ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

РЕГУЛИРОВАНИЕ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ФАЗНЫМ РОТОРОМ

Г.А. Леонов, Е.П. Соловьева

Аннотация

В работе предложена новая математическая модель, которая описывает динамику асинхронного двигателя с фазным ротором. Рассмотрена задача регулирования скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором посредством добавочного активного сопротивления. Для решения данной задачи применяется метод нелокального сведения.

Ключевые слова: асинхронные двигатели, фазный ротор, задача регулирования скорости вращения, метод нелокального сведения.

1. Введение

Механизмы, приводимые в движение асинхронными двигателями, часто должны работать с различными скоростями. Например, на металлообрабатывающих станках грубая обработка деталей ведется с малой скоростью, а чистовая обработка – со значительной скоростью. Регулирование скорости движения необходимо в установках электрической тяги (например, на электровозах), в подъемных устройствах и во многих других рабочих механизмах.

Одним из способов изменения скорости рабочих механизмов является регулирование скорости вращения асинхронных двигателей, приводящих их в движение. В результате возникает задача нахождения диапазона регулирования скорости вращения асинхронного двигателя.

В работе рассмотрен широко распространенный способ регулирования скорости асинхронного двигателя посредством добавочного активного сопротивления. Данный способ применим только для асинхронных двигателей с фазным ротором благодаря возможности включения регулирующего устройства – реостата в цепь ротора. Предполагается, что регулирование скорости вращения двигателя производится при постоянной нагрузке.

Для решения задачи регулирования скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором применяется метод нелокального сведения [1-3].

2. Математическая модель

Рассмотрим электромеханическую модель асинхронного двигателя с фазным ротором. Обмотку фазного ротора можно представить в виде трех катушек, размещенных в пазах ротора под углом $120°$ друг относительно друга и соединенных внутри ротора по схеме звезды. Оставшиеся свободными три конца обмотки присоединяют к кольцам. Через кольца и щетки обмотка ротора замыкается на трехфазный реостат, играющий роль добавочного активного сопротивления.

Сделаем следующие предположения, которые позволят нам записать дифференциальные уравнения асинхронного двигателя с фазным ротором:

1. магнитную проницаемость материала, из которого выполнены статор и ротор, будем считать равной бесконечности;
2. будем пренебрегать насыщением, потерями в материале, взаимной индукцией, обусловленной токами, протекающими в витках обмотки;
3. электромагнитные процессы в обмотках ротора не влияют на токи в обмотках статора, то есть вектор напряженности магнитного поля является постоянным по величине и вращается с постоянной угловой скоростью.

При сделанных предположениях динамика рассматриваемого асинхронного двигателя определяется динамикой его ротора.

Будем рассматривать движение ротора во вращающейся системе координат, жестко связанной с вектором магнитной индукции B. Используя законы Кирхгофа и уравнение движения ротора относительно вращающегося магнитного поля, получим систему дифференциальных уравнений асинхронного двигателя с фазным ротором:

$$
\begin{aligned}
&L\dot{i}_1 + (R+r)\,i_1 = -2nSB\cos(\theta)\;\dot{\theta},\\
&L\dot{i}_2 + (R+r)\,i_2 = -2nSB\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\;\dot{\theta},\\
&L\dot{i}_3 + (R+r)\,i_3 = -2nSB\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})\;\dot{\theta}\\
&J\ddot{\theta} = 2nSB\big(\cos\theta\;i_1 + \cos(\theta+\frac{\pi}{3})\;i_2 + \cos(\theta+\frac{2\pi}{3})\;i_3\big) - M,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где n – количество витков в одной катушке; S – площадь одного витка; R – сопротивление; r – добавочное активное сопротивление; L – индуктивность; i_1, i_2, i_3 – токи; θ – угол между плоскостью витков катушки с током i_1 и плоскостью, перпендикулярной к вектору магнитной индукции B; J – момент инерции ротора; M – момент нагрузки.

После невырожденного преобразования координат

$$
s = \dot{\theta}, \qquad x = \frac{1}{3}\frac{L}{nSB}(\cos\theta\, i_1 + \cos(\theta+\frac{\pi}{3})i_2 + \cos(\theta+\frac{2\pi}{3})i_3),
$$

$$
y = \frac{1}{3}\frac{L}{nSB}(\sin\theta\, i_1 + \sin(\theta+\frac{\pi}{3})i_2 + \sin(\theta+\frac{2\pi}{3})i_3), \qquad z = i_1 + i_3 - i_2,
$$

система (1) может быть преобразована к следующему виду

$$
\begin{aligned}
&\dot{\theta} = s,\\
&\dot{s} = ay + \gamma,\\
&\dot{x} = -cx + ys,\\
&\dot{y} = -cy - xs - s,\\
&\dot{z} = -cz,
\end{aligned}
$$

