

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2013

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Леонов Г.А., Бузова И.Г., Александров К.Д.

**Визуализация четырех предельных циклов  
двумерных квадратичных систем  
в пространстве параметров<sup>1</sup>**

*Математико-механический факультет Санкт-Петербургского  
государственного университета*

*Университетский проспект, 28, 198504, Петергоф, Старый Петергоф,  
Россия*

В 1900 году Д. Гильберт поставил задачу исследования предельных циклов в двумерных квадратичных системах (см. [1, 5, 10, 35, 36]). В пятидесятых годах А. Н. Колмогоров, говоря современным языком, поставил задачу визуализации этих циклов. В своей книге [4] В. И. Арнольд пишет: "Чтобы оценить число предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости, А. Н. Колмогоров раздал несколько сотен таких полей (со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени) нескольким сотням студентов механико-математического факультета МГУ в качестве математического практикума. Каждый студент должен был найти число предельных циклов своего поля. Результат этого эксперимента был совершенно неожиданным: ни у одного поля не оказалось ни одного предельного цикла! При малом изменении коэффициентов поля предельный цикл сохраняется. Поэтому системы с одним, двумя, тремя (и даже, как стало известно позже, четырьмя)

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, Санкт-Петербургского государственного университета и Российского фонда фундаментальных исследований.

предельными циклами образуют в пространстве коэффициентов открытые множества, так что вероятности попасть в них при случайном выборе коэффициентов многочленов положительны. Тот факт, что этого не случилось, подсказывает, что упомянутые вероятности, по-видимому, малы".

Во второй половине двадцатого века появилось большое число работ [2, 3, 5, 11, 12, 30, 35, 38, 44, 45], где использовались методы теории возмущений для доказательства существования предельных циклов в двумерных квадратичных системах. Однако эти методы не позволяли решить проблему визуализации: полученные таким образом циклы были очень малых размеров и не могли быть вычислены с помощью численных методов и современной компьютерной технологии [22, 24, 31].

Результаты в [9, 13–16, 18–20, 25] позволили решить проблему визуализации четырех предельных циклов. Дальнейшее развитие этого направления имеется в [8, 23, 26–29].

**1. Аналитические результаты.** В настоящей работе продолжено решение проблемы визуализации четырех предельных циклов и построены области в пространстве параметров, которые соответствуют существованию четырех предельных циклов.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + \alpha_1x + \beta_1y \\ \dot{y} &= a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \alpha_2x + \beta_2y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i$  — вещественные числа,  $i = 1, 2$ .

В работах [16, 20] показано, что не умаляя общности, можно принять, что коэффициенты системы (1) имеют вид

$$c_1 = \alpha_1 = 0, \quad a_1 = b_1 = \beta_1 = 1 \quad (2)$$

и, таким образом, можно ограничиться рассмотрением систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + xy + y \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью применения метода асимптотического интегрирования, описанного в работах [17, 18, 21], к системе Лъенара, полученной из квадратичной системы, был сформулирован и доказан следующий критерий существования предельных циклов в квадратичных системах (см. [20]).

**Теорема 1.** Система (3) имеет три предельных цикла, если выполнены следующие условия:

$\beta = 0$ ,  $c \in (\frac{1}{3}, 1)$ ,  $b < 3$ ,  $2c \leq b + 1$ ,  $4a(c - 1) > (b - 1)^2$ , и а) если  $bc < 1$ , то  $\alpha = -\varepsilon^{-1}$ , где  $1 \gg \varepsilon > 0$ ; б) если  $bc > 1$ , то  $\frac{a(2+b)}{bc-1} < \alpha < 0$ .

Кроме того, один "малый" предельный цикл может быть получен вокруг начала координат, путем возмущения параметра  $\beta$ .

С помощью данного критерия в работах [8, 23] впервые была произведена визуализация четырех предельных циклов. Исследования, проведенные в данной работе отталкивались от теоремы 1.

В данной статье для квадратичной системы (3) построены области, содержащие четыре предельных цикла, в трехмерном и двумерном пространстве параметров, удовлетворяющих условию а) теоремы 1.

Алгоритм построения областей в пространстве параметров  $a, b, c$ , которые соответствуют существованию четырех предельных циклов "нормальных размеров" у системы (3), заключается в следующем. Сначала с помощью условия а) теоремы 1 находим точку  $a_0, b_0, c_0, \alpha_0, \beta_0$  ( $|\alpha_0|$  — достаточно большое,  $\beta_0$  — достаточно малое) в пространстве параметров, соответствующую системе с четырьмя предельными циклами. Далее вокруг полученной точки, путем варьирования параметров  $a, b, c$ , выделяем область, соответствующую четырем предельным циклам. Отметим, что теорема 1 носит асимптотический характер, поэтому полученная область может охватывать более широкое множество параметров, чем указано в теореме 1. Более подробно процесс определения границы области описан в п.3.

Нетрудно видеть, что система (3) имеет две точки равновесия: одну в начале координат, а другую — в левой полуплоскости. Так как вокруг второй точки равновесия в условиях теоремы 1 всегда существует предельный цикл, то рассмотрим, как организовать вычисления для поиска трех предельных циклов, окружающих нулевую точку равновесия.

Выберем и зафиксируем набор коэффициентов  $a_0, b_0, c_0, \alpha_0, \beta_0$  квадратичной системы, удовлетворяющих критерию теоремы 1.

Будем решать задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + xy + y \\ \dot{y} &= a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2 + \alpha_0x + \beta_0y, \end{aligned}$$

$$t_0 = 0, t \in [0, T], x(t_0) = x_0 \in (0, \tilde{X}], y(t_0) = 0, T < +\infty, \tilde{X} < +\infty.$$

Вычисления будем проводить в системе MATLAB и MAPLE. Как известно, для проверки достоверности результатов, полученных численными методами, следует рассмотреть линеаризованную систему (3) и вычислять соб-

ственные числа матрицы Якоби в начальной точке задачи Коши и в точках построенной траектории фазового пространства. Траектория решения в фазовом пространстве выходит из точки  $(X_0, 0)$ ,  $X_0 > 0$  (см.рис.1) и окружает нулевую точку равновесия. Как показывают вычисления, при значениях параметров системы, удовлетворяющих критерию а) теоремы 1, вещественные части собственных чисел оказываются отрицательными на траектории фазового пространства в левой полуплоскости и положительными на траектории в правой полуплоскости, при этом модули собственных чисел в ряде случаев часто оказываются очень велики. В этом случае, как будет отмечено в п.6, обычно применяют методы, пригодные для решения "жестких" систем, либо вычисления проводят разными численными методами с увеличенным количеством знаков в мантиссе. Будем проводить вычисления с помощью команд пакета, встроенного в систему MATLAB 2012 и предоставляющим возможность решать задачу Коши методом Гира и, для сравнения, проводим повторные вычисления методом Рунге-Кутта четвертого порядка с постоянным и автоматическим выбором шага в среде MAPLE 13 меняя количество знаков в мантиссе.

Далее для поиска предельных циклов будем строить амплитудную кривую.

**2. Построение амплитудной кривой.** Рассмотрим поведение траектории решения задачи Коши в фазовом пространстве переменных  $x, y$ . Нетрудно видеть, что траектория, выпущенная из точки  $(X_0, 0)$ , пересекает ось  $x$  сначала в некоторой точке  $(X_1, 0)$ , а затем в точке  $(X_2, 0)$ .

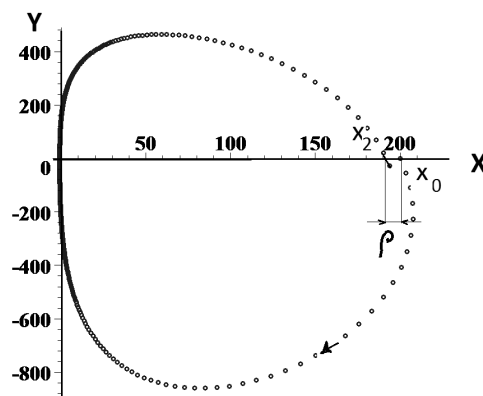


Рис. 1. Виток закручивающейся спирали

Обозначим через  $\rho = X_2 - X_0$ . Очевидно  $\rho > 0$  соответствует траектории в виде раскручивающейся спирали, а  $\rho < 0$  — закручивающейся спирали. Случай  $\rho = 0$  означает наличие цикла (см. рис. 1).

Введем функцию  $\mathcal{A}(\rho)$ , которую будем называть амплитудной функцией. Построим на  $(0, \tilde{X}]$  достаточно мелкую сетку узлов  $\{x_k\}$ . Выпускаем траекторию из точки  $(x_k, 0)$ . Находим  $X_2 = x_{k0}$ . Строим график  $\mathcal{A}(\rho_k)$ ,  $\rho_k = x_k - x_{k0}$  и находим промежутки на оси  $x$ , на которых эта функция положительна и отрицательна. Точки перемены знака, очевидно, соответствуют наличию цикла.

На рис. 2а показан один цикл, на рис. 2б — возникновение двух дополнительных циклов при изменении коэффициентов.

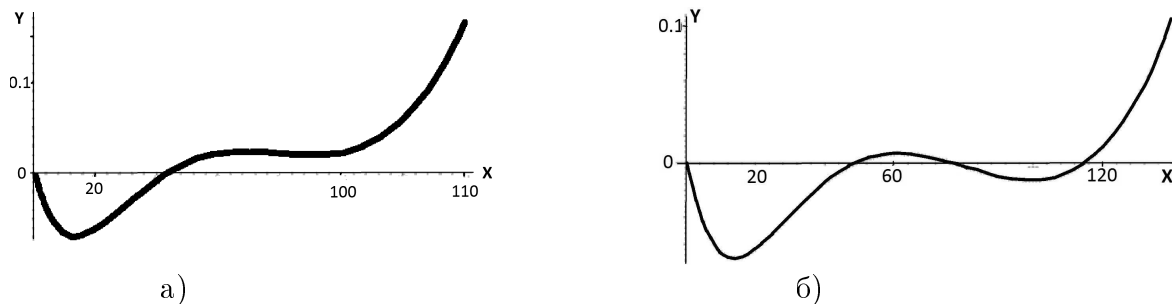


Рис. 2. Визуализация циклов методом Рунге-Кутта при значениях коэффициентов

- а) один цикл,  $b = 1.925, a = -10.5, c = 0.4, \alpha = -2012, \beta = 0.2$ ;  
 б) три цикла,  $b = 1.927, a = -10.5, c = 0.4, \alpha = -2012, \beta = 0.2$ ;

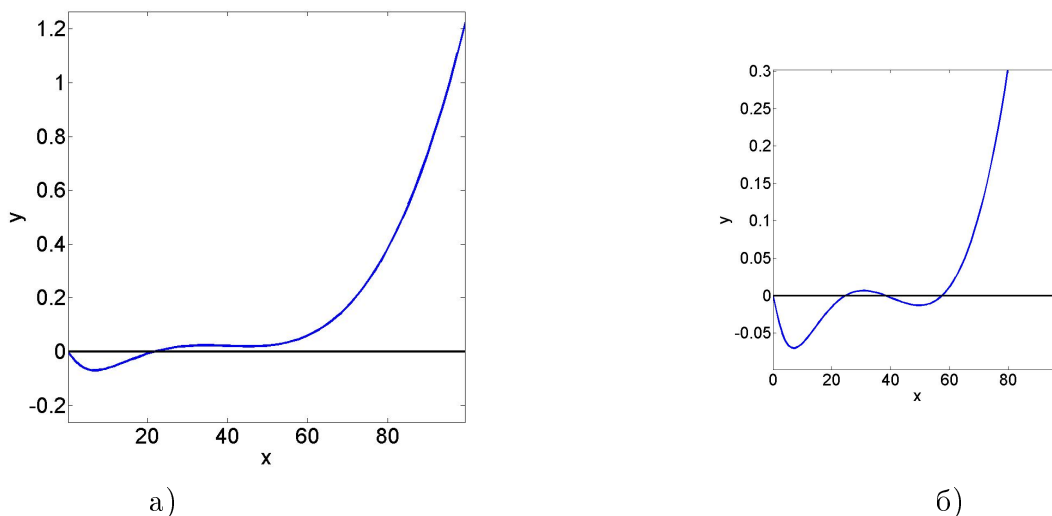


Рис. 3. Визуализация циклов методом Гира при значениях коэффициентов

- а) один цикл,  $b = 1.925, a = -10.5, c = 0.4, \alpha = -2012, \beta = 0.2$ ;  
 б) три цикла,  $b = 1.927, a = -10.5, c = 0.4, \alpha = -2012, \beta = 0.2$ ;

Ранее было отмечено, что с вычислительной стороны решение рассматриваемой задачи Коши при положительных вещественных частях собственных чисел матрицы Якоби системы (3) является неустойчивым. На рис. 4а показано катастрофическое нарастание погрешностей при решении задачи Коши методом Рунге-Кутта с постоянным шагом и вполне удовлетворительное решение, полученное методом Гира в среде MATLAB. (см.рис. 4б). Нарастание погрешностей связано с положительной вещественной частью и очень большой мнимой частью (несколько тысяч) собственных чисел матрицы Якоби линеаризованной системы.

