ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

УДК 534.182

О возможности инвариантного описания двухчастичного локального взаимодействия в релятивистской квантовой механике

В.М. Лагодинский

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

Аннотация

В данной работе показано, что двухчастичное релятивистское уравнение Шредингера, которое является дифференциальным уравнением бесконечного порядка, дает релятивистски инвариантное описание системы двух бесспиновых частиц, взаимодействующих посредством центрально-симметричного короткодействующего потенциала. Найдена замена независимых переменных, основанная на преобразованиях Лоренца и приводящая к переменным, часть которых описывает взаимодействие частимц в инерциальной системе отсчета, в которой сумма их импульсов равна нулю (системе центра импульсов), а другие описывают движение системы центра импульсов в исходной системе отсчета. Эти переменные разделяются, что приводит к самосопряженной краевой задаче.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения бесконечного порядка, релятивистская квантовая механика.

Abstract

In this work it is shown that the relativistic two-particle Schrodinger equation, which is a differential equation of infinite order, yields the relativistic invariant description of the system of two spinless particles interacting through a spherically symmetric short-range potential. A change of independent variables based on the Lorentz transformations is found. This change leads to a set of variables which describe both the interaction of particles in an inertial reference frame (center pulses system,where the sum of particles momenta equals zero), and the motion of the center pulse in the source frame of reference. These variables are separated, which leads to a self-adjoint boundary value problem.

Keywords: parabolic equation, finite speed of perturbation propagation, strong solution, weak solution

1 Введение

Принято считать [1], что релятивистская квантовая теория бесспиновых частиц должна быть основана на уравнении Клейна-Гордона (УКГ), однако это уравнение приводит ко многим существенным трудностям. Наиболее известной из этих трудностей является наличие решений, соответствующих отрицательным значениям энергии, но есть и много других: парадокс Клейна, появление комплексных значений энергии водородоподобного π-атома с атомным номером $Z > 68$ [2], знаконеопределенная плотность вероятности и т. д.. Но, по-видимому, наибольшее влияние на все современное развитие релятивистской квантовой теории оказало принципиальное различие в способах описания физических систем, состоящих из N частиц, с помошью нерелятивистского уравнения Шредингера (НУШ) и УКГ. Напомним, что в нерелятивистской квантовой механике такая система описывается одним НУШ, которое является уравнением относительно одной волновой функции $3N + 1$ переменных: $3N$ координат и времени. Но многочастичное УКГ невозможно. Причина этого состоит в том, что УКГ для свободной бесспиновой частицы получается, если стандартную замену

$$\varepsilon \to i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \to -i\nabla \tag{1}$$

(используем систему единиц, в которой постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c равны единице) произвести не в выражении для энергии, как для получения НУШ, а в выражении для квадрата энергии: $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Это делается потому, что если указанную замену произвести в релятивистском выражении для энергии:

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

то получается необычное уравнение:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\Psi, \tag{2}$$

где $\Psi = \Psi(t, \mathbf{r})$. Это уравнение или аналогичное ему приводится многими авторами, но обычно лишь для того, чтобы объявить о его непригодности для релятивистской квантовой теории [1,3], считая это уравнение несимметричным относительно пространства и времени, а оператор, имеющий вид квадратного корня из дифференциального оператора — нелокальным. На этом основании возводят операторы в обоих частях уравнения в квадрат и получают УКГ. Но энергия системы N свободных частиц равна сумме энергий этих частиц, и однократным возведением в квадрат от корней не избавиться, а при многократном могут появиться и комплексные энергии.

В настоящее время принято считать, что адекватной релятивистской квантовой теорией взаимодействия частиц является квантовая теория поля (КТП), в которой физическая система, состоящая из взаимодействующих бесспиновых частиц N сортов описывается системой N УКГ, каждое из которых соответствует одному сорту частиц, причем взаимодействие должно учитываться введением дополнительных членов, билинейных по полям отдельных сортов частиц. Конечно, это приводит, во-первых, к резкому различию между релятивистской и нерелятивистской квантовыми теориями взаимодействия бесспиновыз частиц, во-вторых, к невозможности точного решения подобных задач из-за их нелинейности. Используется теория возмущений, которая обязательно приводит к расходимостям, преодолеваемым чисто рецептурными средствами — перенормировками.