где $a = 6\frac{(nSB)^2}{JL}$, $\gamma = \frac{M}{J}$, $c = \frac{R+r}{L}$. Первое и последнее уравнения могут быть проинтегрированы независимо от остальной системы, следовательно, достаточно рассматривать систему

$$
\begin{aligned}
&\dot{s} = ay + \gamma,\\
&\dot{x} = -cx + ys,\\
&\dot{y} = -cy - xs - s.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

3. Задача регулирования скорости вращения асинхронного двигателя

Сформулируем задачу регулирования скорости вращения двигателя [] для системы уравнений (2) асинхронного двигателя с фазным ротором.

Предположим, что установившемуся режиму работы рассматриваемого двигателя под нагрузкой соответствует устойчивое состояние равновесия системы (2): $s = s_0 = \frac{c\left(a-\sqrt{a^2-4\gamma^2}\right)}{2\gamma}$, $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$, $y = -\frac{\gamma}{a}$. Далее в некоторый момент времени τ происходит изменение добавочного активного сопротивления. Новое устойчивое состояние равновесия имеет вид $s = \widehat{s}_0 = \frac{\widehat{c}\left(a-\sqrt{a^2-4\gamma^2}\right)}{2\gamma}$, $x = -\frac{\gamma \widehat{s}_0}{a\widehat{c}}$, $y = -\frac{\gamma}{a}$,

Математическая постановка задачи регулирования скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором при фиксированной нагрузке следующая: найти условия, при которых решение системы (2) $x(t)$, $y(t)$, $s(t)$ с начальными данными $s = s_0 < c$, $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$, $y = -\frac{\gamma}{a}$ находилось бы в области притяжения стационарного решения $s = \widehat{s}_0 < \widehat{c}, x = -\frac{\gamma \widehat{s}_0}{a\widehat{c}}$, $y = -\frac{\gamma}{a}$, , т.е. должны быть выполнены соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \widehat{s}_0, \lim_{t\to+\infty} x(t) = -\frac{\gamma \widehat{s}_0}{a\widehat{c}}, \lim_{t\to+\infty} y(t) = -\frac{\gamma}{a}. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\rho = \frac{\widehat{c}}{c},$$

$$\widehat{s}_1 = \frac{\widehat{c}\left(a+\sqrt{a^2-4\gamma^2}\right)}{2\gamma},$$

$$\psi(s) = -\frac{\gamma}{\widehat{c}}s^2 + as - \widehat{c}\gamma,$$

$$\Gamma = 2\max_{\lambda\in(0,\widehat{c})}\left[\lambda\left(\widehat{c} - \lambda - \frac{\gamma^2}{4\widehat{c}^2(\widehat{c}-\lambda)}\right)\right]^{1/2}.$$

Теорема 1 *Пусть $\gamma < 2\widehat{c}^2$, $s_0 < \widehat{s}_1$ и для решения уравнения*

$$F(s)F'(s) = -\Gamma F(s) - \psi(s), \tag{4}$$

с начальными данными $F(\widehat{s}_1) = 0$ выполнено условие

$$2F(s_0) > (a - \sqrt{a^2-4\gamma^2})|1 - \frac{1}{\rho}|. \tag{5}$$

Тогда решение системы (2) с начальными данными $s = s_0$, $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$, $y = -\frac{\gamma}{a}$ удовлетворяет соотношениям (3).

Доказательство. Замена переменных

$$\eta = ay + \gamma, \quad z = -x - \frac{\gamma}{a\widehat{c}}s$$

приводит систему (2) к виду

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= -\widehat{c}\eta + azs - \psi(s), \\ \dot{z} &= -\widehat{c}z - \frac{1}{a}s\eta - \frac{\gamma}{a\widehat{c}}\eta \end{aligned} \tag{6}$$

и переводит начальные данные $s = s_0, x = -\frac{\gamma s_0}{ac}, y = -\frac{\gamma}{a}$ системы (2) в начальные данные $s = s_0, \eta = 0, z = -(1 - \frac{1}{\rho})\frac{\gamma s_0}{ac}$ новой системы.