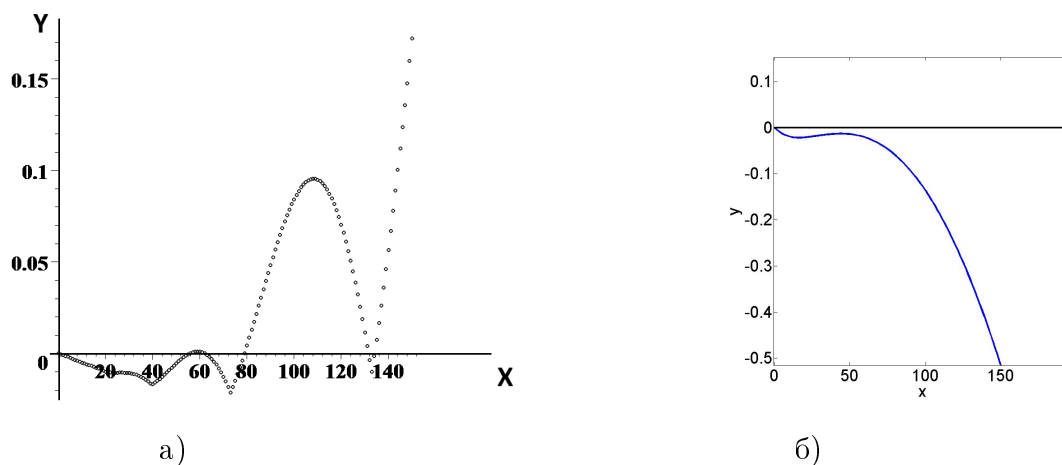


Рис. 4. а) Катастрофическое накопление погрешностей в процессе решения методом Рунге-Кутта с постоянным шагом, б) решение, полученное методом Гира с автоматическим выбором шага

Для иллюстрации неустойчивости вычислений приведем вид амплитудной кривой, полученной методом Рунге-Кутта четвертого порядка квадратичной системы (3) с коэффициентами  $b = 1.4$ ,  $a = -8.0$ ,  $c = 0.4$ ,  $\alpha = -1150000$ ,  $\beta = 0.59$  в среде Maple 13 с 35 знаками в мантиссе (рис. 4).

Неустойчивость вычислений обусловлена положительными вещественными частями собственных чисел матрицы Якоби для линеаризованной системы (см. табл. 1, 2 в разделе 6). Поэтому уместно вести вычисления в системе MAPLE с большим количеством знаков в мантиссе. В ряде случаев достаточно использовать библиотечные функции из MATLAB. Во всех случаях предпочтение отдается неявным численным методам решения задачи Коши, хорошо зарекомендовавшим себя при решении жестких задач, например, методу Гира.

**3. Алгоритм определения области, соответствующей четырем предельным циклам.** Возьмем набор коэффициентов  $a_0, b_0, c_0, \alpha_0, \beta_0$  для

системы (3), удовлетворяющий теореме 1. Проверяем, с помощью вычислений, что амплитудная кривая три раза пересекает ось  $x$ , что равносильно наличию трех циклов в фазовом пространстве. Рассматриваемый набор  $a_0, b_0, c_0$  образует точку в трехмерном пространстве параметров  $a, b, c$ . Для удобства вычислений построим равномерную сетку узлов с шагом  $h_a, h_b, h_c$  по соответствующему направлению  $a, b, c$ . Варьируя значения коэффициентов, т.е. вычисляя при разных целых значениях  $i, j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , коэффициенты  $a_i = a_0 + h_a i, b_k = b_0 + h_b k, c_j = c_0 + h_c j$  при фиксированных  $\alpha, \beta$  и проверяя, что соответствующие амплитудные кривые три раза пересекают ось  $x$ , получим множество коэффициентов квадратичной системы, при которых существуют три цикла в фазовом пространстве. Рассматривая коэффициенты  $a_i, b_k, c_j$ , как координаты точки в трехмерном пространстве параметров  $a, b, c$ , получаем геометрическое множество точек, формирующее область существования трех циклов в фазовом пространстве вокруг нулевой точки равновесия. Продолжая процесс решения задачи Коши для каждой системы уравнений, задаваемых коэффициентами  $a_i, b_k, c_j$ , построим в трехмерном пространстве параметров  $a, b, c$  на крупной сетке множество точек, представляющую область, содержащую три цикла. Далее на более мелкой сетке узлов вдоль границы области уточним очертания области.

В плоскости  $(c, a)$  рассмотрим сечения искомой области. По переменным  $c, a$  построим равномерные сетки узлов с шагами  $h$  и  $h_a$  соответственно. Для краткости границу  $K$  сечения  $D$  в дальнейшем будем именовать контуром. Точки на контуре упорядочим, нумеруя их слева направо.

1) Возьмем произвольную точку  $B_0$  контура  $K$ , предыдущую ей точку  $A$  (слева на контуре, отличную от  $B_0$ ) и следующую за ней точку  $C$  (справа от  $B_0$ , отличную от нее), см. рис. 5.1.

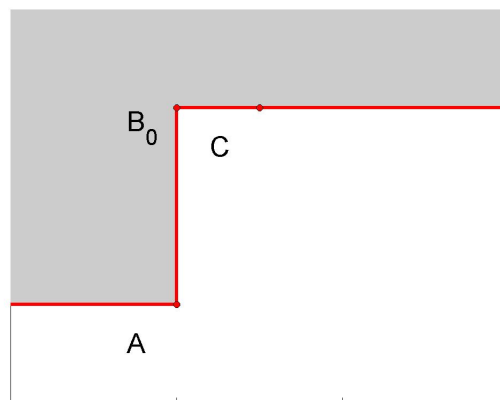


Рис. 5.1.

2) Преобразуем координаты точек  $A$ ,  $B_0$ ,  $C$  так, что  $B_0 = (c_{B_0}, a_{B_0})$  перейдет в точку  $B'_0 = (\frac{c_{B_0}}{h_c}, \frac{a_{B_0}}{h_a})$ , точка  $A$  в  $A'$ , точка  $C$  в  $C'$  соответственно (см. рис. 5.2).

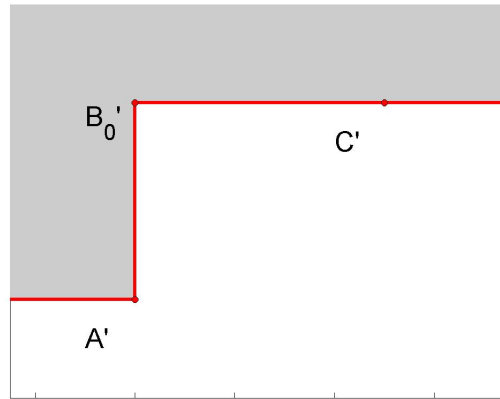


Рис. 5.2.

3) Далее выберем точку  $D'_0$  (см. рис. 5.3) по следующему правилу: если  $\overrightarrow{B'_0A'} \not\parallel \overrightarrow{B'_0C'}$ , то

$$B'_0\vec{D}'_0 = (\overrightarrow{B'_0A'} + \overrightarrow{A'C'} \cdot \frac{|\overrightarrow{A'B}'_0|}{|\overrightarrow{B'_0C}'| + |\overrightarrow{A'B}'_0|}) \cdot \text{sign}(\vec{e} \cdot (\overrightarrow{B'_0A'} \times \overrightarrow{B'_0C}')) \quad (4)$$

где  $\vec{e} = \{1, 0, 0\}$ ;

$$\text{если } \overrightarrow{B'_0A'} \parallel \overrightarrow{B'_0C}', \text{ то } B'_0\vec{D}'_0 = \frac{\overrightarrow{B'_0A'} \times \vec{e}}{|\overrightarrow{B'_0A'}|}. \quad (5)$$

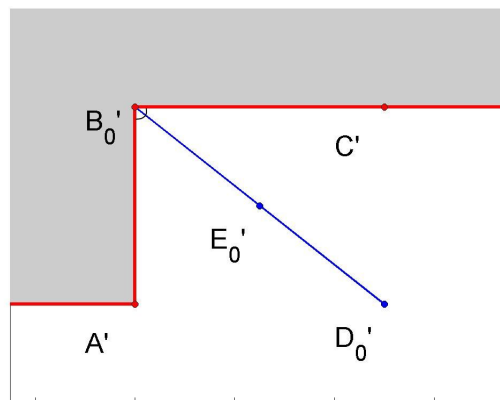


Рис. 5.3.



4) Преобразуем координаты точек  $A, B_0, C, D_0$  в исходное состояние так, чтобы точка  $D'_0$  перешла в  $D_0$ .

5) Для полученного отрезка  $B_0D_0$ , находящегося в пространстве параметров  $(b, c, a)$ , произведем вычисление числа предельных циклов для динамической системы (3) с коэффициентами  $(b, \frac{c_{B_0}+c_{D_0}}{2}, \frac{a_{B_0}+a_{D_0}}{2}, \alpha, \beta)$  (соответствующими середине отрезка — точке  $E_0$ ).

6) Если вычисления указывают, что полученная на шаге 5 система имеет три предельных цикла, то переобозначим точки следующим образом:

$$D_1 = D_0, \quad B_1 = E_0. \quad (6)$$

Если же система имеет меньшее число предельных циклов, то переобозначим точки другим способом:

$$D_1 = E_0, \quad B_1 = B_0. \quad (7)$$

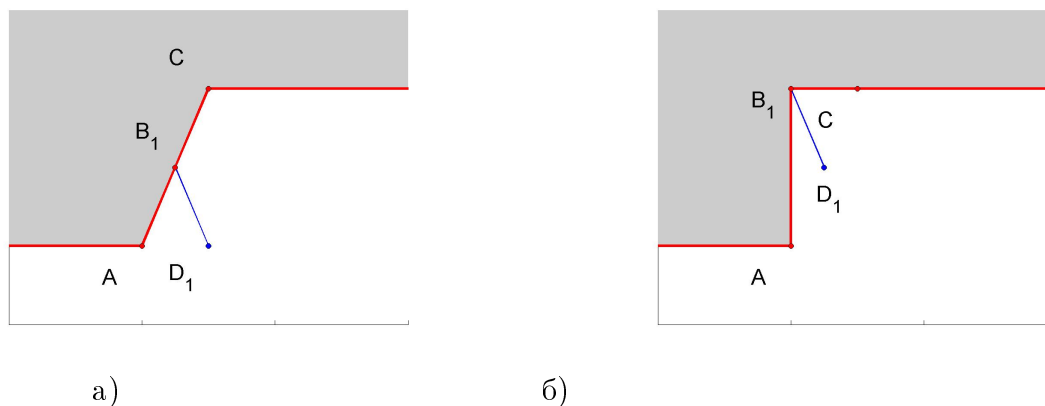


Рис. 5.4.

- а) три предельных цикла
- б) менее трех предельных циклов

На этом вычисление границы контура в точке  $B_0$  завершена.

Повторяя вышеописанную процедуру для отрезка  $B_1D_1$   $k$  раз, получаем последовательность точек  $B_i, \quad i = 1, \dots, k + 1$ . Эта последовательность сходится к точке границы контура  $K$ . Стоит отметить, что вектор  $\overrightarrow{B'_0D'_0}$ , заданный в п.3, получен из вектора, соединяющего точку  $B'_0$  и точку пересечения биссектрисы  $\triangle A'B'_0C'$ , выпущенной из точки  $B'_0$ , со стороной  $A'C'$ . Вектор  $\overrightarrow{B'_0D'_0}$  получен растяжением в два раза и выбором знака "плюс" или "минус" так, чтобы точка  $D'_0$  находилась вне контура сечения.

Согласно критериям, сформулированным в работе [20], вокруг ненулевой точки равновесия существует предельный цикл при выполнении условий теоремы 1. Таким образом, полученная область в трехмерном пространстве соответствует множеству коэффициентов, при котором квадратичная система имеет четыре предельных цикла.

