ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.В.Кукушкина
Россия, 620083, Екатеринбург, пр.Ленина, д.51,
Уральский государственный университет им.А.М.Горького,
Кафедра теоретической механики,
e-mail:kukushkiny@mail.ur.ru

Аннотация.

В работе для линейных нестационарных систем функционально-разностных уравнений установлены условия существования и единственности решений начальной задачи Коши в пространстве непрерывных функций. Получена формула, дающая аналитическое представление общего решения изучаемой системы функционально-разностных уравнений. Рассмотрены методы нахождения указанного представления. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

1 Введение

Рассматривается линейная неоднородная система функционально-разностных уравнений

$$x(t) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\, x(t+\vartheta) + h(t), \tag{1}$$

где $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $h \in \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; матричная функция $\eta(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r, 0]$, $\eta(t, 0) = 0$.

Для указанной системы изучается начальная задача Коши в пространстве непрерывных функций. Пусть начальный момент $t_0 \in \mathbb{R}$ и начальная функция $\varphi \in \mathbb{C}([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$. Функция $x \in \mathbb{C}([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ является решением начальной задачи Коши, если $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$ и для нее равенство (1) выполняется тождественно на полуоси $(t_0, +\infty)$.

Для существования непрерывного решения начальной задачи Коши необходимо, чтобы выполнялось условие согласования

$$\varphi(t_0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t_0,\vartheta)\, \varphi(t_0+\vartheta) + h(t_0). \tag{2}$$

Условие (2) при заданной функции h накладывает ограничения на выбор начальной функции φ.

Функционально-разностное уравнение обобщает понятие разностного уравнения с непрерывным временем также как функционально-дифференциальное уравнение обобщает понятие дифференциально-разностного уравнения. В работе для линейных нестационарных систем функционально-разностных уравнений установлены условия существования и единственности решений начальной задачи Коши в пространстве непрерывных функций. Получена формула, дающая аналитическое представление общего решения изучаемой системы функционально-разностных уравнений. Рассмотрены методы нахождения указанного представления. Полученные результаты иллюстрируются примерами. Указанный круг вопросов исследовался для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений [1]-[4]. Для линейных систем разностных уравнений с непрерывным временем рассматриваемые проблемы изучались в работах [5]-[7]. Специальные решения линейных разностных уравнений с непрерывным временем построены в работе [8]. Для линейных систем разностных уравнений с дискретным временем решения рассматриваемых проблем изложены в работах [9],[10]. Для линейных стационарных систем функционально-разностных уравнений указанный круг вопросов исследовался в работе [11].

2 Существование и единственность решения начальной задачи Коши

Пусть функция $x \in \mathbb{C}\left(\left[t_0 - r, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right)$ является решением начальной задачи Коши для начального момента $t_0 \in \mathbb{R}$ и начальной функции $\varphi \in \mathbb{C}\left(\left[t_0 - r, t_0\right], \mathbb{R}^n\right)$ системы функционально-разностных уравнений (1) с функцией $h \in \mathbb{C}\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right)$. Введем следующие обозначения: $\widetilde{x}\left(t\right) = x\left(t\right) - \varphi\left(t_0\right)$, $t \geq t_0$, $\widetilde{\varphi}\left(s\right) = \varphi\left(s\right) - \varphi\left(t_0\right)$, $s \in \left[t_0 - r, t_0\right]$, $\widetilde{h}\left(t\right) = h\left(t\right) - h\left(t_0\right)$, $t \geq t_0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right) = \left\{\widetilde{x} : \ \widetilde{x} \in \mathbb{C}\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right), \quad \widetilde{x}\left(t_0\right) = 0\right\}, \\ &\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0 - r, t_0\right], \mathbb{R}^n\right) = \left\{\widetilde{\varphi} : \ \widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}\left(\left[t_0 - r, t_0\right], \mathbb{R}^n\right), \quad \widetilde{\varphi}\left(t_0\right) = 0\right\}, \\ &\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right) = \left\{\widetilde{h} : \ \widetilde{h} \in \mathbb{C}\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right), \quad \widetilde{h}\left(t_0\right) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Утверждение 2.1. *Для заданного начального момента $t_0 \in \mathbb{R}$, начальной функции $\varphi \in \mathbb{C}\left(\left[t_0 - r, t_0\right], \mathbb{R}^n\right)$ и функции $h \in \mathbb{C}\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right)$ функция $x \in \mathbb{C}\left(\left[t_0 - r, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right)$ является решением начальной задачи Коши системы функционально-разностных уравнений (1) тогда и только тогда, когда функция $\widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbb{R}^n\right)$ является решением уравнения*

$$\widetilde{x}\left(t\right) = \left(D\widetilde{x}\right)\left(t\right) + \left(H\widetilde{\varphi}\right)\left(t\right) + \left(H_0\varphi\left(t_0\right)\right)\left(t\right) + \widetilde{h}\left(t\right), \quad t \geq t_0. \tag{1}$$

Здесь оператор D определяется формулами:

$$\left(D\widetilde{x}\right)\left(t\right) = \begin{cases} \int_{t_0}^{t} d_s\eta\left(t, s - t\right)\widetilde{x}\left(s\right), & t_0 \leq t \leq t_0 + r, \\ \int_{t-r}^{t} d_s\eta\left(t, s - t\right)\widetilde{x}\left(s\right), & t > t_0 + r, \end{cases} \tag{2}$$