Имея целью не только достичь согласия теории с экспериментом, но и понять закономерности физических явлений, представляется интересным рассмотреть возможность альтернативного к КТП подхода, основанного на уравнении (2). Действительно ли оно непригодно для построения математически корректной и правильно описывающей физические явления теории?

Прежде всего, для релятивистской инвариантности уравнения его симметричность относительно координат и времени необязательна, выражение (1) несимметрично относительно ε и $\mathbf{p}$. Необходима лишь инвариантность множества решений уравнения относительно преобразований Лоренца [4]. А нелокальным это уравнение считали лишь потому, что оператор, имеющий вид квадратного корня из дифференциального оператора, определялся с помощью импульсного представления, то есть трехмерного преобразования Фурье. Это определение вполне соответствует определению, данному Дж. фон

Нейманом [5], которое функции $f(z)$ комплексного переменного и самосопряженному оператору A, имеющему собственные значения α и собственные функции $\varphi(\alpha, x)$ сопоставляет самосопряженный оператор $f(A)$, имеющий те же собственные функции и собственные значения $f(\alpha)$. Нетрудно, однако, показать уже в случае функции $\varphi(x) = x^2$ это определение не работает. Действительно, самосопряженный вариант оператора $-d^2/dx^2$ может быть определен различными способами и его собственные функции могут быть не такими, как у оператора $-id/dx$. В частности на промежутке $[0, \infty)$ последний вообще не может быть определен как самосопряженный, а оператор $-d^2/dx^2$ может [6].

Следуя Треву [7], мы называем локальным линейный оператор A, если из $f(x) = 0$, $\forall x \in M$, где M — открытое множество, следует $(Af)(x) = 0$, $\forall x \in M$. Имея локальное определение гамильтониана, мы можем найти общее решение уравнения Шредингера, а затем определить те значения энергии, при которых это решение можно подчинить поставленным граничным условиям и найти решения, удовлетворяющие этим условиям. Если эти условия удовлетворяют определенным требованиям, мы получаем наборы функций и значений энергии, которые можно рассматривать как собственные функции и собственные значения некоторого самосопряженного дифференциального оператора. Таким образом, самосопряженный оператор — это не то, чем мы оперируем в процессе решения задачи, а результат ее решения.

Определение функции дифференциального оператора, приводящее к локальному оператору, в частности, определение квадратного корня из дифференциального оператора, предложено автором настоящей работы [8]. Это определение сопоставляет оператору D и функции комплексного переменного $f(z)$ (голоморфной на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов, точек ветвления и разрезов, соединяющих каждую из точек ветвления с бесконечно удаленной точкой, а продолжения этих разрезов пересекаются в начале координат, где функция $f(z)$ голоморфна) оператор, который любой функции $u(x)$, такой, что множество предельных точек последовательности

$$\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ |(D^n u)(x)|^{1/n} \exp\left(i\frac{\varphi_n}{n}\right) \right\}_{n=0}^{\infty},$$

где $\varphi_n = \arg(D^n u)(x)$, при любом $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ ограничено и включает лишь те точки, в которых функция $f(z)$ голоморфна, сопоставляет функцию, определенную на (a, b) и принимающую в каждой точке $x \in (a, b)$ значения, получающиеся из функции

$$\big(f(\alpha D)u\big)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\alpha^n(D^n u)(x),\qquad \forall x\in(a,b) \tag{3}$$

аналитическим продолжением по вещественному параметру α от $\alpha=0$ до $\alpha=1$. Это соответствие между множеством функций $F=\{f(z)\}$ и множеством дифференциальных операторов (вообще говоря) бесконечного порядка $\hat{F}=\{f(D)\}$ есть изоморфизм коммутативных колец: сумме функций $f_1(z)+f_2(z)$ соответствует сумма операторов $f_1(D)+f_2(D)$, а произведению функций $f_1(z)f_2(z)$ — произведение операторов $f_1(D)f_2(D)=f_1(D)f_2(D)$ (то есть их последовательное действие). В частности, если $u(x)=\exp(ikx)$ $\forall x\in(a,b)$, $k\in\mathbb{R}$,