**4. Алгоритм вычисления  $(X_2, 0)$ .** Пусть  $t_j = j\tau$ ,  $\tau > 0$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Вычисления проводим методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Для ускорения вычисления точки пересечения траектории с осью  $x$  можно использовать алгоритм приближенного построения (с точностью  $O(\tau^4)$ ) траектории при переходе от первого ко второму витку. Если вычислены значения функции  $y$  в точках  $x_{m-2} = x(t_{m-2})$ ,  $x_{m-1} = x(t_{m-1})$ ,  $x_m = x(t_m)$ ,  $x_{m+1} = x(t_{m+1})$ , причем  $y_m = y(x_m) > 0$ ,  $y_{m+1} = y(x_{m+1}) < 0$ , то на промежутке  $[t_m, t_{m+1}]$  можно построить кубический многочлен

$$y(t) = y(t_{m-2})W_{m-2}(t) + y(t_{m-1})W_{m-1}(t) + y(t_m)W_m(t) + y(t_{m+1})W_{m+1}(t),$$

где

$$\begin{aligned} W_{m+1}(t) &= \frac{(t - t_{m-2})(t - t_{m-1})(t - t_m)}{(t_{m+1} - t_{m-2})(t_{m+1} - t_{m-1})(t_{m+1} - t_m)}, \\ W_m(t) &= \frac{(t - t_{m-2})(t - t_{m-1})(t - t_{m+1})}{(t_m - t_{m-2})(t_m - t_{m-1})(t_m - t_{m+1})}, \\ W_{m-1}(t) &= \frac{(t - t_{m-2})(t - t_m)(t - t_{m+1})}{(t_{m-1} - t_{m-2})(t_{m-1} - t_m)(t_{m-1} - t_{m+1})}, \\ W_{m-2}(t) &= \frac{(t - t_{m-1})(t - t_m)(t - t_{m+1})}{(t_{m-2} - t_{m-1})(t_{m-2} - t_m)(t_{m-2} - t_{m+1})}. \end{aligned}$$

Определяем момент времени  $\tilde{t} \in [t_m, t_{m+1}]$  в котором  $y(\tilde{t}) = 0$ ,  $y(\tilde{t}) \in [y_m, y_{m+1}]$ , далее находим значение

$$X_2 = x(\tilde{t}) = x_{m-2}W_{m-2}(\tilde{t}) + x_{m-1}W_{m-1}(\tilde{t}) + x_mW_m(\tilde{t}) + x_{m+1}W_{m+1}(\tilde{t}).$$

Более медленным, но и более точным будет вычисление  $y(x_k)$  с помощью численных методов решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнения, последовательно (методом, аналогичным двоичному поиску) подбирая момент времени  $\tilde{t}$ , при котором  $y(\tilde{t}) = 0$ ,  $y(\tilde{t}) \in [y_m, y_{m+1}]$ .

При вычислениях в среде MATLAB с помощью библиотечной функции решения задачи Коши методом Гира для поиска точки  $(X_2, 0)$  используем интерполяционный многочлен первой степени.

**5. Области, содержащие четыре предельных цикла.** Для наглядности представления результата, на рисунках (6.1 —6.17, 7.1—7.16) представлены сечения области и область в целом. Точками обозначены узлы основной двумерной сетки, в которой проводились вычисления. Вдоль отрезков прямых проводились вычисления, рассмотренные в п.3.

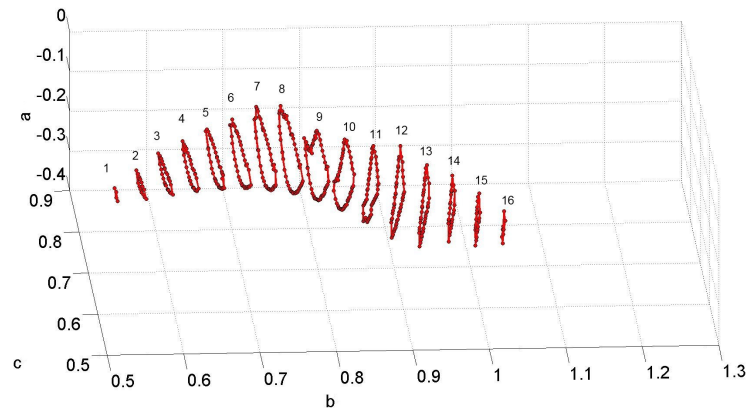


Рис. 6.1. Сечения области в пространстве параметров  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b \in (0.4, 1.6)$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_b = \frac{1}{30}$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

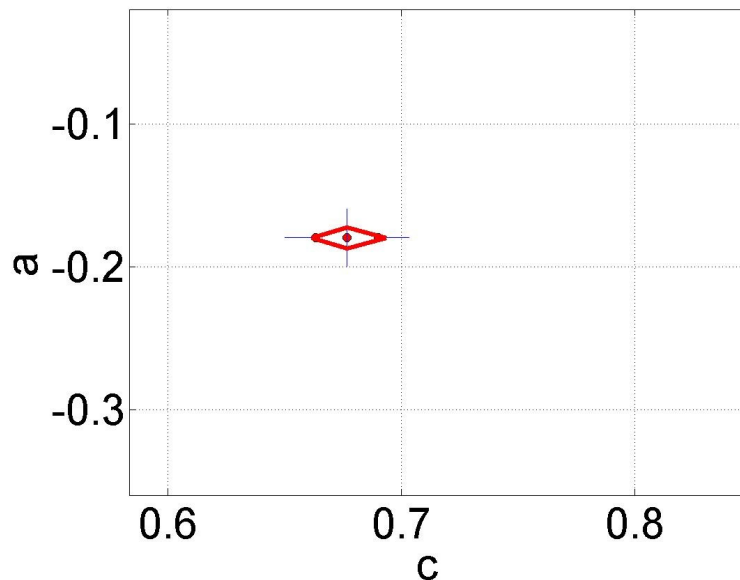


Рис. 6.2. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{16}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

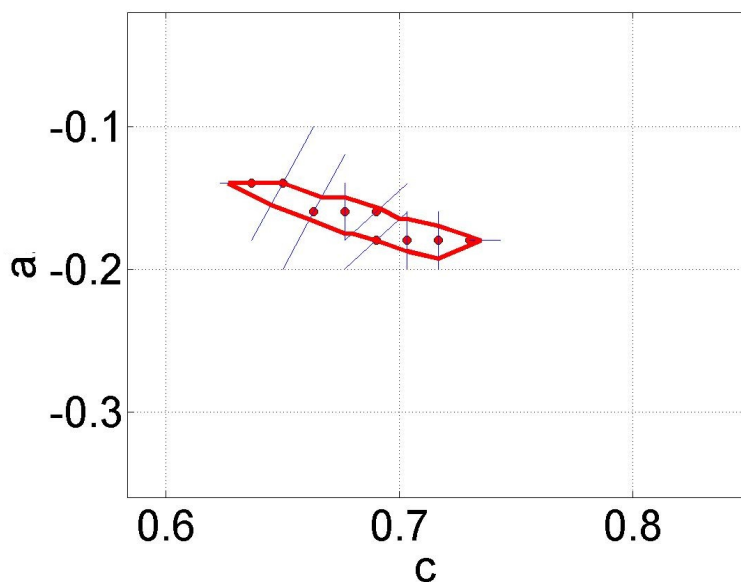


Рис. 6.3. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{17}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

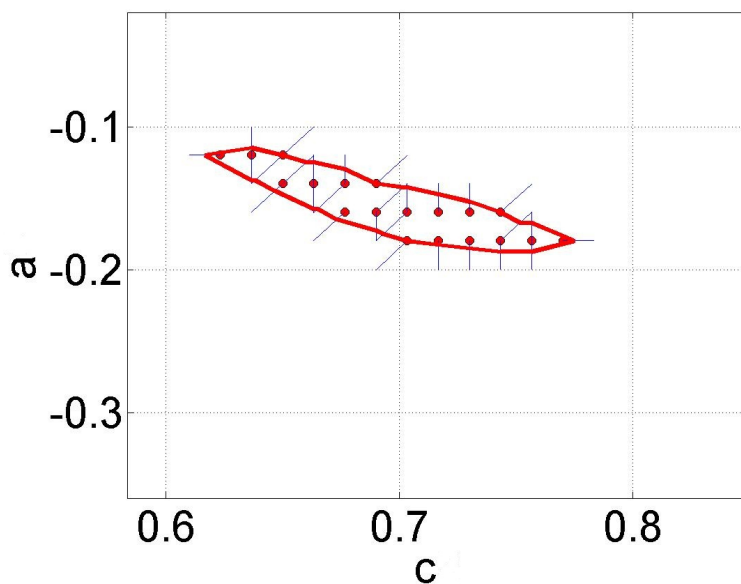


Рис. 6.4. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{18}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

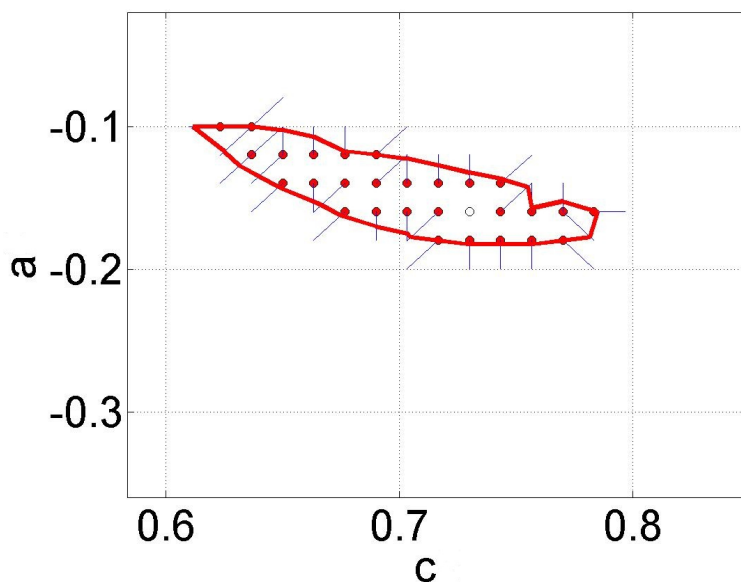


Рис. 6.5. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{19}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

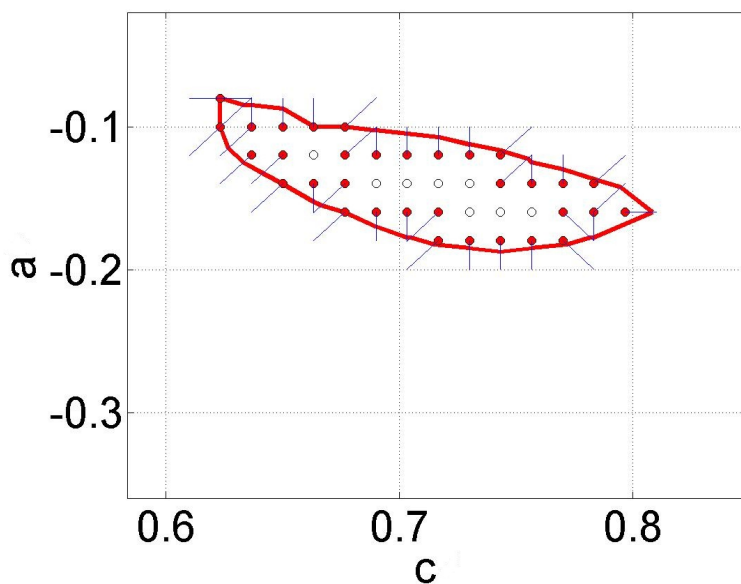


Рис. 6.6. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{20}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

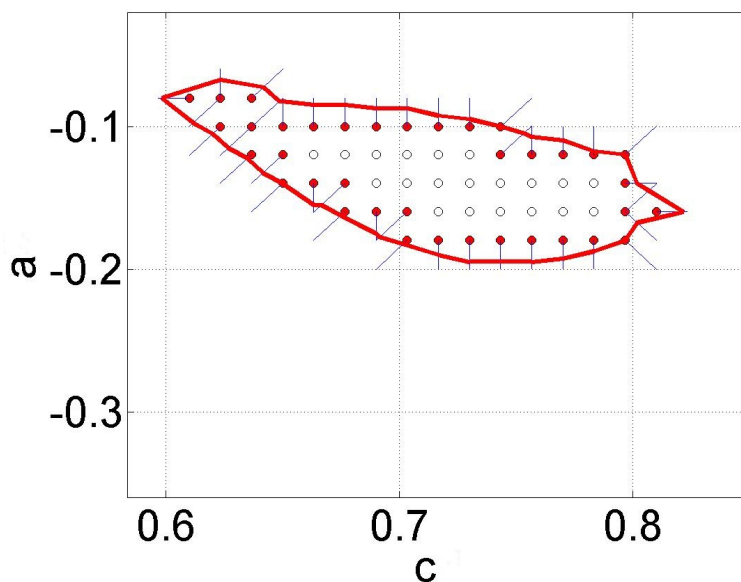


Рис. 6.7. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{21}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