оператор H определяется формулами:

$$\left(H\widetilde{\varphi}\right)\left(t\right) = \begin{cases} \int_{t-r}^{t_0} d_s\eta\left(t, s - t\right)\widetilde{\varphi}\left(s\right) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta\left(t_0, s - t_0\right)\widetilde{\varphi}\left(s\right), & t_0 \leq t \leq t_0 + r, \\ -\int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta\left(t_0, s - t_0\right)\widetilde{\varphi}\left(s\right), & t > t_0 + r, \end{cases} \tag{3}$$

оператор H_0 определяется формулой:

$$\left(H_0\varphi\left(t_0\right)\right)\left(t\right) = \left(\eta\left(t_0, -r\right) - \eta\left(t, -r\right)\right)\varphi\left(t_0\right), \quad t \geq t_0. \tag{4}$$

Доказательство. После преобразования системы уравнений (1) и условия согласования (2) при $t_0 \le t \le t_0 + r$ находим

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{h}(t) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\,\widetilde{\varphi}(s) + (\eta(t_0,-r) - \eta(t,-r))\,\varphi(t_0) +$$
$$\int_{t_0}^{t} d_s\eta(t, s-t)\,\widetilde{x}(s) + \int_{t-r}^{t_0} d_s\eta(t, s-t)\,\widetilde{\varphi}(s),$$

при $t > t_0 + r$

$$\widetilde{x}(t) = \int_{t-r}^{t} d_\vartheta\eta(t, s-t)\,\widetilde{x}(s) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\,\widetilde{\varphi}(s) +$$
$$+ (\eta(t_0,-r) - \eta(t,-r))\,\varphi(t_0) + \widetilde{h}(t).$$

Следовательно, системе (1) можно поставить в соответствие уравнение (1), где оператор D определяется формулами (2), оператор H определяется формулами (3), а оператор H_0 – формулой (4). Утверждение доказано.

Для любого $\Delta > 0$ рассмотрим сужение уравнения (1) на отрезок $[t_0, t_0 + \Delta]$. Имеем

$$\widetilde{x}(t) = (D_\Delta\widetilde{x})(t) + (H_\Delta\widetilde{\varphi})(t) + (H_{0\Delta}\varphi(t_0))(t) + \widetilde{h}(t), \quad t \in [t_0, t_0+\Delta]. \tag{5}$$

Для сужения функций $\widetilde{x}$ и $\widetilde{h}$ на отрезок $[t_0, t_0 + \Delta]$ оставляем те же обозначения, полагая что $\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$. Здесь при $\Delta \le r$

$$(D_\Delta\widetilde{x})(t) = \int_{t_0}^{t} d_s\eta(t, s-t)\,\widetilde{x}(s), \quad t_0 \le t \le t_0 + \Delta, \tag{6}$$

$$(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t) = \int_{t-r}^{t_0} d_s\eta(t, s-t)\,\widetilde{\varphi}(s) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\,\widetilde{\varphi}(s), t_0 \le t \le t_0 + \Delta,$$
$$(H_{0\Delta}\varphi(t_0))(t) = (\eta(t_0,-r) - \eta(t,-r))\,\varphi(t_0), \quad t_0 \le t \le t_0 + \Delta,$$

а при $\Delta > r$

$$(D_\Delta\widetilde{x})(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^{t} d_s\eta(t, s-t)\,\widetilde{x}(s), & t_0 \le t \le t_0 + r, \\ \int_{t-r}^{t} d_s\eta(t, s-t)\,\widetilde{x}(s), & t_0 + r < t \le t_0 + \Delta, \end{cases}$$

$$(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t) = \begin{cases} \int_{t-r}^{t_0} d_s\eta(t, s-t)\,\widetilde{\varphi}(s) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\,\widetilde{\varphi}(s), t_0 \le t \le t_0 + r, \\ -\int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0, s-t_0)\,\widetilde{\varphi}(s), \quad t_0 + r < t \le t_0 + \Delta, \end{cases}$$
$$(H_{0\Delta}\varphi_{t_0})(t) = (\eta(t_0,-r) - \eta(t,-r))\,\varphi(t_0), \quad t_0 \le t \le t_0 + \Delta.$$

Продолжим функцию η по второму аргументу на всю числовую ось, полагая: $\eta(t,s)=0$ при $s\geq 0$ и $\eta(t,s)=\eta(t,-r)$ при $s\leq -r$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда значения операторов D_Δ, H_Δ и $H_{0\Delta}$ при любом $\Delta>0$ можно определить формулами:

$$(D_\Delta\widetilde{x})(t)=\int_{t_0}^{t} d_s\eta(t,s-t)\,\widetilde{x}(s),\quad t_0\leq t\leq t_0+\Delta,$$

$$(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t)=\int_{t-r}^{t_0} d_s\eta(t,s-t)\,\widetilde{\varphi}(s)-\int_{t_0-r}^{t_0} d_s\eta(t_0,s-t_0)\,\widetilde{\varphi}(s),t_0\leq t\leq t_0+\Delta,$$

$$(H_{0\Delta}\varphi(t_0))(t)=(\eta(t_0,-r)-\eta(t,-r))\,\varphi(t_0),\quad t_0\leq t\leq t_0+\Delta.$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1) функция $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-r,0]}\eta(t,z)$ *ограничена на любом отрезке числовой оси,*