$$(H_m u)(x)=\sqrt{m^2-\partial_x^2}\,u(x)=\sqrt{m^2+k^2}\,\exp(ikx),\quad \forall x\in(a,b), \tag{4}$$

$$(H_m^{-1}u)(x)=\big(m^2-\partial_x^2\big)^{-1/2}u(x)=(m^2+k^2)^{-1/2}\exp(ikx),\quad \forall x\in(a,b), \tag{5}$$

$$(V_m u)(x)=-i\left(m^2-\partial_x^2\right)^{-1/2}\partial_x u(x)=\frac{k}{\sqrt{m^2+k^2}}\exp(ikx),\quad \forall x\in(a,b), \tag{6}$$

где $\partial_x\equiv d/dx$. Очень важно, что функция $u(x)=\exp(\varkappa x)$, если $\varkappa\in\mathbb{R}$ и $|\varkappa|>m$, не принадлежит области определения оператора H_m.

Таким образом, ничто не мешает рассматривать уравнение (2) с нашим определением квадратного корня из оператора как релятивистское обобщение НУШ. Естественно называть уравнение (2) с так определенным квадратным корнем из дифференциального оператора релятивистским уравнением Шредингера (РУШ). В работе [8] также построена спектральная теория граничных задач для стационарного свободного одномерного РУШ:

$$\left(\varepsilon-\sqrt{m^2-\frac{d^2}{dx^2}}\right)u(x)=0$$

и доказана инвариантность уравнения (2) относительно преобразований Лоренца. Эти результаты позволяют надеяться построить адекватную квантово-релятивистскую теорию взаимодействия двух бесспиновых частиц на основе двухчастичного релятивистского уравнения Шредингера:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-\sqrt{m_1^2-\nabla_1^2}-\sqrt{m_2^2-\nabla_2^2}-U(\rho)\right]\Psi(t,\mathbf{r_1},\mathbf{r_2})=0, \tag{7}$$

где m_i, ∇_i — масса покоя и оператор градиента по координатам i-ой частицы соответственно, $i = 1,\ 2$, ρ — расстояние между частицами.

В настоящей работе будет построено представление группы Лоренца, относительно которого инвариантно решение этого уравнения, описывающее упругое столкновение двух бесспиновых частиц и выполнено разделение переменных, позволяющее решать задачи о короткодействующем взаимодействии двух частиц сначала в системе их центра импульсов (СЦИ), а затем перейти в произвольную систему отсчета.

2 Замена переменных

Очевидно, использовать непосредственно уравнение (7) для решения конкретных задач довольно сложно. Проще было бы решить задачу в инерциальной системе отсчета, в которой сумма импульсов частиц равна нулю, то есть в системе центра импульсов (СЦИ), а затем перейти в нужную систему отсчета. Для этого необходимо найти формулы соответствующих преобразований. Пусть в (7) потенциал $U(\rho)$ обладает малым радиусом действия a (на самом деле обычно предполагается переход к пределу $a \to 0$). Будем считать, что столкновение действительно происходит, и это событие будем считать началом инерциальной системы отсчета K и началом инерциальной системы отсчета, в которой сумма импульсов наших частиц равна нулю — СЦИ. Поскольку частицы сталкиваются, их импульсы лежат в одной плоскости. Будем считать, что это плоскость XY.

Поскольку пара частиц образует замкнутую физическую систему, ее полные энергия ε и импульс $\mathbf{P}$ сохраняются. Используя (4), получим решение уравнения (7) в области, где расстояние между частицами больше a в виде:

$$\Psi(t, \mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = \exp(-i\varepsilon t)[\exp(i\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 + i\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2) + A\exp(i\mathbf{p}_1'\mathbf{r}_1 + i\mathbf{p}_2'\mathbf{r}_2)], \tag{8}$$

где $A \in \mathbb{C}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ — импульсы частиц до столкновения, а $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ — после столкновения, если выполнены равенства:

$$\varepsilon = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2} = \sqrt{m_1^2 + {\mathbf{p}_1'}^2} + \sqrt{m_2^2 + {\mathbf{p}_2'}^2}\ ,$$

Остановимся на вопросе об интерпретации этого решения. Согласно ортодоксальной („копенгагенской“) интерпретации оба слагаемых функции (8) описывают одновременные события, то есть полагают, что одновременно импульсы частиц суть $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$. Это кажется абсолютно неправдоподобным, и мы будем считать, что вид функции (8) свидетельствует о том, что в любой данный момент времени импульсы частиц могут быть либо $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, либо $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$.