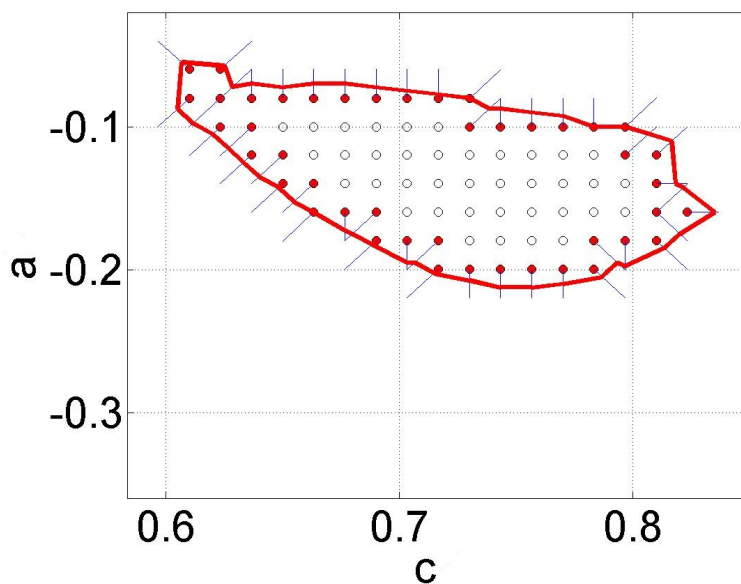


Рис. 6.8. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{22}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

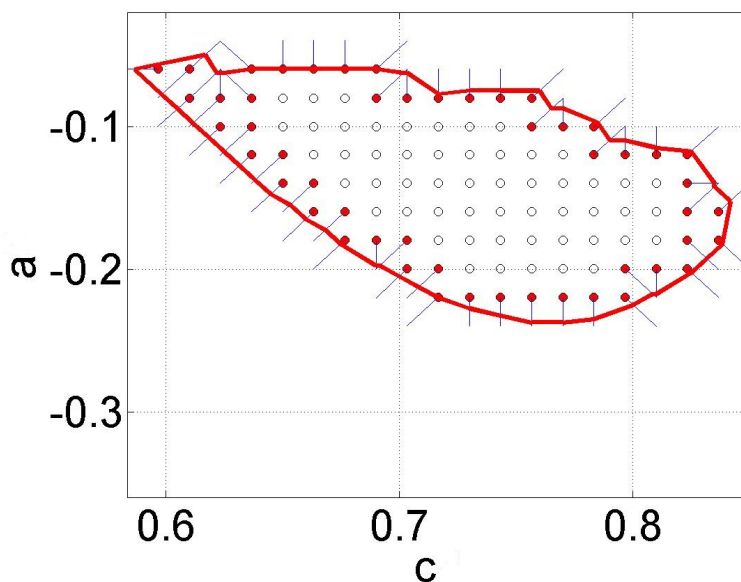


Рис. 6.9. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{23}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

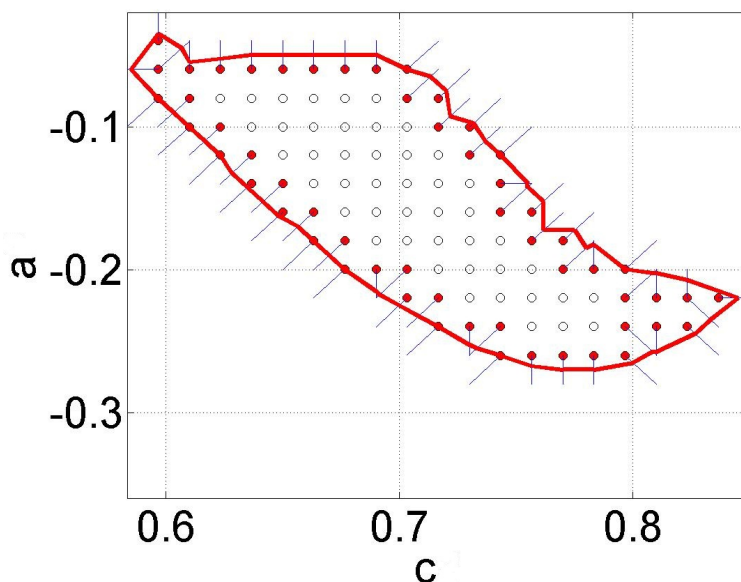


Рис. 6.10. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{24}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

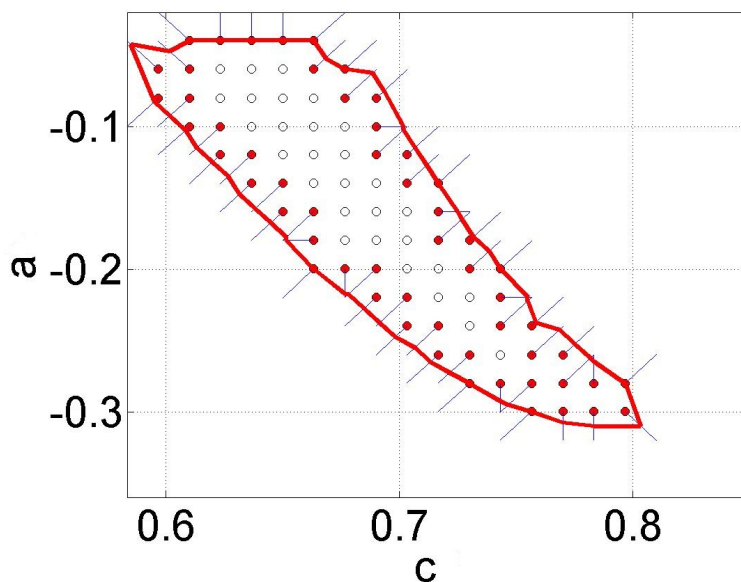


Рис. 6.11. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{26}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

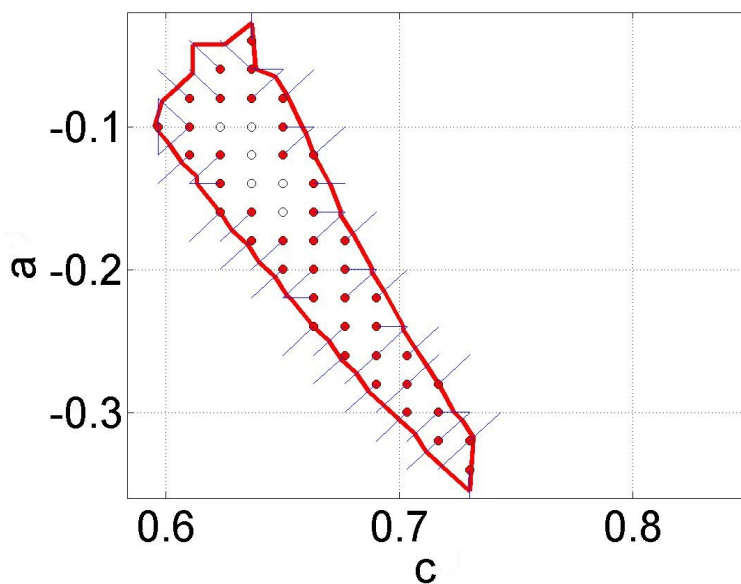


Рис. 6.12. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{27}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$



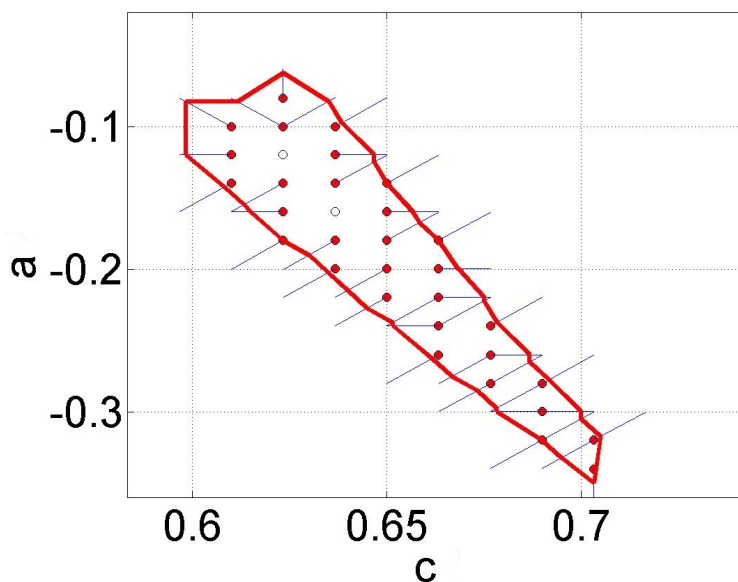


Рис. 6.13. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{28}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

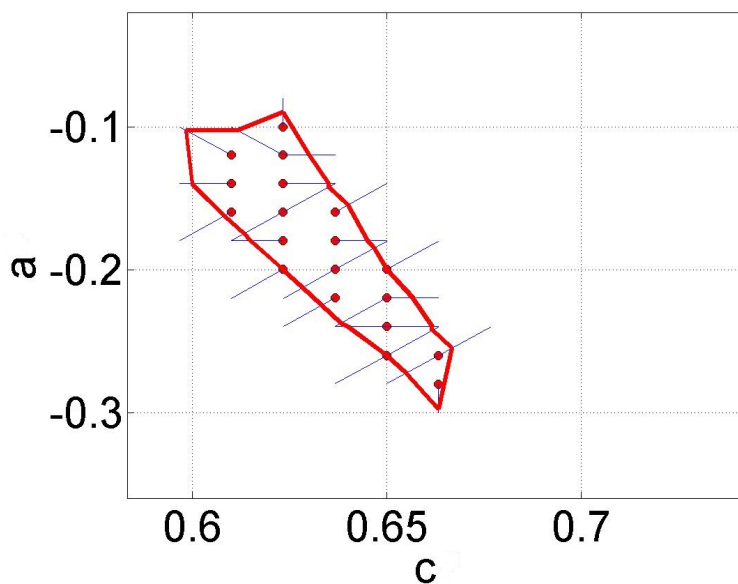


Рис. 6.14. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = \frac{29}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

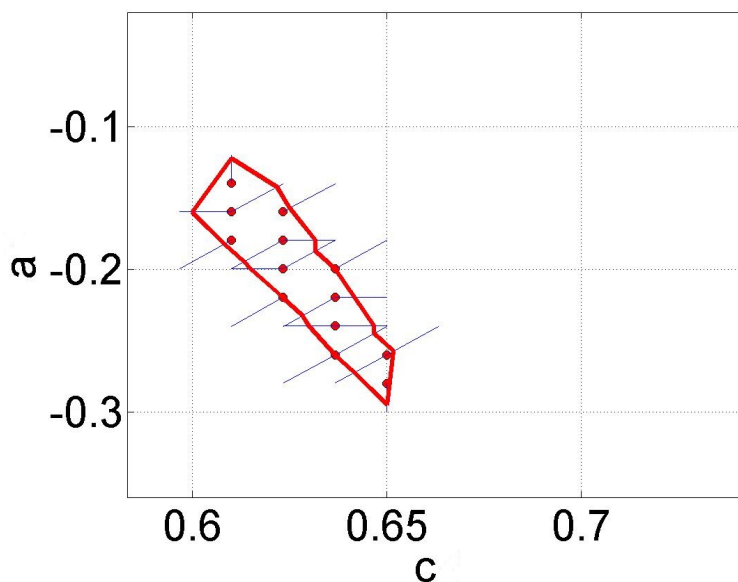


Рис. 6.15. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = 1$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