2) для любого $\tau\in\mathbb{R}$ *отображение* $t\to\int_{t-r}^{\tau}\eta(t,s-t)\,ds$ *непрерывено на любом отрезке числовой оси.*

Тогда $D_\Delta:\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $\widetilde{x}\in\mathbb{AC}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$, где $\mathbb{AC}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)=\{\widetilde{x}:\ \widetilde{x}\in\mathbb{AC}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n),\quad \widetilde{x}(t_0)=0\}$. Преобразуем формулы, определяющие значения оператора D_Δ:

$$(D_\Delta\widetilde{x})(t)=\int_{t_0}^{t} d_s\eta(t,s-t)\,\widetilde{x}(s)=\int_{t_0}^{t_0+\Delta} d_s\eta(t,s-t)\,\widetilde{x}(s)=$$

$$=\eta(t,s-t)\,\widetilde{x}(s)\,\Big|_{t_0}^{t_0+\Delta}-\int_{t_0}^{t_0+\Delta}\eta(t,s-t)\,\widetilde{x}\prime(s)\,ds=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_0+\Delta}\eta(t,s-t)\,\widetilde{x}\prime(s)\,ds,\quad t_0\leq t\leq t_0+\Delta.$$

Определим значения оператора $\widetilde{D}_\Delta$ следующими формулами:

$$\left(\widetilde{D}_\Delta y\right)(t)=-\int_{t_0}^{t_0+r}\eta(t,s-t)\,y(s)\,ds,$$
$$t\in[t_0,t_0+\Delta],\quad y\in\mathbb{L}_1([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n).$$

Для произвольной функции $\widetilde{x}\in\mathbb{AC}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ функция $D_\Delta\widetilde{x}\in\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда функция $\widetilde{D}_\Delta y\in\mathbb{C}_{t_0}([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$ для функции $y\in\mathbb{L}_1([t_0,t_0+\Delta],\mathbb{R}^n)$, $y(s)=\widetilde{x}\prime(s)$, $s\in[t_0,t_0+\Delta]$.

Докажем, что оператор $\widetilde{D}_\Delta : \mathbb{L}_1([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ и является непрерывным.

Для оператора $\widetilde{D}_\Delta$ выполнены условия:

A) $\underset{s,t\in[t_0,t_0+\Delta]}{vrai\sup} |\eta(t, s-t)| < \infty$,

B) функция $t \to \int_{t_0}^{\tau} \eta(t, s-t)\, ds$ непрерывна при любом $\tau \in [t_0, t_0+\Delta]$ на отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$.

Действительно, по определению вариации $\underset{z\in[-r,0]}{\operatorname{var}} \eta(t,z) \geq |\eta(t,-r) - \eta(t,z)| + |\eta(t,z) - \eta(t,0)| \geq 2|\eta(t,z)| - |\eta(t,-r)|$. Тогда, $|\eta(t,z)| \leq \frac{1}{2} \underset{z\in[-r,0]}{\operatorname{var}} \eta(t,z) + \frac{1}{2}|\eta(t,-r)|$. Функции $\underset{z\in[-r,0]}{\operatorname{var}} \eta(t,z)$ и $\eta(t,-r)$ ограничены по условию 1) леммы 2.1 на $[t_0, t_0+\Delta]$. Тогда $\sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta], z\in[-r,0]} |\eta(t,z)| < \infty$. Имеем $\underset{t,s\in[t_0,t_0+\Delta]}{vrai\sup} |\eta(t,s-t)| \leq$
$\underset{t\in[t_0,t_0+\Delta], s\in[t_0,t_0+r]}{vrai\sup} |\eta(t,s-t)| = \underset{t\in[t_0,t_0+\Delta], z\in[t_0-t,t_0-t+r]}{vrai\sup} |\eta(t,z)|$

$\leq \underset{t\in[t_0,t_0+\Delta], z\in[-r,0]}{vrai\sup} |\eta(t,z)| < \infty$. Справедливость условия A) доказана. Для любого $\tau \in \mathbb{R}$ имеем $\int_{t_0}^{\tau} \eta(t,s-t)\,ds = \int_{t-r}^{\tau} \eta(t,s-t)\,ds - \int_{t-r}^{t_0} \eta(t,s-t)\,ds$ при $t \in [t_0, t_0+\Delta]$. Следовательно, в силу условия 2) леммы 2.1 условие B) для оператора $\widetilde{D}_\Delta$ выполняется.

Условия A) и B) гарантируют, что оператор $\widetilde{D}_\Delta : \mathbb{L}_1([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ и является непрерывным ([12], с.100).