Представим решение (8) в виде:

$$\Psi(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp(i\mathbf{PR} - i\varepsilon t)[\exp(-i\mathbf{kr}) + A\exp(i\mathbf{kr})], \tag{9}$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{\varepsilon_1\mathbf{r}_1 + \varepsilon_1\mathbf{r}_1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon_i = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

С точки зрения предлагаемой здесь интерпретации выражение (9) говорит о том, что полный импульс системы $\mathbf{P}$ сохраняется, а столкновение в момент времени t либо уже произошло (этому соответствует второе слагаемое в квадратных скобках, либо еще нет (первое слагаемое).

Сравнивая (8) и (9), получим:

$$\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{r}_2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)\frac{\varepsilon_1\mathbf{r}_1 + \varepsilon_2\mathbf{r}_2}{\varepsilon} - \mathbf{kr}.$$

Отсюда следует

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}_2\varepsilon_1 - \mathbf{p}_1\varepsilon_2}{\varepsilon}, \qquad k_x = \frac{p_{2x}\varepsilon_1 - p_{1x}\varepsilon_2}{\varepsilon}, \qquad k_y = p_{2y} = -p_{1y}, \qquad k_z = 0. \tag{10}$$

В СЦИ решение (9) имеет вид:

$$\Psi_0(t_0, \mathbf{r}_0) = \exp(-i\varepsilon_0 t_0)[\exp(-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_0) + A_0\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_0)], \tag{11}$$

где

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{02} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k_0}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k_0}^2}\,.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_0} - \sqrt{m_1^2 - \nabla_0^2} - \sqrt{m_2^2 - \nabla_0^2} - U(\rho)\right]\Psi(t_0, \mathbf{r}_0) = 0, \tag{12}$$

где ∇_0 — символ градиента по координатам вектора $\mathbf{r}_0$. Скорость V СЦИ относительно системы K, очевидно, направлена по вектору $\mathbf{P}$. Будем считать это направление направлением оси X. Преобразования Лоренца от K к СЦИ приводят к равенствам:

$$p_{1x} = \frac{-k_{0x} + V\varepsilon_{01}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad p_{2x} = \frac{k_{0x} + V\varepsilon_{02}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad p_{1y} = -p_{2y} = -k_{0y}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 + VP}{\sqrt{1 - V^2}} \tag{13}$$

Следовательно,

$$P = P_x = \frac{V\varepsilon_0}{\sqrt{1-V^2}}\,, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-V^2}}\,, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - P^2}\,, \quad V = \frac{P}{\varepsilon}\,. \qquad (14)$$

Отсюда, и из (13) получаем:

$$k_{0x} = \frac{p_{2x}\varepsilon_1 - p_{1x}\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = k_x\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\,, \qquad k_{0y} = -p_{1y} = p_{2y}. \qquad (15)$$

Координаты и время события столкновения частиц в системе K выражаются через время t_0 в СЦИ:

$$R_x = \frac{t_0 V}{\sqrt{1-V^2}}, \qquad R_y = R_z = 0, \qquad t = \frac{t_0}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Используя преобразования Лоренца для переменных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$:

$$x_i = \frac{x_i^0 + Vt^0}{\sqrt{1-V^2}}, \qquad y_i = y_{i0}, \qquad z_i = z_{i0}, \qquad i = 1,\, 2,$$

получаем преобразования Лоренца для переменных t, $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$:

$$t = \frac{t^0}{\sqrt{1-V^2}}\,, R_x = \frac{Vt^0}{\sqrt{1-V^2}}\,, R_y = R_z = 0, \qquad (16)$$

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1-V^2}}\,, y = y_0, z = z_0. \qquad (17)$$