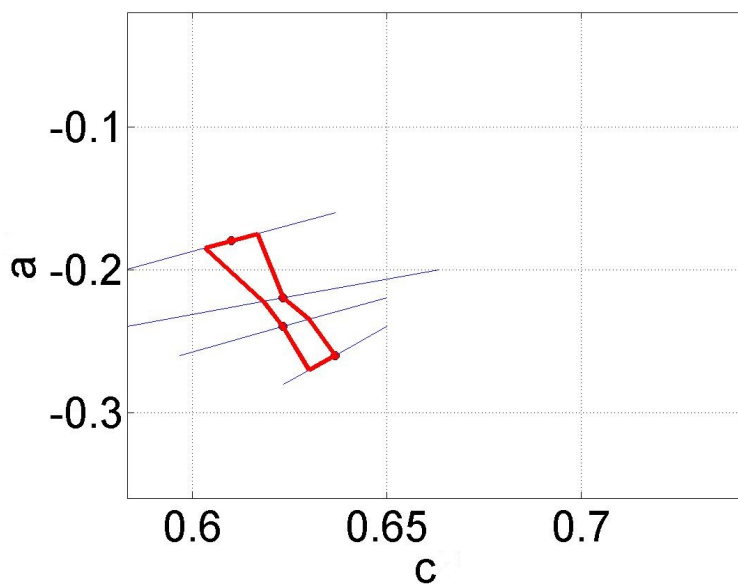


Рис. 6.16. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b = 1\frac{1}{30}$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

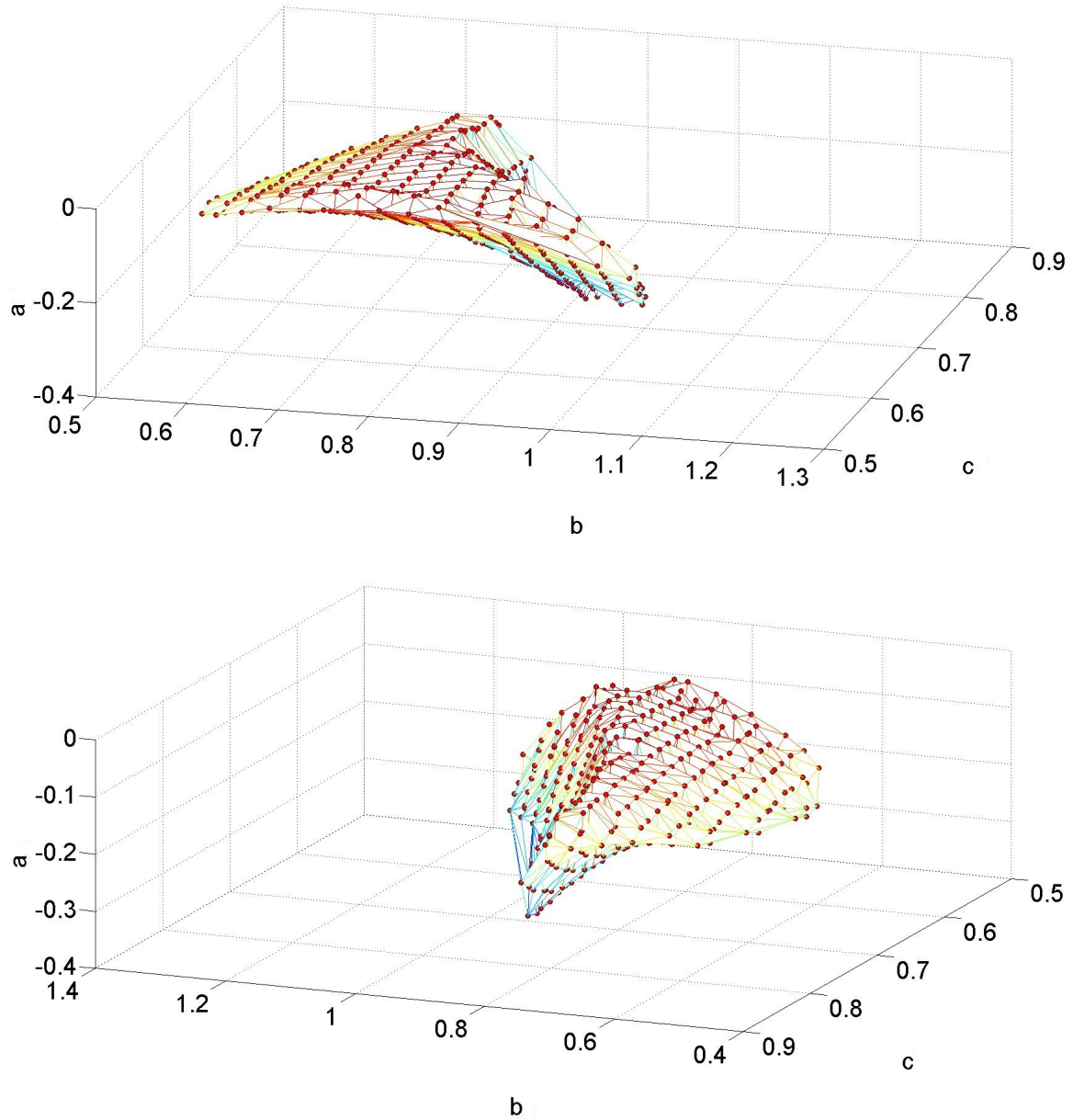


Рис. 6.17. Визуализация области в пространстве параметров с помощью триангуляции  $a \in (-0.4, 0)$ ,  $b \in (0.4, 1.6)$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  
 $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.02$ ,  $h_b = \frac{1}{30}$ ,  $h_c = \frac{4}{30}$

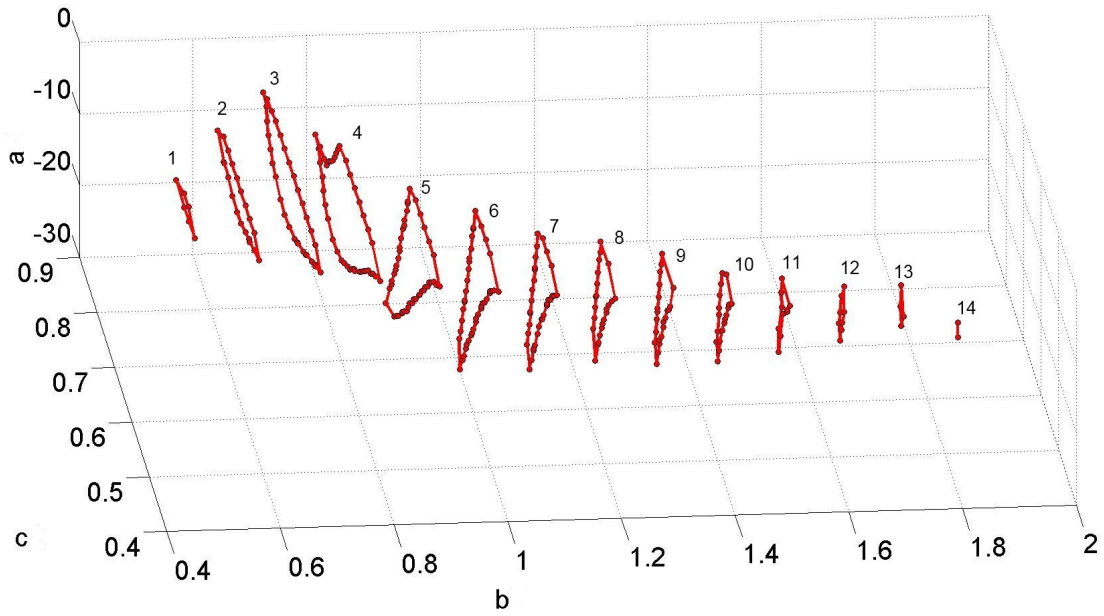


Рис. 7.1. Сечения области в пространстве параметров  
 $a \in (-30, 5)$ ,  $b \in (0.4, 2.0)$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  
 $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5$ ,  $h_b = 0.05$ ,  $h_c = 0.02$

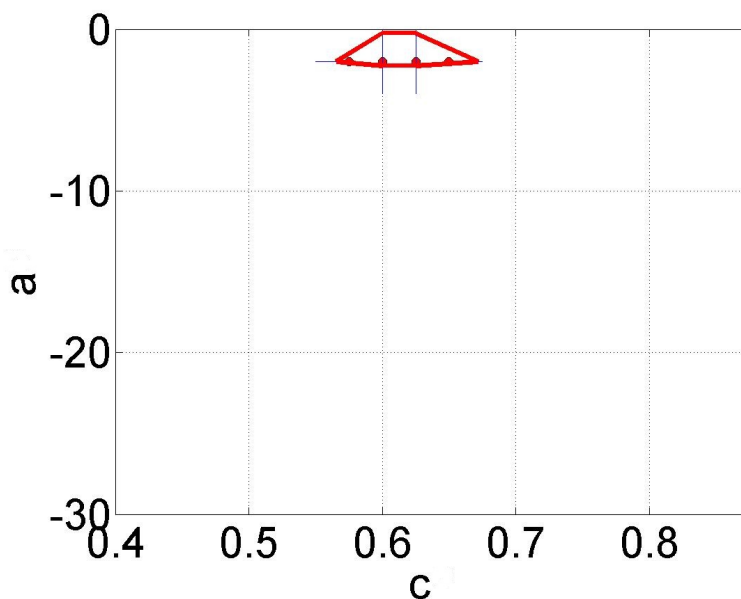


Рис. 7.2. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.55$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

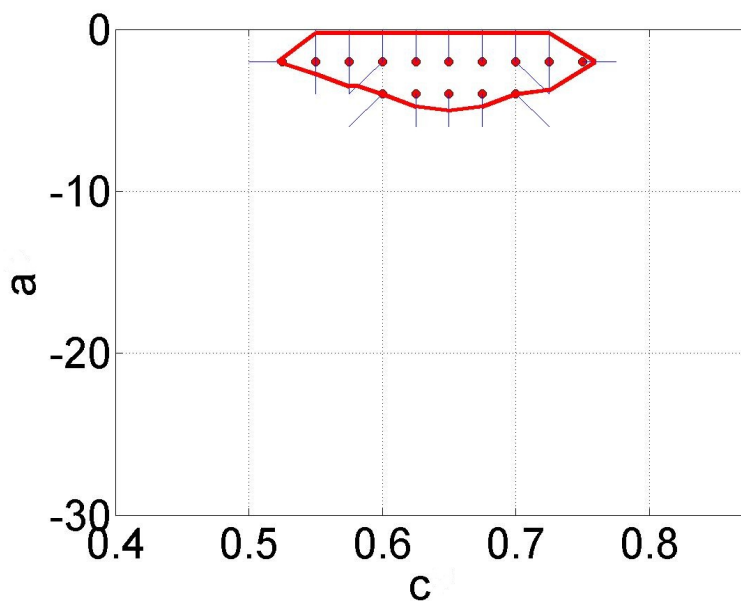


Рис. 7.3. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.6$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

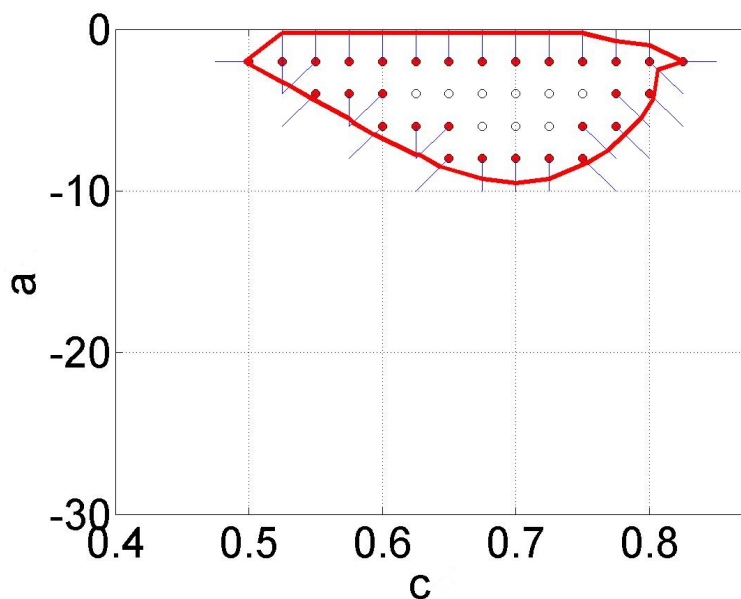


Рис. 7.4. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.65$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