Докажем теперь, что оператор $D_\Delta : \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$. Для произвольного $t \in [t_0, t_0+\Delta]$ введем оператор $D_{\Delta t} : \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ с помощью формулы $D_{\Delta t}\widetilde{x} = (D_\Delta \widetilde{x})(t)$. Однопараметрическое семейство операторов $D_{\Delta t}$, $t \in [t_0, t_0+\Delta]$, удовлетворяет условиям:

C) для любого элемента $\widetilde{x} \in \mathbb{AC}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ функция $D_{\Delta t}\widetilde{x}$ аргумента t непрерывна на $[t_0, t_0+\Delta]$,

D) для любого элемента $\widetilde{x} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$ функция $D_{\Delta t}\widetilde{x}$ аргумента t ограничена на $[t_0, t_0+\Delta]$.

Действительно, имеет место равенство $D_{\Delta t}\widetilde{x} = \left(\widetilde{D}_\Delta y\right)(t)$ при $t \in [t_0, t_0+\Delta]$, $y(t) = \widetilde{x}'(t)$, $\widetilde{x} \in \mathbb{AC}_{t_0}([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n)$. Справедливость условия C) следует из непрерывности функции $\left(\widetilde{D}_\Delta y\right)(t)$ на отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$.

Справедливость условия D) следует из неправенств

$$\sup_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\left|D_{\Delta t}\widetilde{x}\right| \leq \sup_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\operatorname*{var}_{s\in[t_0,t]}\eta\left(t,s-t\right)\max_{s\in[t_0,t_0+\Delta]}\left|\widetilde{x}\left(s\right)\right| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\operatorname*{var}_{z\in[-r,0]}\eta\left(t,z\right)\max_{s\in[t_0,t_0+\Delta]}\left|\widetilde{x}\left(s\right)\right|.$$

Условия C) и D) гарантируют, что оператор $D_\Delta : \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0,t_0+\Delta\right],\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0,t_0+\Delta\right],\mathbb{R}^n\right)$ ([13], с. 73). Лемма доказана.

Следствие 2.1. *При выполнении условий леммы 2.1 оператор* $D_\Delta : \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0,t_0+\Delta\right],\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0,t_0+\Delta\right],\mathbb{R}^n\right)$ *непрерывен.*

Доказательство. Имеем

$$\left\|D_\Delta\right\| \leq \sup_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\operatorname*{var}_{s\in[t_0,t]}\eta\left(t,s-t\right) = \sup_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\operatorname*{var}_{z\in[t_0-t,0]}\eta\left(t,z\right) \leq$$
$$\leq \begin{cases} \sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\operatorname*{var}\limits_{z\in[-\Delta,0]}\eta\left(t,z\right), & 0<\Delta\leq r,\\ \sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta]}\operatorname*{var}\limits_{z\in[-r,0]}\eta\left(t,z\right), & \Delta>r.\end{cases}$$

Следствие доказано.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия:*

1) функция $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-r,0]}\eta\left(t,z\right)$ *ограничена на любом отрезке числовой оси,*

2) отображение $t\to\eta\left(t,-r\right)$ *непрерывно на* числовой оси,

3) для любого $\tau\in\mathbb{R}$ *отображение* $t\to\int_{t-r}^{\tau}\eta\left(t,s-t\right)ds$ *непрерывено на любом отрезке числовой оси.*

Тогда $H_\Delta : \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0-r,t_0\right],\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0,t_0+\Delta\right],\mathbb{R}^n\right)$ *и* $H_{0\Delta} : R^n \to \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0,t_0+\Delta\right],\mathbb{R}^n\right)$.

Доказательство. Справедливость утверждения леммы для оператора $H_{0\Delta}$ следует из условия 2). Для доказательства утверждения леммы об операторе H_Δ достаточно показать , что оператор

$$\left(\widetilde{H}_\Delta\widetilde{\varphi}\right)(t) = \int_{t-r}^{t_0}d_s\eta\left(t,s-t\right)\widetilde{\varphi}\left(s\right) = \int_{t_0-r}^{t_0}d_s\eta\left(t,s-t\right)\widetilde{\varphi}\left(s\right), t_0\leq t\leq t_0+\Delta,$$

удовлетворяет условию $\widetilde{H}_\Delta : \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0-r,t_0\right],\mathbb{R}^n\right) \to C\left(\left[t_0,t_0+\Delta\right],\mathbb{R}^n\right)$. Доказательство последнего утверждения проводится по схеме, используемой при доказательстве леммы 2.1. Для произвольной функции $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{AC}_{t_0}\left(\left[t_0-r,t_0\right],\mathbb{R}^n\right)$, где $\mathbb{AC}_{t_0}\left(\left[t_0-r,t_0\right],\mathbb{R}^n\right) =$

$\{\widetilde{\varphi}: \ \widetilde{\varphi} \in \mathbb{AC}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right), \quad \widetilde{\varphi}(t_0) = 0\}$, имеем

$$\left(\widetilde{H}_\Delta \widetilde{\varphi}\right)(t) = -\eta(t, -r)\, \widetilde{\varphi}(t_0 - r) - \int_{t_0 - r}^{t_0} \eta(t, s - t)\, \widetilde{\varphi}'(s)\, ds, \quad t_0 \le t \le t_0 + \Delta.$$

Учитывая условия 2) и 3) леммы устанавливаем, что $\widetilde{H}_\Delta$: $\mathbb{AC}_{t_0}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right) \ \rightarrow \ \mathbb{C}\left([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n\right)$. Можно показать, что для однопараметрического семейства операторов $\widetilde{H}_{\Delta t} : \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, определяемых формулами: $H_{\Delta t}\widetilde{\varphi} = (H_\Delta \widetilde{\varphi})(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right)$, выполняются условия теоремы [13]. Следовательно, утверждение леммы доказано.