Отсюда и из (14) следует инвариантность четырехмерного псевдоевклидова скалярного произведения

$$\mathbf{PR} - \varepsilon t = -\varepsilon_0 t_0,$$

а из (10), (15) и (14) — инвариантность трехмерного евклидова скалярного произведения

$$\mathbf{kr} = \mathbf{k}_0\mathbf{r}_0.$$

Теперь решение (9) можно представить в виде:

$$\Psi(t, \mathbf{R}, \mathbf{r}_0) = \exp(i\mathbf{PR} - i\varepsilon t)[\exp(-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_0) + A_0\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_0)], \qquad (18)$$

Действительно, физическая система, состоящая из двух сталкивающихся частиц, характеризуется ее полным 4-импульсом в произвольной инерциальной системе отсчета и переданным при столкновении 3-импульсом в СЦИ. Им соответствуют время и координаты точки столкновения в K-системе и разность радиусов-векторов в СЦИ. Теперь можно написать уравнение, которому удовлетворяет функция (18) в области, где частицы не взаимодействуют:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\left(\sqrt{m_1^2-\nabla_0^2}+\sqrt{m_2^2-\nabla_0^2}+U_0(\rho_0)\right)^2-\nabla_R^2}\right]\Psi(t,\mathbf{R},\mathbf{r}_0)=0, \quad (19)$$

где ∇_0 — градиент по координатам вектора $\mathbf{r}_0$, ∇_R — градиент по координатам вектора $\mathbf{R}$, ρ_0 — расстояние между частицами в СЦИ.

В уравнение (19) входит оператор, являющийся функцией двух дифференциальных операторов ∇_0 и ∇_R. При этом оператор

$$\sqrt{m_1^2-\nabla_0^2}+\sqrt{m_2^2-\nabla_0^2}+U_0(\rho_0)$$

относится только к СЦИ, следовательно, он инвариантен и аналогичен массе покоя одной частицы. Поэтому уравнение (19) инвариантно относительно преобразований Лоренца от инерциальной системы K к инерциальной системе K'. Если система K' движется относительно системы K со скоростью V, направленной вдоль оси X, то эти преобразования имеют вид:

$$t'=\frac{t-VR_x}{\sqrt{1-V^2}}, \quad R'_x=\frac{R_x-Vt}{\sqrt{1-V^2}}, \quad R'_y=R_y, \quad R'_z=R_z. \quad (20)$$

$$x'_0=x_0, \quad y'_0=y_0, \quad z'_0=z_0. \quad (21)$$

Эти преобразования определяют приводимое представление группы Лоренца и они обратимы.

3 Разделение переменных

Переменные t, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}_0$ в уравнении (19) разделяются. Используя подстановку

$$\Psi(t,\mathbf{R},\mathbf{r}_0)=\psi(\varepsilon,\mathbf{P},\mathbf{r}_0)\exp[i(\mathbf{PR}-\varepsilon t)],$$

получаем уравнение:

$$\left[\varepsilon - \sqrt{\left(\sqrt{m_1^2-\nabla_0^2}+\sqrt{m_2^2-\nabla_0^2}+U_0(\rho_0)\right)^2+\mathbf{P}^2}\right]\psi(\varepsilon,\mathbf{P},\mathbf{r}_0)=0. \quad (22)$$

Нетрудно показать, что это уравнение эквивалентно уравнению:

$$\left[\omega - \sqrt{m_1^2 - \nabla_0^2} - \sqrt{m_2^2 - \nabla_0^2} - U_0(\rho_0)\right]\psi(\omega, \mathbf{r}_0) = 0, \tag{23}$$

где

$$\omega = \varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - \mathbf{P}^2}.$$

Поскольку потенциал взаимодействия сферически симметричен, угловая зависимость отделяется. Подстановка

$$\psi(\omega, \mathbf{r}_0) = \Phi(\omega, l, \rho_0) Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ — сферические функции, приводит к уравнению:

$$\left[\sqrt{\varepsilon^2 - \mathbf{P}^2} - \sqrt{m_1^2 - \frac{1}{\rho_0^2}\frac{d}{d\rho_0}\rho_0^2\frac{d}{d\rho_0} + \frac{l(l+1)}{\rho_0^2}} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{m_2^2 - \frac{1}{\rho_0^2}\frac{d}{d\rho_0}\rho_0^2\frac{d}{d\rho_0} + \frac{l(l+1)}{\rho_0^2}} - U_0(\rho_0)\right]\Phi(\omega, l, \rho_0) = 0, \quad \forall\rho > 0. \tag{24}$$