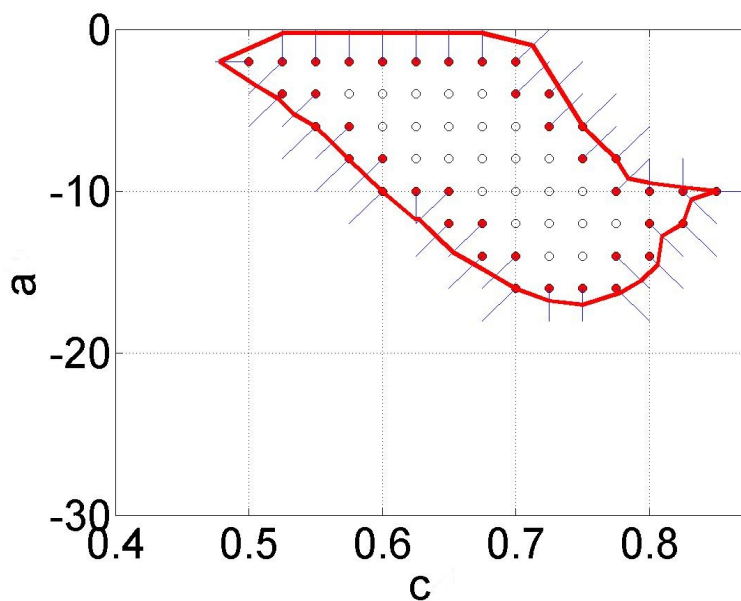


Рис. 7.5. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.7$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

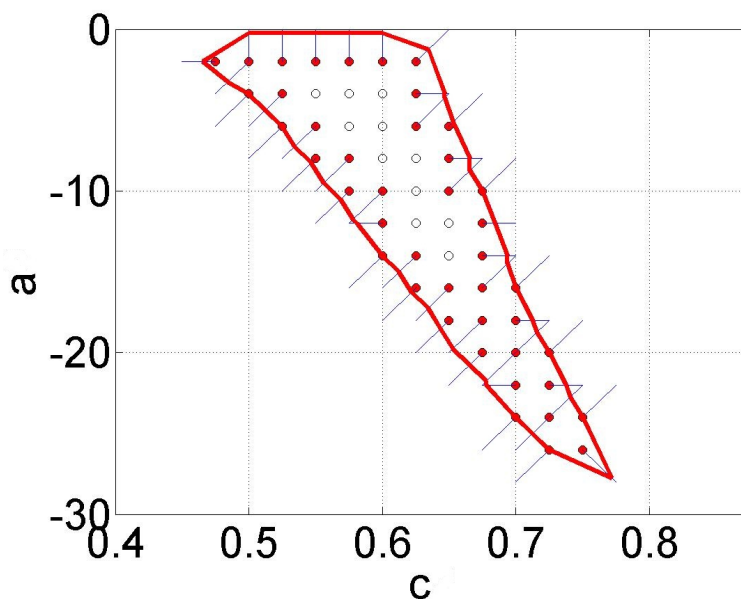


Рис. 7.6. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.75$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

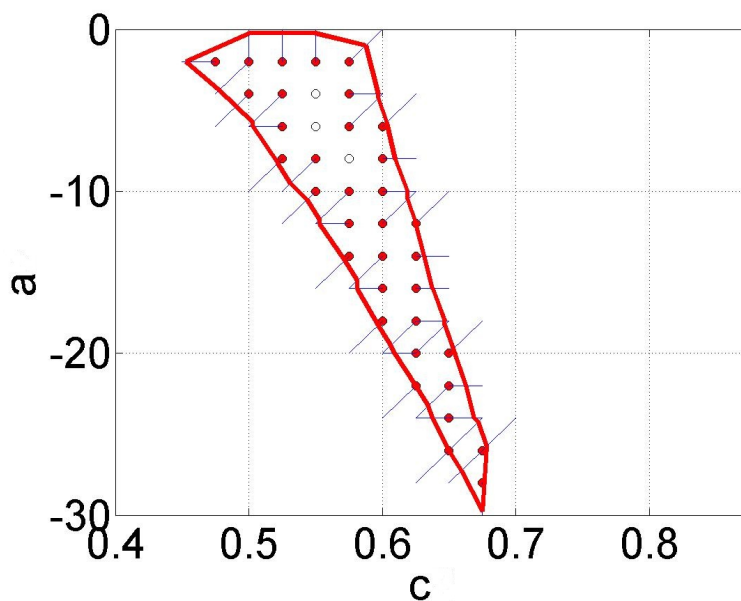


Рис. 7.7. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.8$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

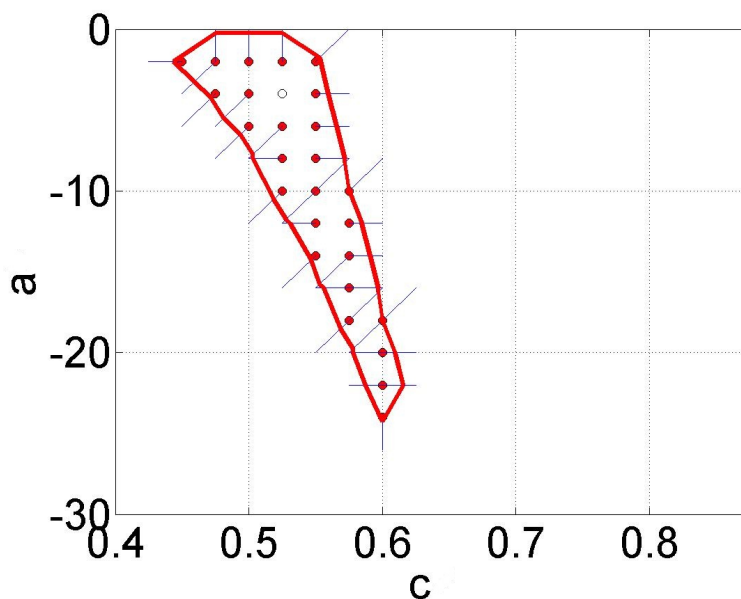


Рис. 7.8. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.85$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

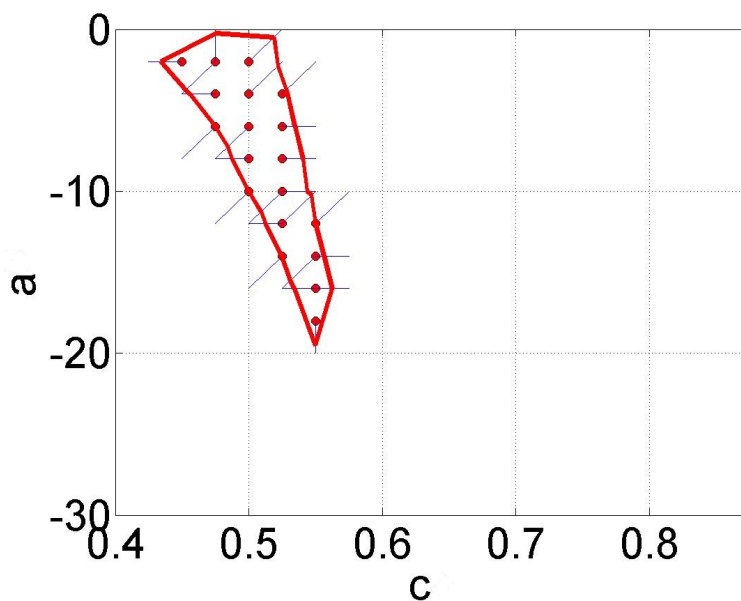


Рис. 7.9. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.9$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$



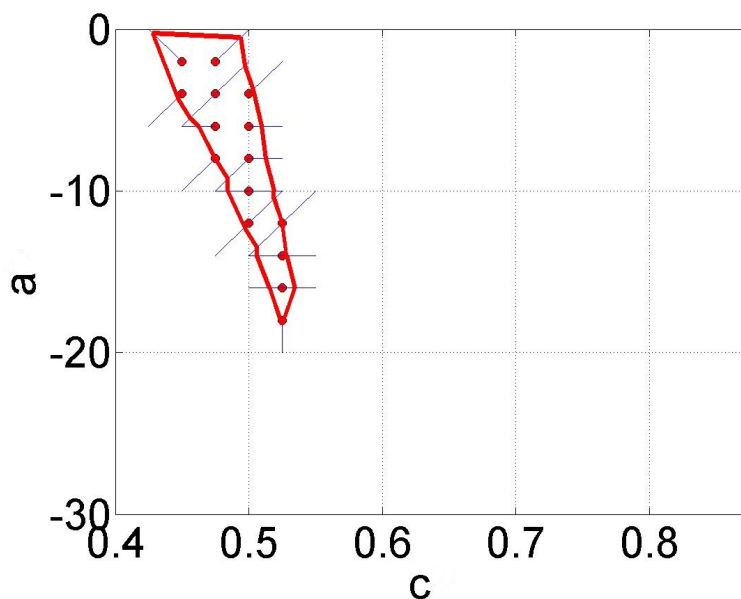


Рис. 7.10. Результаты вычисления методом Гира при значениях коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 0.95$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

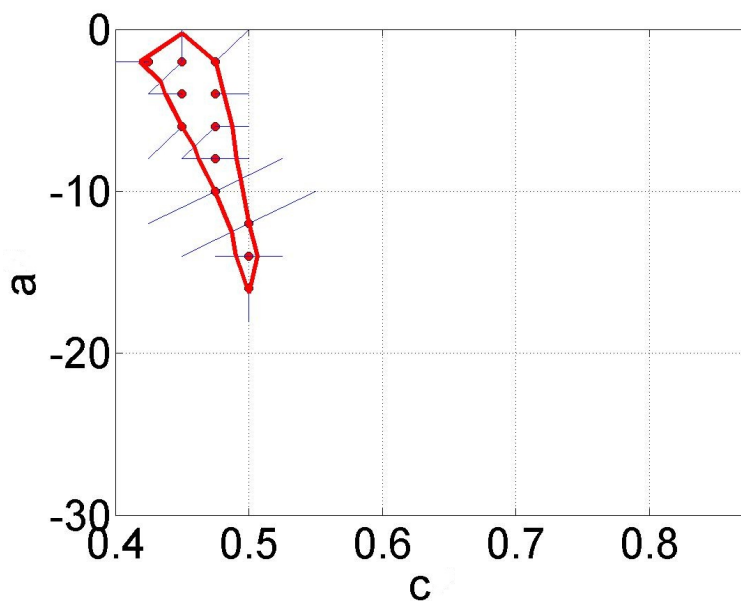


Рис. 7.11. Результаты вычисления методом Гира при значениях коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 1.0$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

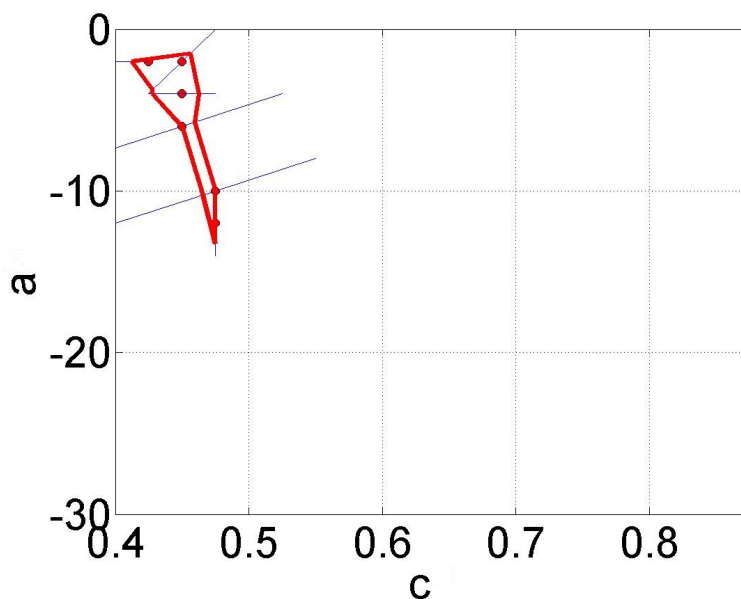


Рис. 7.12. Результаты вычисления методом Гира при значениях коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 1.05$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

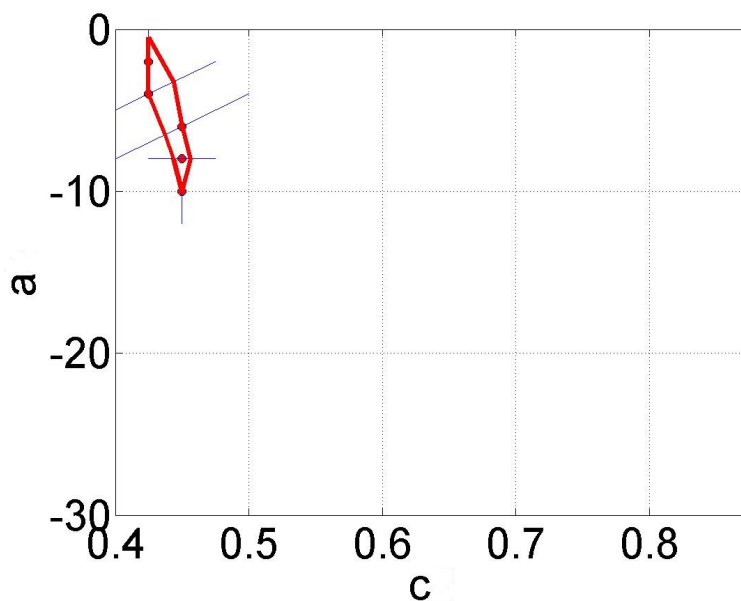


Рис. 7.13. Результаты вычисления методом Гира при значениях коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 1.1$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