Следствие 2.2. *При выполнении условий леммы 2.2 операторы* H_Δ : $\mathbb{C}_{t_0}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n\right)$ *и* $H_{0\Delta} : R^n \rightarrow \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n\right)$ *непрерывны.*

Действительно, для нормы оператора H_Δ справедлива оценка:

$$\|H_\Delta\| \le \sup_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \operatorname*{var}_{s \in [t - r, t_0]} \eta(t, s - t) + \operatorname*{var}_{s \in [t_0 - r, t_0]} \eta(t_0, s - t_0) =$$

$$= \sup_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \operatorname*{var}_{z \in [-r, t_0 - t]} \eta(t, z) + \operatorname*{var}_{z \in [-r, 0]} \eta(t, z) \le 2 \sup_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \operatorname*{var}_{z \in [-r, 0]} \eta(t, z).$$

Для нормы оператора $H_{0\Delta}$ справедлива оценка $\|H_{0\Delta}\| \le 2 \max\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} |\eta(t, -r)|$.

На основании утверждения, лемм и следствий доказана теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $h \in \mathbb{C}\left([t_0, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$, $\varphi \in \mathbb{C}\left([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n\right)$, *выполнено условие согласования (2) и*

1) функция $\operatorname*{var}\limits_{z \in [-r, 0]} \eta(t, z)$ *ограничена на любом отрезке числовой оси,*

2) отображение $t \rightarrow \eta(t, -r)$ *непрерывно на* числовой оси,

3) для любого $\tau \in \mathbb{R}$ *отображение* $t \rightarrow \int_{t-r}^{\tau} \eta(t, s - t)\, ds$ *непрерывено на любом отрезке числовой оси,*

4) $\operatorname*{var}\limits_{z \in [-\Delta, 0]} \eta(t, z) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ *равномерно по* t *на любом конечном отрезке числовой оси.*

Тогда начальная задача Коши для уравнения (1) имеет единственное непрерывное решение.

Следствие 2.3. *При выполнении условий теоремы 2.1. для любого* $\Delta >$ 0 *существует линейный непрерывный вольтерровый по Тихонову оператор* $(I - D_\Delta)^{-1} : \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n\right)$.

Пример 2.1. *Рассмотрим скалярное разностное уравнение с непрерывным временем*

$$x\left(t\right)=sign\left(\sin\left(\pi t\right)\right)x\left(t-1\right),$$

где $sign\left(a\right)=1,\ a>0;\ sign\left(a\right)=0,\ a=0,\ sign\left(a\right)=-1,\ a<0.$

Здесь $r=1$, $\eta\left(t,\vartheta\right)=\begin{cases}0, & -1<\vartheta\leq 0,\\ -sign\left(\sin\left(\pi t\right)\right), & \vartheta=-1.\end{cases}$ Функция $\eta\left(t,-1\right)=-sign\sin\left(\pi t\right)$ имеет разрывы первого рода для целых значений t. Поэтому условие 2) теоремы 2.1 нарушено.

Построим решение начальной задачи Коши для начального момента $t_0=0$ и произвольной непрерывной начальной функции φ на отрезке $[-1,0]$, удовлетворяющей условию $\varphi\left(0\right)=0$. Используя метод шагов, имеем при $t\in(0,1]$ $x_1\left(t\right)=sign\left(\sin\left(\pi t\right)\right)\varphi\left(t-1\right)=\varphi\left(t-1\right)$; при $t\in(1,2]$ $x_2\left(t\right)=sign\left(\sin\left(\pi t\right)\right)x_1\left(t-1\right)=-\varphi\left(t-2\right)$; при $t\in(n-1,n]$, $n>2$, $x_n\left(t\right)=sign\left(\sin\left(\pi t\right)\right)x_{n-1}\left(t-1\right)=\left(-1\right)^{n-1}\varphi\left(t-n\right)$.

Построенное решение имеет разрывы первого рода в точках $t\in\mathbb{N}\cup 0$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел), если $\varphi\left(-1\right)\neq 0$.

Пример 2.2. *Рассмотрим систему функционально-разностных уравнений*

$$x\left(t\right)=Ax\left(\left[t-1\right]\right),$$

где A – постоянная матрица размерности $n\times n$, $\det A\neq 0$, $[a]$ – целая часть числа a.

Здесь $r=2$, $\eta\left(t,\vartheta\right)=\begin{cases}0, & \vartheta\in\left(-1-\left\{t\right\},0\right],\\ -A1\left(-t-\vartheta\right), & \vartheta\in\left[-2,-1-\left\{t\right\}\right],\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, $\{t\}$ – дробная часть числа t, $1\left(\cdot\right)$ – функция Хевисайда.

