0, 0, 0) \in \Omega_0.$$

Из инвариантности уравнения (4) относительно сдвига на $2\pi k$, $k \in Z$ и условия (5) следует

$$V_k(0, 0, 0, 0, 0) = -F_k(0) = -F(0) < 0.$$

Таким образом, получаем

$$(0, 0, 0, 0, 0) \in \Omega, \qquad (0, 0, 0, 0, 0) \in \Omega_0.$$

Покажем теперь, что любое ограниченное решение системы (2) стремится к состоянию равновесия. Для этого рассмотрим функцию

$$W(\theta,s,x,y,z)=\frac{1}{2}s^2+\frac{a}{2d}x^2+\frac{b}{2}y^2+\frac{b}{2}z^2+\int\limits_{\theta_1}^{\theta}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Не трудно видеть, что на решениях системы (2) выполнено

$$\dot W(\theta(t),s(t),x(t),y(t),z(t))\le 0. \tag{6}$$

Пусть $u=(\theta,s,x,y,z)$ – ограниченное при $t\ge 0$ решение системы (2). Тогда функция W тоже ограничена при $t\ge 0$. Из соотношения (6) следует, что на решениях системы (2) функция W не возрастает по t при $t\ge 0$. Отсюда и из ограниченности функции W при $t\ge 0$ следует существование конечного

$$\lim_{t\to+\infty}W(\theta(t),s(t),x(t),y(t),z(t))=L.$$

Из ограниченности решения следует, что множество Ω_* её ω-предельных точек не пусто. Пусть $u_*\in\Omega_*$. Тогда в силу положительной инвариантности Ω_* траектория, выпущенная из точки u_*, при всех $t\in R^1$ расположена в Ω_*. Поэтому при всех $t\in R^1$ $W(\theta(t,u_*),s(t,u_*),x(t,u_*),y(t,u_*),z(t,u_*))\equiv L$. Используя (6), получим тождества $s\equiv 0$, $x\equiv 0$, $y\equiv 0$, $z\equiv 0$. Из (2) и (6) получаем, что $\dot\theta\equiv 0$. Следовательно, $\theta\equiv const$ и множество Ω_* является подмножеством стационарного множества системы (2).

Таким образом, любое ограниченное решение системы (2) стремится к состоянию равновесия. Отсюда, из ограниченности и положительной инвариантности множеств Ω и Ω_0 и из включений

$$(\theta_0,0,0,0)\in\Omega,\qquad(\theta_0,0,0,0)\in\Omega_0.$$

$$(0,0,0,0)\in\Omega,\qquad(0,0,0,0)\in\Omega_0.$$

следует (3).

Определение 1 *Будем говорить, что решение $u(t)=(\theta(t),\xi(t))$ системы дифференциальных уравнений (2) является круговым, если существуют такие числа $\varepsilon>0$ и τ, что при всех $t\ge\tau$ имеет место неравенство*

$$|\dot\theta(t)|\ge\varepsilon.$$

Определение 2 *Решение $u(t)$ системы дифференциальных уравнений (2) будем называть предельным циклом второго рода, если существуют число $\tau > 0$ и целое число $j \neq 0$, такие, что имеют место равенства*

$$\theta(\tau) - \theta(0) = 2\pi j, \qquad \xi(\tau) = \xi(0).$$

Круговые решения и предельные циклы второго рода соответствуют таким режимам работы, при которых ротор синхронной машины совершает провороты на сколь угодно большой угол θ. Ясно, что наличие таких решений исключает глобальную устойчивость системы (2).

Теорема 3 *Пусть существует такое число $\lambda > 0$, что выполнены следующие условия*

1. $\lambda < \min\{c_1, c_2\}$ *и выполнено*

$$\lambda - \mu - \frac{(a+1)^2}{4(c_1 - \lambda)} - \frac{(b+d)^2}{4(c_2 - \lambda)} \geq 0; \tag{7}$$

2. *решение $F(\sigma)$ уравнения*

$$F\frac{dF}{d\sigma} = -\lambda F - \varphi(\sigma), \tag{8}$$

с начальными данными $F(\theta_0) = 0$, удовлетворяет условию

$$\inf F(\sigma) > 0, \qquad \forall \sigma > \sigma_0, \tag{9}$$

где $\sigma_0 > \theta_0$.