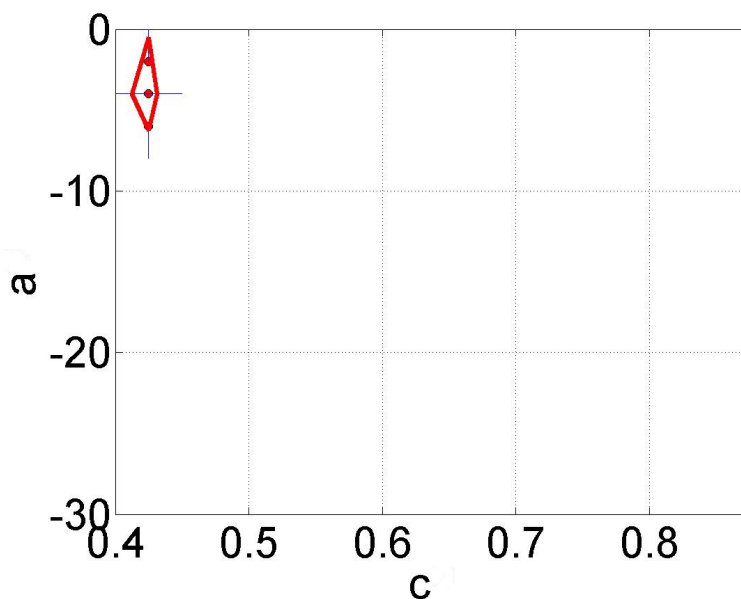


Рис. 7.14. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 1.15$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

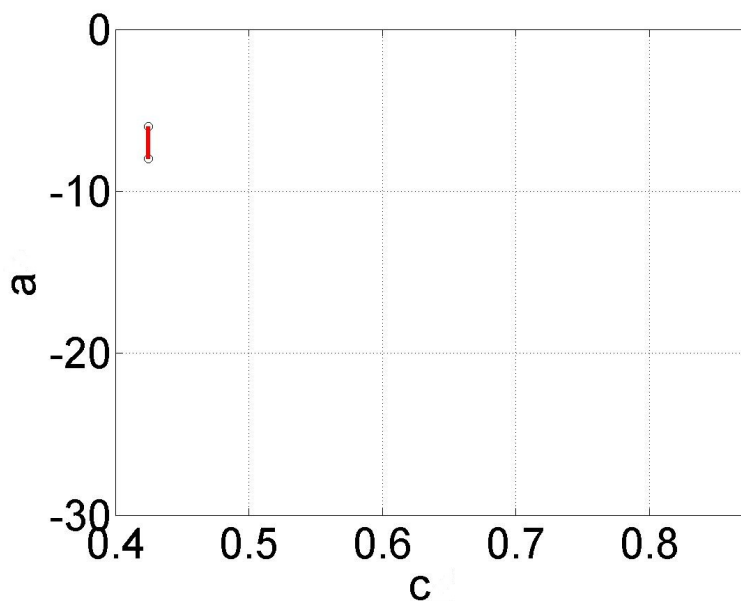


Рис. 7.15. Результаты вычисления методом Гира при значении коэффициентов в системе (3):  $a \in (-30, 5)$ ,  $b = 1.2$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5, h_c = 0.02$

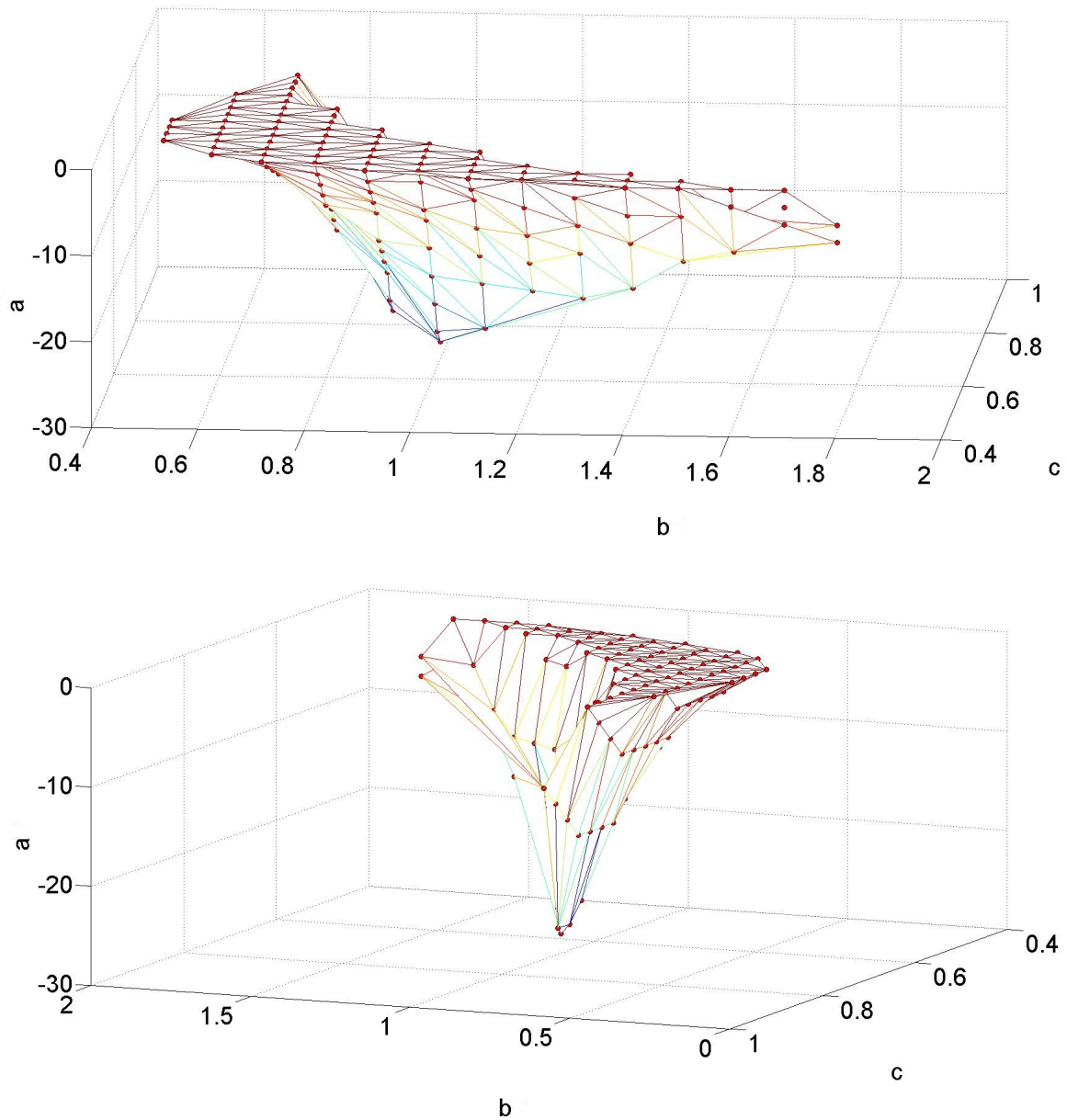


Рис. 7.16. Визуализация области в пространстве параметров с помощью триангуляции  $a \in (-30, 5)$ ,  $b \in (0.4, 1.8)$ ,  $c \in (0.3, 0.9)$ ,  $\alpha = -1050$ ,  $\beta = 0.13$  при  $h_a = 0.5$ ,  $h_b = 0.05$ ,  $h_c = 0.02$

**6. Обсуждение достоверности полученных результатов.** Проблемам, связанным с построением и устойчивостью различных численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем посвящено множество книг. Наиболее известные из них [6, 7, 34, 37, 39–42]. Оценки погрешностей методов Адамса для уравнений и систем уравнений даны в [7, 32, 33]. Оценка погрешностей для одношаговых методов приведена в [6]. При выполнении условий, сформулированных в этих работах, показано что, в частности, при достаточно малом шаге интегрирования и достаточно малых ошибках, связанных с округлением чисел при проведении вычислений, приближенное решение сходится к точному решению задачи Коши.

В работе [43] отмечено, что в случае, если собственные числа линеаризованной правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка положительны, то "... нет ничего, что могло бы ... облегчить жизнь вычислителю. Надо интегрировать [ систему ] с шагом по времени, обеспечивающим необходимую точность до тех пор, пока это возможно". Обычно для интегрирования неустойчивых систем применяют методы, пригодные для решения жестких систем, например метод Гира.

Как было отмечено в п. 2., вычисления циклов методом, предложенным в данной работе, является неустойчивым. Ситуацию облегчает тот факт, что время, затрачиваемое на один виток траектории вокруг нулевого состояния равновесия, является очень небольшим.

Таблица 1

Результаты вычислений, интервалов, содержащих циклы, времени витка и собственных чисел матрицы Якоби в  $(x_0, y_0)$  для системы (3) с коэффициентами  $b = 0.8, a = -10.0, c = 0.7, \alpha = -1050, \beta = 0.13$  методом Гира в среде MATLAB и Рунге-Кутта в среде MAPLE с 35 знаками в мантиссе.

Метод Гира	Метод Рунге- Кутта	время витка $T$	$(x_0, y_0)$	собственные числа матрицы Якоби
(4.5, 5.5),	(5.0, 5.98),	0.19	(5, 0)	$7.065 \pm 83.014i$
(76.5, 77.5),	(77.0, 78.0),	0.19	(76, 0)	$106.464 \pm 442.511i$
(16250, 16750)	(16400, 16700)	0.13	(16000, 0)	$22400.065 \pm 71027.898i,$

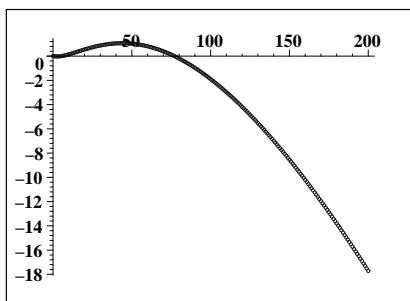
В таблицах 1 и 2 приведены значения для некоторых точек границы области времени, затраченного на один виток и соответствующие собственные значения матрицы Якоби.

Таблица 2

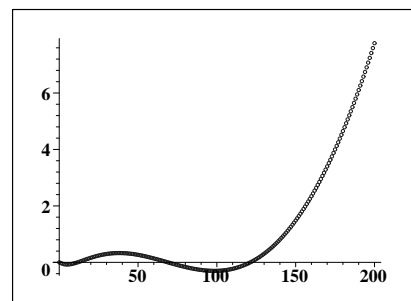
Результаты вычислений, интервалов, содержащих циклы, времени витка и собственных чисел матрицы Якоби в  $(x_0, y_0)$  для системы (3) с коэффициентами  $b = 1.855, a = -4.0, c = 0.4, \alpha = -1050, \beta = 0.2$  методом Гира в среде MATLAB и Рунге-Кутта в среде MAPLE с 35 знаками в мантиссе при шаге  $h = 0.0001$ .

Метод Гира	Метод Рунге- Кутта	время витка $T$	$(x_0, y_0)$	собственные числа матрицы Якоби
(11.1, 12.1)	(11.0, 12.0)	0.18	(11.0, 0)	$21.275 \pm 116.856i$
(57.3, 58.3)	(68.0, 69.0)	0.17	(66.0, 0)	$127.150 \pm 325.119i,$
(136.0, 137.0)	(121.0, 122.0)	0.17	(121.0, 0)	$233.025 \pm 496.10i,$

*Замечание.* В таблицах даны интервалы, где находятся предельные циклы. Авторы решали задачу определения областей, содержащих четыре предельные цикла в пространстве параметров и не ставили целью вычисление расположения циклов с заданной точностью. На рис. 8, рис. 9 представлены графики амплитудных кривых, построенных по коэффициентам системы (3), поясняющие результаты, приведенные в табл. 1 и табл.2.