Покажем, что условие 3) теоремы 2.1 не выполняется на отрезке $[0,2]$ при $\tau=0$, т.е. отображение $t\to\int_{t-2}^{0}\eta\left(t,s-t\right)ds$ не является непрерывным на отрезке $[0,2]$. Находим

$$\int_{t-2}^{0}\eta\left(t,s-t\right)ds=A\left(\left\{t\right\}-1\right),\quad t\in\left[0,2\right].$$

Таким образом, при $t=1$ функция $\int_{t-2}^{0}\eta\left(t,s-t\right)ds$ имеет разрыв первого рода.

Запишем решение начальной задачи Коши для начального момента $t_0=0$ и начальной функции $\varphi\in\mathbb{C}\left(\left[-2,0\right],\mathbb{R}^n\right)$, удовлетворяющей условию согласования $\varphi\left(0\right)=A\varphi\left(-1\right)$. Имеем

$$x\left(t\right)=A^{[t]+1}\varphi\left(-1\right),\quad t>0.$$

Построенное решение имеет разрывы первого рода в точках $t \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел), если $A\varphi(-1) \neq \varphi(-1)$.

3 Представления решений нестационарных функционально-разностных уравнений

При выполнении условий теоремы 2.1 решение уравнения (5) определяется формулой

$$\widetilde{x}(t) = x^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}}(t) + x^{\Delta}_{\widetilde{h}}(t) + x^{\Delta}_{0}(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta],$$

где $x^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}} = (I - D_{\Delta})^{-1} H_{\Delta}\widetilde{\varphi}$, $x^{\Delta}_{\widetilde{h}} = (I - D_{\Delta})^{-1}\widetilde{h}$, $x^{\Delta}_{0} = (I - D_{\Delta})^{-1} H_{0\Delta}\varphi(t_0)$. Здесь функция $x^{\Delta}_{\widetilde{h}}$ является непрерывным решением системы (1) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ с начальной функцией $\varphi = 0$ и непрерывной неоднородностью $h = \widetilde{h}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{h}(t_0) = 0$, т.е. $\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$; функция $\widetilde{x}^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}}$ является непрерывным решением системы (1) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ с непрерывной начальной функцией $\varphi = \widetilde{\varphi}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{\varphi}(t_0) = 0$, т.е. $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}_{t_0}([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$ и неоднородностью h, определяемой формулой $h(t) = h(t_0) = -\int_{t_0 - r}^{t_0} d_{\vartheta}\eta(t_0, \vartheta - t_0)\widetilde{\varphi}(\vartheta)$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$; функция x^{Δ}_{0} является непрерывны решением системы (1) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ с начальной функцией $\varphi(\vartheta) = \varphi(t_0)$, $\vartheta \in [t_0 - r, t_0]$, и неоднородностью, определяемой формулой $h(t) = h(t_0) = (I_n + \eta(t_0, -r))\varphi(t_0)$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, где I_n – единичная матрица размерности $n \times n$.

Используя формулу представления линейного непрерывного оператора в пространстве непрерывных функций ([13], с.556) и конечномерность области определения оператора $H_{0\Delta}$, запишем

$$x^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}}(t) = \int_{t_0 - r}^{t_0} dT(t, s, t_0, \Delta)\widetilde{\varphi}(s), \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta], \tag{1}$$

$$x^{\Delta}_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} dS(t, s, t_0, \Delta)\widetilde{h}(s), \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta], \tag{2}$$

$$x^{\Delta}_{0}(t) = V(t, t_0, \Delta)\varphi(t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

Здесь $T(t, t_0 - r, t_0, \Delta) = 0$, $S(t, t_0 + \Delta, t_0, \Delta) = 0$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta$; $\sup\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \operatorname*{var}\limits_{t_0 - r \leq s \leq t_0} T(t, s, t_0, \Delta) < \infty$, $\sup\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \operatorname*{var}\limits_{t_0 \leq s \leq t_0 + \Delta} S(t, s, t_0, \Delta) < \infty$; при любых $0 \leq r' < r$, $0 < \Delta' \leq \Delta$ функции $\int_{t_0 - r}^{t_0 - r'} T(t, s, t_0, \Delta)\,ds$, $\int_{t_0}^{t_0 + \Delta'} S(t, s, t_0, \Delta)\,ds$, $V(t, t_0, \Delta)$ непрерывны по t на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$.

Так как $x^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}}$, $x^{\Delta}_{\widetilde{h}}$, $x^{\Delta}_{0} \in \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n\right)$ при любых $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0-r, t_0], \mathbb{R}^n\right)$, $\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n\right)$ и $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$, то $T(t_0, s, t_0, \Delta) = 0$ при $s \in [t_0-r, t_0]$, $S(t_0, s, t_0, \Delta) = 0$ при $s \in [t_0, t_0+\Delta]$ и $V(t_0, t_0, \Delta) = 0$.

Из вольтерровости оператора $(I - D_\Delta)^{-1}$ и формулы (2) следует, что

$$x^{\Delta}_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t} dS(t, s, t_0, \Delta)\, \widetilde{h}(s), \quad t \in [t_0, t_0+\Delta]. \tag{3}$$

При использовании формулы (3) считаем, что $S(t, s, t_0, \Delta) = 0$ при $s \in [t, t_0+\Delta]$.