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует круговое решение $(\theta, \xi) = (\theta, s, x, y, z)$, системы (2), удовлетворяющее условиям

$$\theta(0) = \theta_0, \qquad s(0) > 0, \qquad |\xi(0)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Если, кроме этого, $\mu > 0$, то система (2) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Введём функцию

$$V(\theta, \xi) = \frac{1}{2}\Big(F^2(\theta) - s^2 + x^2 + y^2 + z^2\Big).$$

Отметим, что для $\theta = \theta_0$ всегда существует вектор $\xi_0 = (s_0, x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющий условию (10), при которых функция $V(\theta_0, \xi_0) < 0$. Следовательно, на некотором промежутке $[0, T)$ выполнено $V(\theta(t), \xi(t)) < 0$. Тогда

$$0 < -\frac{1}{2}F^2(\theta(t)) + \frac{1}{2}s^2(t), \qquad \forall t \in [0, T).$$

Отсюда и из условий (10) и (9) следует

$$F(\theta(t)) < s(t), \qquad \forall t \in [0, T). \tag{11}$$

Покажем, что функция

$$V(\theta(t), \xi(t)) + \int\limits_0^t \Big[2\lambda V(\theta(\tau), \xi(\tau)) + \delta(\tau)\Big] d\tau \tag{12}$$

является невозрастающей функцией от t на промежутке $[0, T)$. Здесь

$$\delta(t) = \frac{1}{2}\Big(\lambda - \mu - \frac{(a+d)^2}{4(c_1 - \lambda)} - \frac{(b+1)^2}{4(c_2 - \lambda)}\Big)s^2(t).$$

Из условия (7) теоремы 3 следует, что функция $\delta(t)$ является неотрицательной.

Используя (7), (11) и тот факт, что F является решением уравнения (8), на решениях системы (2) получим

$$\frac{dV}{dt} + 2\lambda V + \delta \le \Big(F\frac{dF}{d\theta} + \lambda F + \varphi(\theta)\Big)s = 0.$$

Из этого неравенства следует, что функция (12) является невозрастающей на промежутке $[0, T)$.

Покажем, что функция $V(\theta(t), \xi(t)) < 0$ на промежутке $[0, \infty)$. Путь $V(\theta(t), \xi(t)) < 0$ на промежутке $[0, T)$. Докажем, что следующее соотношение не выполнено

$$V(\theta(T), \xi(T)) = 0. \tag{13}$$

Предположим противное: пусть $V(\theta(T), \xi(T)) = 0$. Но тогда существует $T_1 < T$ такое, что

$$\delta(t) > |2\lambda V(\theta(T), \xi(T))| \qquad \forall t \in (T_1, T).$$

Поскольку функция (12) не возрастает на промежутке $[0, T)$, то имеет место соотношение

$$V(\theta(T), \xi(T)) - V(\theta(t), \xi(t)) + \int\limits_t^T \Big[2\lambda V(\theta(\tau), \xi(\tau)) + \delta(\tau)\Big] d\tau \le 0 \quad \forall t \in (T_1, T).$$

Из последних двух неравенств имеем, $V(\theta(T), \xi(T)) < V(\theta(t), \xi(t))$ на промежутке (T_1, T) и, следовательно, $V(\theta(T), \xi(T)) < 0$. Получили противоречие с (13). Таким образом, функция $V(\theta(t), \xi(t)) < 0$ при $t \geq 0$ и, следовательно

$$F(\theta(t)) < s(t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{14}$$

Таким образом, существует решение системы (2) с начальными данными $\theta(0) = \theta_0$, $s(0)$, $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$, которые удовлетворяют (10) и $V(\theta(t), \xi(t)) < 0$ при $t \geq 0$. Следовательно, из оценок (14) и (9), можно сделать вывод о том, что такое решение является круговым.

Рассмотрим теперь множество

$$\Omega = \Big\{(\theta, s, x, y, z) \Big| V(\theta, \xi) < 0, \quad s > 0, \quad \theta \geq \theta(0)\Big\}.$$

Из того, что на решениях системы (2) с начальными данными из Ω выполнено $V(\theta(t), \xi(t)) < 0$ при всех $t \geq 0$, следует положительная инвариантность множества Ω. Тогда, в силу непрерывной зависимости решений системы (2) от начальных данных, положительно инвариантно и замыкание $\overline{\Omega}$.

Пусть $0 < \delta < \min\{\mu, c_1, c_2\}$, тогда из ограниченности функции $\varphi(\theta)$, следует, существование $\delta^{-1} \max|\varphi(\theta)| < \nu < +\infty$. Введём в рассмотрение функцию

$$U(\theta, \xi) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{a}{2d}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{b}{2}z^2 - \nu,$$

На решениях системы (2) имеет место оценка

$$\frac{dU(\theta(t), \xi(t))}{dt} + \delta U(\theta(t), \xi(t)) \leq 0, \qquad \forall t \geq 0.$$