а)



б)

Рис. 8. Визуализация трех циклов, полученных методом Рунге-Кутта при значениях коэффициентов

а)  $b = 0.8, a = -10.0, c = 0.7, \alpha = -1050, \beta = 0.13$  (фрагмент графика),

б)  $b = 1.855, a = -4.0, c = 0.4, \alpha = -1050, \beta = 0.2$ .

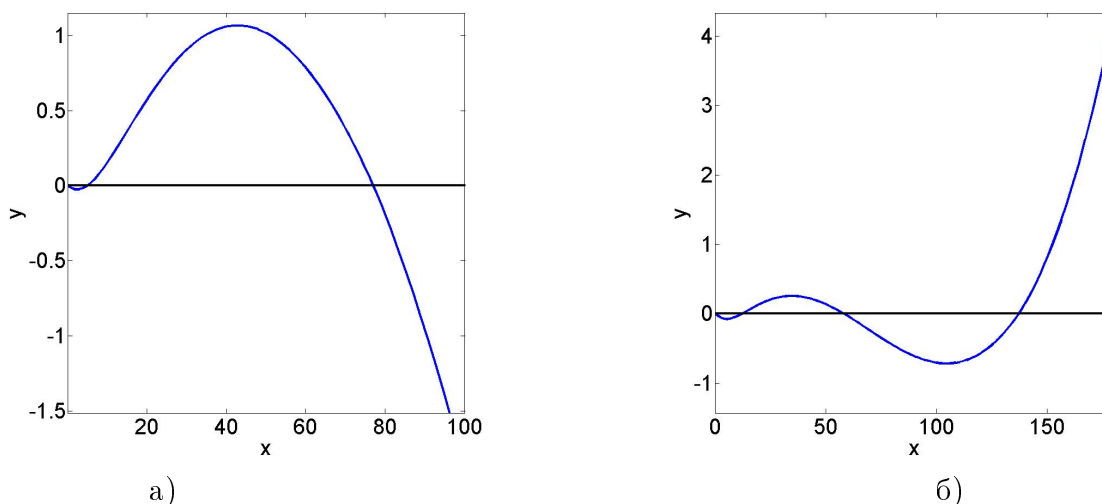


Рис. 9. Визуализация трех циклов, полученных методом Гира при значениях коэффициентов

а)  $b = 0.8, a = -10.0, c = 0.7, \alpha = -1050, \beta = 0.13$  (фрагмент графика),

б)  $b = 1.855, a = -4.0, c = 0.4, \alpha = -1050, \beta = 0.2$ .

Для значений коэффициентов системы (3) проводились повторные вычисления в среде Maple с удвоенным и учетверённым количеством знаков в мантиссе методами Рунге-Кутты четвертого порядка, Гира. Полученные сравнения позволяют с достаточной долей вероятности предполагать достоверность полученных областей.

Для полноты изложения в таблице 3 приведем собственные числа матрицы Якоби при значениях коэффициентов в системе (3)  $a = -0.18, b = 0.8, c = 0.663, \alpha = -15, \beta = 0.13$  в момент времени  $t = 0$ .

Таблица 3

Собственные числа матрицы Якоби при значениях коэффициентов  $a = -0.18, b = 0.8, c = 0.663, \alpha = -15, \beta = 0.13$  и разных начальных условиях.

$(X_0, 0)$	собственные числа матрицы Якоби
(1.25, 0)	$1.815 \pm 5.856i$
(6.25, 0)	$8.815 \pm 10.559i$
(31.25, 0)	$43.815 \pm 22.303i$
(156.25, 0)	$218.815 \pm 49.266i$

В таблицах 4 и 5 приведем собственные числа матрицы Якоби при значениях коэффициентов в системе (3)  $a = -0.18$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.663$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  в разные моменты времени при начальных условиях  $(0.05, 0)$ ,  $(156.25, 0)$ .

Таблица 4

Собственные числа матрицы Якоби при значениях коэффициентов  $a = -0.18$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.663$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  в моменты времени  $t_n$  при начальном условии  $(X_0, 0) = (0.05, 0)$ .

$t_n$	$(x_n, y_n)$	собственные числа матрицы Якоби
$t_0 = 0$	$(0.050, 0)$	$0.135 \pm 3.971i$
$t_1 = 0.202$	$(0.035, -0.138)$	$-0.047 \pm 3.956i$
$t_2 = 0.609$	$(-0.035, -0.134)$	$-0.141 \pm 3.815i$
$t_3 = 0.812$	$(-0.049, 0.000)$	$-0.003 \pm 3.773i$
$t_4 = 1.014$	$(-0.035, 0.136)$	$0.174 \pm 3.788i$
$t_5 = 1.420$	$(0.039, 0.142)$	$0.291 \pm 3.933i$
$t_6 = 1.622$	$(0.056, 0.000)$	$0.143 \pm 3.982i$

Таблица 5

Собственные числа матрицы Якоби при значениях коэффициентов  $a = -0.18$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.663$ ,  $\alpha = -15$ ,  $\beta = 0.13$  в моменты времени  $t_n$  при начальном условии  $(X_0, 0) = (156.25, 0)$ .

$t_n$	$(x_n, y_n)$	собственные числа матрицы Якоби
$t_0 = 0$	$(156.25, 0.000)$	$218.815 \pm 49.266i$
$t_1 = 0.135$	$(0.697, -11.956)$	$-14.820 \pm 2.282i$
$t_2 = 0.272$	$(-0.830, -4.484)$	$-6.313 \pm 1.757i$
$t_3 = 0.547$	$(-0.748, 0.000)$	$-0.982 \pm 1.857i$
$t_4 = 0.723$	$(-0.608, 1.875)$	$1.395 \pm 2.159i$
$t_5 = 1.077$	$(0.975, 7.806)$	$10.512 \pm 4.173i$
$t_6 = 1.254$	$(159.394, 0.000)$	$223.216 \pm 49.757i$



## Список литературы

- [1] Александров П. С. Проблемы Гильберта. М.:Наука, 1969. 240 с.
- [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон А. А., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.:Наука, 1966. 568 с.
- [3] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.:Физматгиз, 1959. 916 с.
- [4] Арнольд В. И. Экспериментальная математика. М.:Фазис, 2005. 64 с.
- [5] Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра. // Математический сборник. Т. 30(72). №1, 1952. С. 181–196.
- [6] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.:Наука, 1975. 632 с.
- [7] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. 2. М.:Наука, 1962. 640 с.
- [8] Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A. Visualization of four normal size limit cycles in two-dimensional polynomial quadratic system. // Differential equations and dynamical systems. V. 21. Nos. 1–2, 2013. P. 29–34.
- [9] Kuznetsov N. V., Leonov G. A. Lyapunov quantities, limit cycles and strange behavior of trajectories in two-dimensional quadratic systems. // Journal of Vibroengineering. V. 10. N. 4, 2008. P. 460–467.
- [10] Ландис Е. М., Петровский И. Г. О числе предельных циклов уравнения  $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ , где  $P$  и  $Q$ –полиномы.// Математический сборник. Т. 43(85). №2, 1957. С. 149–168.
- [11] Llibre J., Artes J. C. Quadratic vector fields with a weak focus of third order. // Publicacions Matematiques. V. 41. N. 1, 1997. P. 7–39.
- [12] Llibre J., Bernat J. Counterexample to Kalman and Markus–Yamabe conjectures in dimension larger than 3. // Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. V. 2. N. 3, 1996. P. 377–379.
- [13] Leonov G. A. Four limit cycles in quadratic two-dimensional systems with a perturbed first-order weak focus. // Doklady Mathematics. V. 81. N. 2, 2010. P. 248–250.

- [14] *Leonov G. A.* Limit cycles in quadratic systems with a first-order weak focus. // *Doklady Mathematics*. V. 82. N. 3, 2010. P. 923–926.
- [15] *Leonov G. A.* Synthesis of two-dimensional quadratic systems with a limit cycle satisfying prescribed initial conditions. // *Doklady Mathematics*. V. 81. N. 2, 2010. P. 236–237.
- [16] *Leonov G. A.* Two-dimensional quadratic systems as a lienard equation. // *Differential Equations and Dynamical Systems*. V. 5, 1997. P. 289–297.
- [17] *Leonov G. A.* Limit cycles of the Lienard equation with discontinuous coefficients. // *Doklady Physics*. V. 54. N. 5, 2009. P. 238–241.
- [18] *Leonov G. A., Sundkvist E.* Localization of the Lienard equation's attractors and cycles. // *Differential Equations and Dynamical Systems*. V. 13. Nos. 3–4, July & October 2005. P. 275–294.
- [19] *Leonov G. A.* Existence criteria for cycles in two-dimensional quadratic systems. // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* V. 40. N. 3, pp. 172–181, 2007.
- [20] *Leonov G. A.* A criterion for the existence of four limit cycles in quadratic systems. // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. V. 74. N. 2, 2010. P. 135–143.
- [21] *Leonov G. A.* Efficient methods in the search for periodic oscillations in dynamical systems. // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. V. 74. N. 1, 2010. P. 24–50.
- [22] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Computation of the first lyapunov quantity for the second-order dynamical system. // *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. V. 3. N. 1, 2007. P. 87–89.
- [23] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. V. 23. N. 1, 2013, art. no. 1330002.
- [24] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Kudryashova E. V.* A direct method for calculating lyapunov quantities of two-dimensional dynamical systems. // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. V. 272. Suppl. 1, 2011. P. 119–127.

- [25] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Kudryashova E. V.* Cycles of two-dimensional systems. calculations, proofs, experiments. // Vestnik St.Petersburg University. Mathematics. V. 41. N. 3, 2008. P. 216–250.
- [26] *Leonov G.A., Kuznetsova O. A.* Lyapunov quantities and limit cycles of two-dimensional dynamical systems: Analytical methods and symbolic computation. // Regular and Chaotic Dynamics. V. 15. N. 2, 2010. P. 354–377.
- [27] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Limit cycles of quadratic systems with a perturbed weak focus of order 3 and a saddle equilibrium at infinity. // Doklady Mathematics. V. 82. N. 2, 2010. P. 693–696.
- [28] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Seledzhi S. M.* Hidden oscillations in dynamical systems. // Recent researches in System Science. WSEAS Press, 2011. P. 292–297.
- [29] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Seledzhi S. M., Vagaitsev V. I.* Hidden oscillations in dynamical systems. // Transaction on Systems and Control. V. 6. N. 2, 2011. P. 54–67.
- [30] *Li C.* Non-existence of limit cycle around a weak focus of order three for any quadratic system. // Chinese Annals of Mathematics. V. 7B. N. 2, 1986. P. 174–190.
- [31] *Lynch S.* Dynamical systems with applications using maple. // Birkhauser, Springer, Boston, 2010. 474 p.
- [32] *Лозинский С. М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. // Известия вузов. Математика. Т. 5. №6, 1958. С. 52–90.
- [33] *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб. 1998. 472 с.
- [34] *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1986. 288 с.
- [35] *Петровский И. Г., Ландис Е. М.* О числе предельных циклов уравнения  $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ , где  $P$  и  $Q$ –многочлены степени  $n$ . // Математический сборник Т. 37(79). №2, 1955. С. 209–250.
- [36] *Петровский И. Г. Ландис Е. М.* Поправки к статьям "О числе предельных циклов уравнения  $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ , где  $P$  и  $Q$ –многочлены

- второй степени" и "О числе предельных циклов уравнения  $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ , где  $P$  и  $Q$  – полиномы". // Математический сборник. Т. 48(90). №2, 1959. С. 253–255.
- [37] *Скворцов Л. М.* Точность методов Рунге Кутты при решении жестких задач. // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 43. №9, 2003. С. 1374–1384.
- [38] *Shi S. L.* A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems. // Scientia Sinica. V. 23. N. 2, 1980. P. 153–158.
- [39] *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.:МФТИ, 1994. 528 с.
- [40] *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.:Мир. 1999. 685 с.
- [41] *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.:Мир. 1990. 512 с.
- [42] *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Мир, 1979. 312 с.
- [43] *Холодов А.С., Лобанов А.И., Евдокимов А.В.* Разностные схемы для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве неопределенных коэффициентов. М.:МФТИ, 1985. 49 с.
- [44] *Черкас Л. А., Жилевич Л. И.* Некоторые признаки отсутствия единственности предельных циклов. // Дифференциальные уравнения. Т. 6. №3, 1970. С. 891–897.
- [45] *Ye Yan-Qian.* *Theory of Limit cycles.* Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, V. 66, 1986. 436 p.