При условии $0 < \gamma < a/2$ стационарное множество системы (6) состоит из двух точек: асимптотически устойчивой $(s = \widehat{s}_0,\ \eta = 0,\ z = 0)$ и неустойчивой $(s = \widehat{s}_1,\ \eta = 0,\ z = 0)$. Тогда для новой системы (6) соотношения (3) примут следующий вид

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \widehat{s}_0, \lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} z(t) = 0. \tag{7}$$

Введём функции

$$W(s,\eta,z) = \frac{a^2}{2}z^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}F^2(s),$$

$$V(s,\eta,z) = \frac{a^2}{2}z^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \int\limits_{s_1}^{s} \psi(s)ds.$$

Для функций $W(s,\eta,z), V(s,\eta,z)$ на решениях системы (6) при выполнении $\gamma < 2\widehat{c}^2$ имеем соотношения

$$\dot{W}(s,\eta,z) + 2\lambda W(s,\eta,z) = -\widehat{c}\eta^2 - \tfrac{a\gamma}{\widehat{c}}\eta z - a^2\widehat{c}z^2 - F'(s)F(s)\eta -$$

$$-\psi(s)\eta + \lambda a^2 z^2 + \lambda\eta^2 - \lambda F(s)^2 \le (\widehat{c} - \lambda - \tfrac{\gamma^2}{4\widehat{c}^2(\widehat{c}-\lambda)})\eta^2 - \lambda F(s)^2 - \tag{8}$$

$$-(F'(s)F(s) + \psi(s))\eta = -((\widehat{c} - \lambda - \tfrac{\gamma^2}{4\widehat{c}^2(\widehat{c}-\lambda})^{\frac{1}{2}}\eta - \lambda^{\frac{1}{2}}F(s))^2 \le 0,$$

$$\dot{V}(s,\eta,z) = -\widehat{c}a^2z^2 - \frac{a\gamma}{\widehat{c}}\eta z - \widehat{c}\eta^2 = -(\frac{\gamma}{2\widehat{c}\sqrt{\widehat{c}}}\eta + \sqrt{\widehat{c}}az)^2 - (\widehat{c} - \frac{\gamma^2}{4c^3})\eta^2 \le 0. \tag{9}$$

В силу (5) уравнение (4) либо имеет решение $F(s)$ такое, что

$$F(s_2) = F(\widehat{s}_1) = 0, \quad s_2 < \widehat{s}_0,$$

$$F(s) > 0, \quad \forall s \in (s_2, \widehat{s}_1);$$

либо решение F такое, что

$$F(s) > 0, \quad \forall s \in (-\infty, \widehat{s}_1).$$

Из соотношений (8), (9) следует положительная инвариантность множеств

$$\Omega = \{W(s, \eta, z) < 0, \quad s \in [s_2, \widehat{s}_1]\},$$
$$\Omega_1 = \{W(s, \eta, z) < 0, \quad s \in (-\infty, \widehat{s}_1]\},$$
$$\Omega_2 = \{V(s, \eta, z) < C\},$$
$$\Omega_* = \Omega_1 \cap \Omega_2,$$

где

$$C > \max\{\frac{1}{8}(1 - \frac{1}{\rho})^2(a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})^2 + \int\limits_{s_0}^{\widehat{s}_1} \psi(s)ds, 0\}. \qquad (10)$$

Из условия (5), следует

$$W(s_0, 0, -(1 - \frac{1}{\rho})\frac{\gamma s_0}{ac}) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\rho})^2(a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})^2 - F^2(s_0)\Big] < 0,$$

Таким образом точки $(s_0, 0, -(1 - \frac{1}{\rho})\frac{\gamma s_0}{ac})$ и $(\widehat{s}_0, 0, 0)$ принадлежат Ω и Ω_1.

Из условия (10) следует, что Ω_2 содержит $(s_0, 0, -(1 - \frac{1}{\rho})\frac{\gamma s_0}{ac})$. Следовательно Ω содержит точку $(s_0, 0, -(1 - \frac{1}{\rho})\frac{\gamma s_0}{ac})$.

Пусть $x(t) = (s(t), \eta(t), z(t))$ – ограниченное при $t \geq 0$ решение системы (6). Тогда функция $V(x(t))$ тоже ограничена при $t \geq 0$.

При условии $\gamma < 2\widehat{c}^2$ в силу критерия Сильвестра квадратичная форма от η и z в правой части (9) является определенно отрицательной. Поэтому из (9) следует, что функция $V(s(t), \eta(t), z(t))$ не возрастает по t при $t \geq 0$. Отсюда и из ограниченности функции $V(s(t), \eta(t), z(t))$ при $t \geq 0$ следует существование конечного $\lim\limits_{t\to+\infty} V(s(t), \eta(t), z(t)) = L$.