Поэтому положительно инвариантно множество

$$\Sigma = \Big\{(\theta, \xi) \quad \Big| \quad U(\theta, \xi) \leq 0\Big\}.$$

Из непрерывности $F(\sigma)$ на $[\theta_0, +\infty)$ и соотношений $F(\theta_0) = 0$ и

$$F(\sigma) > 0 \qquad\qquad \forall \sigma > \theta_0$$

следует, что для любого числа $\theta_* > \theta_0$ существует

$$F(\theta_* + 2\pi) > F(\theta_*).$$

Из оценки (14) следует, что для любого вектора

$$u_1 = (\theta_1, \xi_1) \in \Sigma_1 = \Big\{(\theta, \xi) \in \overline{\Omega} \cup \Sigma \quad \Big| \quad \theta = \theta_*\Big\}$$

найдётся число $t(u_1) > 0$, для которого выполнены условия

$$u(t(u_1), u_1) \in \Sigma_2 = \left\{ (\theta, \xi) \in \overline{\Omega} \cup \Sigma \;\middle|\; \theta = \theta_* + 2\pi \right\}$$

$$u(t, u_1) \notin \Sigma_2 \qquad \forall t \geq 0, \quad t \neq t(u_1).$$

Здесь через $u(t, u_1)$ обозначено решение системы (2) с начальными данными $u_1 = (\theta_1, \xi_1)$. Определим преобразование $T : \Sigma_1 \to \Sigma_2$

$$Tu = u(t(u), u), \qquad u \in \Sigma_1$$

и $Q : \Sigma_2 \to \Sigma_1$

$$(\theta, \xi) \longmapsto (\theta - 2\pi, \xi).$$

Наличие непрерывной зависимости решений системы (2) от начальных данных и тот факт, что Σ_2 – множество без контакта, обеспечивает непрерывность преобразования T. Следовательно, непрерывен оператор QT. Легко показать, что множество $\Sigma_1 = \Psi \cup \Sigma$ является выпуклым. Поэтому, по известной теореме Брауэра [11] о неподвижной точке, существует точка u_0, обладающая свойством $QTu_0 = u_0$. Это означает, что

$$\theta(t(u_0), u_0) = \theta(0, u_0) + 2\pi, \qquad \xi(t(u_0), u_0) = \xi(0, u_0).$$

Следовательно, решение $u(t, u_0)$ системы (2) является предельным циклом второго рода.

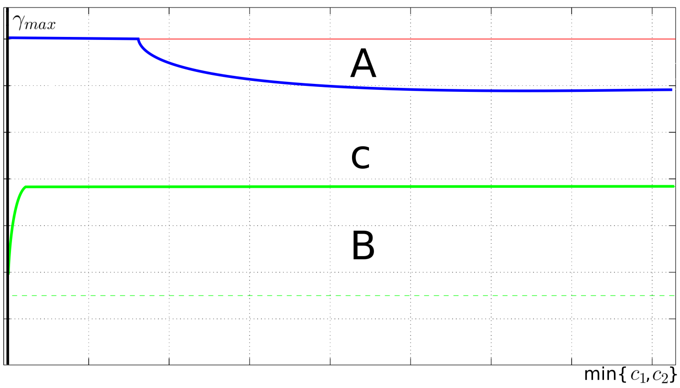

Рис. 2: Параметры $\gamma \in (0, \gamma_{max}]$, $c_1 \in (0, 20]$, $\gamma_{max} = 1$. A — область существования круговых решений и циклов второго рода; B — область допустимых нагрузок; C — область аналитически не изучена.

Численный анализ условий теорем 2 и 3 позволяют получить эффективные оценки областей существования круговых решений и циклов второго рода, область допустимых нагрузок.

Список литературы

[1] Леонов Г.А., Кондратьева Н.В. Анализ устойчивости электрических машин переменного тока. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009, 259 стр.

[2] Барбашин Е. А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969, 299 стр.

[3] Янко-Триницкий А.А. Новый метод анализа синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М.: ГЭИ, 1958, 104 стр.

[4] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978, 400 стр.

[5] Tricomi F. Sur une equation differetielle de l'electrotechnique // C.R. Acad. Sci. Paris. T. 193, 1931, 635-636 pp.

[6] Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentatasi in elettrotechnica // Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa Scienze Fisiche, Matematiche, Serie II, 1933, 1-20 pp.

[7] Ботвинник М.М. Регулирование возбуждения и статическая устойчивость синхронной машины. М.:Л.: ГЭИ, 1950. 59 стр.

[8] Веников В.А., Герценберг Г.Р., Совалов С.А., Соколов Н.И. Сильное регулирование возбуждения. М.:Л.: Госэнергоиздат, 1963. 152 стр.

[9] Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний. I. Многомерные аналоги уравнения Ван-Дер-Поля и динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1992, 366 стр.

[10] Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore, World Scientific, 1996, 498 pp.

[11] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. Московского ун-та, 1984. 296 стр.