Поскольку в дальнейшем предполагается переход к пределу нулевого радиуса взаимодействия, будем рассматривать только уравнение для функции

$$\chi(\omega, \rho_0) = \rho_0 \Phi(\omega, 0, \rho_0)$$

при нулевом орбитальном моменте $l = 0$:

$$\left[\omega - \sqrt{m_1^2 - \partial^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial^2} - U_0(\rho_0)\right]\chi(\omega, \rho_0) = 0, \quad \forall\rho > 0, \tag{25}$$

где

$$\partial \equiv \frac{d}{d\rho_0}.$$

Необходимо еще сформулировать граничные условия, которые вместе с уравнением (22) определяют краевую задачу с вещественным спектром. В работе [9] показано, что уравнение (25) описывает упругое столкновение двух бесспиновых частиц в СЦИ, если радиус взаимодействия a устремить к нулю:

$$\left[\omega - \sqrt{m_1^2 - \partial^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial^2}\right]\chi(\omega, \rho_0) = 0, \quad \forall\rho > 0 \tag{26}$$

и кроме условия ограниченности решения поставить граничное условие:

$$\lim_{\rho_0 \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 - \partial^2}}\,\partial + \frac{1}{\sqrt{m_2^2 - \partial^2}}\,\partial - g\right)\chi(\omega, \rho_0) = 0. \tag{27}$$

Если $g > 0$, то взаимодействие между частицами носит характер отталкивания, и они не могут образовывать связанное состояние, если же $g < 0$, связанное состояние существует, его энергия определяется формулой:

$$\omega = \sqrt{m_1^2 - g^2} + \sqrt{m_2^2 - g^2} < m_1 + m_2.$$

С точки зрения математики точка $\rho_0 = 0$ является особой точкой, причем реализуется случай точки Вейля [6], а условие (27) определяет самосопряженное расширение оператора

$$H = \sqrt{m_1^2 - \partial^2} + \sqrt{m_2^2 - \partial^2}$$

на полупрямой $\rho_0 > 0$.

Решив краевую задачу в СЦИ, можно либо найти сечение рассеяния в СЦИ и преобразовать выражение для него в любую инерциальную систему отсчета, как это сделано в работе [9], либо перейти в такую систему с помощью преобраований, обратных преобразованиям (20) и (21).

Итак, показано, что отсутствие в двухчастичном релятивистском уравнении Шредингера явной симметрии между пространством и временем не препятствует инвариантному характеру описания этим уравнением взаимодействия двух бесспиновых частиц. Показано, что это уравнение допускает переход к независимым переменным, часть которых описывает физическую систему в СЦИ, а другие описывают движение СЦИ относительно произвольной инерциальной системы отсчета.

Список литературы

[1] **Бьеркен Дж., Дрелл С. Д.** Релятивистская квантовая теория. Т. 1. Релятивистская квантовая механика. М., 1978, 297 с.

[2] **Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.** Квантовая теория поля, Т. 1. М., 1984, 448 с.

[3] **Дирак П. А. М.** Принципы квантовой механики М., 1979, 408 с.

[4] **Олвер П.** Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989, 639 с.

[5] **фон Нейман И.** Математические основы квантовой механики. М., 1964, 367 с.

[6] **Рихтмаер Р.** Принципы современной математической физики. М., 1982, 482 с.

[7] **Трев Ф.** Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. М., 1984, 359 с.

[8] **Лагодинский В. М.** Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка. Диссерт. на соискания уч. степени канд. физ.-мат. наук. СПб. 2005, 110 с.

[9] **Головин А. В., Лагодинский В. М.** Задача об упругом столкновении двух бесспиновых частиц при их локальном взаимодействии в релятивистской квантовой механике. Вестник СПбГУ сер. 4 Физика, химия, 2017, Т. 4(62), вып. 3, с. 249-263.