Лемма 3.1. *Функции T, S и V не зависят от Δ.*

Доказательство. Для $\Delta' > \Delta$ имеем $x^{\Delta'}_{\varphi}(t) = x^{\Delta}_{\varphi}(t)$, $x^{\Delta'}_{h_{\Delta'}}(t) = x^{\Delta}_{h_\Delta}(t)$ и $x^{\Delta}_{0}(t) = x^{\Delta'}_{0}(t)$ при $t \in [t_0, t_0+\Delta]$, если $h_{\Delta'}(t) = h_\Delta(t)$ при $t \in [t_0, t_0+\Delta]$. Следовательно, справедливы равенства

$$\int_{t_0-r}^{t_0} d\left(T(t, s, t_0, \Delta) - T(t, s, t_0, \Delta')\right) \widetilde{\varphi}(s) = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t} d\left(S(t, s, t_0, \Delta) - S(t, s, t_0, \Delta')\right) \widetilde{h}_\Delta(s) = 0,$$

$$\left(V(t, t_0, \Delta) - V(t, t_0, \Delta')\right) \varphi(t_0) = 0$$

при любых $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0-r, t_0], \mathbb{R}^n\right)$, $\widetilde{h}_\Delta \in \mathbb{C}_{t_0}\left([t_0, t_0+\Delta], \mathbb{R}^n\right)$, $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $T(t, s, t_0, \Delta) = T(t, s, t_0, \Delta') = T(t, s, t_0)$ при $s \in [t_0-r, t_0]$, $t \in [t_0, t_0+\Delta]$; $S(t, s, t_0, \Delta) = S(t, s, t_0, \Delta') = S(t, s, t_0)$ при $s \in [t_0, t]$, $t \in [t_0, t_0+\Delta]$; $V(t, t_0, \Delta) = V(t, t_0, \Delta') = V(t, t_0)$ при $t \in [t_0, t_0+\Delta]$. Лемма доказана.

Так как функции T и S не зависят от выбора длины Δ отрезка $[t_0, t_0+\Delta]$, то можно определить решения $x_{\widetilde{\varphi}}$, $x_{\widetilde{h}}$ и x_0 системы (1) на полуоси $[t_0, \infty)$.

Решение $x_{\widetilde{\varphi}}$ системы (1) с начальной функцией $\varphi = \widetilde{\varphi}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{\varphi}(t_0) = 0$, и неоднородностью h, определяемой формулой $h(t) = h(t_0) = -\int_{t_0-r}^{t_0} d_\vartheta \eta(t_0, \vartheta - t_0)\, \widetilde{\varphi}(\vartheta)$, $t \in [t_0, \infty)$, задается формулой

$$x_{\widetilde{\varphi}}(t) = \int_{t_0-r}^{t_0} dT(t, s, t_0)\, \widetilde{\varphi}(s), \quad t \geq t_0, \tag{4}$$

где $T(t, t_0-r, t_0) = 0$, $t \geq t_0$, $T(t_0, s, t_0) = 0$ при $s \in [t_0-r, t_0]$, при любом $\tau > t_0$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t \in [t_0, \tau)} \underset{t_0-r \leq s \leq t_0}{var} T(t, s, t_0) < \infty$ и при любом $0 \leq r' < r$ функция $\int_{t_0-r}^{t_0-r'} T(t, s, t_0)\, ds$ непрерывна по t на полуинтервале $[t_0, \infty)$.

Решение $x_{\widetilde{h}}$ системы (1) с начальной функцией $\varphi = 0$ и неоднородностью $h = \widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_0}\left(\left[t_0, t_0 + \Delta\right], \mathbb{R}^n\right)$ задается формулой

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t} dS(t, s, t_0)\,\widetilde{h}(s), \quad t \geq t_0, \tag{5}$$

где $S(t, s, t_0) = 0$ при $t_0 \leq t \leq s < \infty$, $S(t_0, s, t_0) = 0$ при $s \geq t_0$; при любом $\tau > t_0$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t \in [t_0, \tau]} \mathop{var}\limits_{t_0 \leq s \leq t} S(t, s, t_0) < \infty$ и функция $\int_{t_0}^{\tau} S(t, s, t_0)\,ds$ непрерывна по t на полуинтервале $[t_0, \infty)$.

Решение x_0 системы (1) с начальной функцией $\varphi(\vartheta) = \varphi(t_0)$, $\vartheta \in [t_0 - r, t_0]$, и неоднородностью, определяемой формулой $h(t) = h(t_0) = (I_n + \eta(t_0, -r))\,\varphi(t_0)$, $t \geq t_0$, задается формулой

$$x_0(t) = V(t, t_0)\,\varphi(t_0), \quad t \geq t_0,$$

где $V(t_0, t_0) = 0$ и функция $V(t, t_0)$ непрерывна по аргументу t на полуоси $[t_0, \infty)$.