Из ограниченности траектории $x(t)$ следует, что множество Ω_0 ее ω-предельных точек не пусто. Пусть $y \in \Omega_0$. Тогда в силу инвариантности

Ω_0 траектория, выпущенная из точки y, при всех $t \in R^1$ расположена в Ω_0. Поэтому при всех $t \in R^1$

$$V(s(t,y), \eta(t,y), z(t,y)) \equiv L.$$

Используя оценку (9), получим тождества $\eta(t,y) \equiv 0$ и $z(t,y) \equiv 0$. Из (6) и (9) получаем, что $\dot{s}(t,y) \equiv 0$. Следовательно, $s(t,y) \equiv const$ и множество Ω_0 является подмножеством стационарного множества системы (6).

Таким образом, любое ограниченное решение системы (6) стремится к состоянию равновесия. Отсюда, из ограниченности и положительной инвариантности множеств Ω и Ω_* и из включений

$$(s_0, 0, -(1-\frac{1}{\rho})\frac{\gamma s_0}{ac}) \in \Omega, \quad (\widehat{s}_0, 0, 0) \in \Omega.$$

$$(s_0, 0, -(1-\frac{1}{\rho})\frac{\gamma s_0}{ac}) \in \Omega_*, \quad (\widehat{s}_0, 0, 0) \in \Omega_*.$$

следует (7).

Следующее следствие позволяет получить диапазон регулирования скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором.

Следствие 1 *Если $\gamma < 2\widehat{c}^2$, $s_0 < \widehat{s}_1$ и выполнены следующие неравенства*

$$2 \max_{\lambda \in (0,\widehat{c})} \left[\lambda\left(\widehat{c} - \lambda - \frac{\gamma^2}{4\widehat{c}^2(\widehat{c}-\lambda)}\right)\right]^{1/2} > \frac{\gamma}{\widehat{c}}, \tag{11}$$

$$\rho > 1 - \frac{\sqrt{a^2 - 4\gamma^2}}{a}, \tag{12}$$

то решение системы (2) с начальными данными $s = s_0$, $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$, $y = -\frac{\gamma}{a}$ удовлетворяет соотношениям (3).

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(s)F'(s) = -\Gamma F(s) - \psi(s)$$

с начальными данными $F(\widehat{s}_1) = 0$. В [11] была получена оценка для решения этого уравнения $F(s)$ при $s \in (0, \widehat{s}_1)$

$$F(s) > \Gamma(\widehat{s}_1 - s).$$

Таким образом, условие (5) теоремы 1 выполнено, если

$$4\Gamma^2(\widehat{s}_1 - s_0)^2 > \left(a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^2. \tag{13}$$

Используя равенство $c = \frac{1}{\rho}\widehat{c}$, получим

$$4\Gamma^2(\widehat{s}_1 - s_0)^2 = 4\Gamma^2\left[\tfrac{\widehat{c}(a+\sqrt{a^2-4\gamma^2})}{2\gamma} - \tfrac{\frac{1}{\rho}\widehat{c}(a-\sqrt{a^2-4\gamma^2})}{2\gamma}\right]^2 =$$
$$= \Gamma^2\tfrac{\widehat{c}^2}{\gamma^2}\left[(1-\tfrac{1}{\rho})(a-\sqrt{a^2-\gamma^2}) + 2\sqrt{a^2-\gamma^2}\right]^2 =$$
$$= \Gamma^2\tfrac{\widehat{c}^2}{\gamma^2}\Big[(1-\tfrac{1}{\rho})^2(a-\sqrt{a^2-\gamma^2})^2 + 4(1-\tfrac{1}{\rho})(a-\sqrt{a^2-\gamma^2})\sqrt{a^2-\gamma^2}+$$
$$+4(a^2-\gamma^2)\Big].$$

Если выполнены следующие условия

$$(a^2-\gamma^2) > (\frac{1}{\rho}-1)(a-\sqrt{a^2-\gamma^2})\sqrt{a^2-\gamma^2}, \qquad (14)$$

$$\Gamma^2\frac{\widehat{c}^2}{\gamma^2}(1-\frac{1}{\rho})^2(a-\sqrt{a^2-\gamma^2})^2 > \big(a-\sqrt{a^2-4\gamma^2}\big)^2\big(1-\frac{1}{\rho}\big)^2, \qquad (15)$$

то выполнено и (13). Нетрудно проверить, что условия (14) и (15) эквивалентны условиям (11), (12).

Список литературы

1. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.* М.: Наука, 1978. 400 с.

2. Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B. *Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems.* Stuttgart-Leipzig, Teubner VerlagsgesellSchaft, 1992. 242 p.

3. Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh. *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities.* Singapore: World Scientific, 2004. 334 p.

4. Важнов А.И. *Электрические машины.* Л.: Энегрия, 1969. 768 с.

5. Marino R., Tomei P., Verrelli C.M. *Induction motor control design.* Springer, 2010. 349 p.

6. Барбашин Е.А., Табуева В.А. *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством.* М.: Наука, 1969. 299 с.