Лемма 3.2. *Функция S не зависит от t_0.*

Доказательство. Пусть $x_{\widetilde{h}}^{t_0}$ решение (5), отвечающее начальному моменту t_0. Для $t_1 > t_0$ имеем $x_{\widetilde{h}}^{t_0}(t) = x_{\widetilde{h}}^{t_1}(t)$ при $t \in [t_1, \infty)$, если $\widetilde{h}(t) = 0$ при $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно,

$$x_{\widetilde{h}}^{t_0}(t) - x_{\widetilde{h}}^{t_1}(t) = \int_{t_0}^{t} dS(t, s, t_0)\,\widetilde{h}(s) - \int_{t_1}^{t} dS(t, s, t_1)\,\widetilde{h}(s) =$$
$$= \int_{t_1}^{t} d\left(S(t, s, t_0) - S(t, s, t_1)\right)\widetilde{h}(s) = 0$$

при любых $\widetilde{h} \in \mathbb{C}_{t_1}\left([t_1, \infty), \mathbb{R}^n\right)$. Тогда $S(t, s, t_1) = S(t, s, t_0) = S(t, s)$ при $s \in [t_1, t]$, $t \in [t_1, \infty)$. Лемма доказана.

Согласно доказанной лемме имеем

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t} dS(t, s)\,\widetilde{h}(s), \quad t \geq t_0,$$

где $S(t, s) = 0$ при $t \leq s$; при любом $\tau > t_0$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t \in [t_0, \tau]} \mathop{var}\limits_{t_0 \leq s \leq t} S(t, s) < \infty$ и функция $\int_{t_0}^{\tau} S(t, s)\,ds$ непрерывна по t на полуинтервале $[t_0, \infty)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда непрерывное решение начальной задачи Коши допускает представление*

$$x(t) = \int_{t_0-r}^{t_0} dT(t,s,t_0)\,\widetilde{\varphi}(s) + \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\,\widetilde{h}(s) + (V(t,t_0)+I_n)\,\varphi(t_0), \quad t \geq t_0,$$

где $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi(s) - \varphi(t_0)$, $s \in [t_0-r, t_0]$; $\widetilde{h}(t) = h(t) - h(t_0)$, $t \geq t_0$; $T(t, t_0-r, t_0) = 0$ *при* $t \geq t_0$; $T(t_0, s, t_0) = 0$ *при* $s \in [t_0-r, t_0]$; $S(t,s) = 0$ *при* $t \leq s$; *при любом* $\tau > t_0$ *выполняются неравенства* $\sup\limits_{t\in[t_0,\tau)} \underset{t_0-r\leq s\leq t_0}{var} T(t,s,t_0) < \infty$, $\sup\limits_{t\in[t_0,\tau]} \underset{t_0\leq s\leq t}{var} S(t,s) < \infty$, *при любом* $\tau > t_0$ *и любом* $0 \leq r' < r$ *функции* $\int_{t_0}^{\tau} S(t,s)\,ds$ *и* $\int_{t_0-r}^{t_0-r'} T(t,s,t_0)\,ds$ *непрерывны по* t *на полуинтервале* $[t_0, \infty)$.

4 Уравнение для функции S

Представление решения $x_{\widetilde{h}}$ системы (1) связано с нахождением функции S.

Теорема 4.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 функция* S *является решением уравнения*

$$S(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau} \int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta) \int_{t}^{\tau} S(t+\vartheta, s)\,ds - I_n, \quad t > \tau, \tag{1}$$

с начальным условием $S(t,\tau) = 0$ *при* $t \leq \tau$.

Доказательство. Рассмотрим решения уравнения (1) с нулевыми начальными функциями и неоднородностями $\widetilde{h} \in \mathbb{C}^2([t_0,+\infty), \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{h}(t_0) = \widetilde{h}'(t_0) = 0$. Имеем

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t}^{\tau} S(t,s)\,ds\widetilde{h}''(\tau)\,d\tau, \quad t > t_0,$$

$$\widetilde{h}(t) = \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\,\widetilde{h}''(\tau)\,d\tau, \quad t > t_0.$$

Тогда

$$x_{\widetilde{h}}(t+\vartheta) = \int_{t_0}^{t+\vartheta} \int_{t+\vartheta}^{\tau} S(t+\vartheta, s)\,ds\widetilde{h}''(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \int_{t+\vartheta}^{\tau} S(t+\vartheta, s)\,ds\widetilde{h}''(\tau)\,d\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t} \int_{t}^{\tau} S(t+\vartheta, s)\,ds\widetilde{h}''(\tau)\,d\tau, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad t > t_0.$$

Следовательно, после подстановки в систему (1) получим:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t}^{\tau} S\left(t,s\right)ds\widetilde{h}''\left(\tau\right)d\tau = \int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{t_0}^{t}\int_{t}^{\tau} S\left(t+\vartheta,s\right)ds\widetilde{h}''\left(\tau\right)d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t}\left(t-\tau\right)\widetilde{h}''\left(\tau\right)d\tau, \quad t>t_0.$$

Так как интеграл $\int_{t}^{\tau} S\left(t+\vartheta,s\right)ds$, $\vartheta\in[-r,0]$, $\tau\in[t_0,t]$, $t>t_0$, непрерывно зависит от ϑ на отрезке $[-r,0]$, то

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t}^{\tau} S\left(t,s\right)ds\widetilde{h}''\left(\tau\right)d\tau = \int_{t_0}^{t}\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{t}^{\tau} S\left(t+\vartheta,s\right)ds\widetilde{h}''\left(\tau\right)d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t}\left(t-\tau\right)\widetilde{h}''\left(\tau\right)d\tau, \quad t>t_0. \tag{2}$$

Равенство (2) должно выполняться для любой функции $\widetilde{h}''\in\mathbb{C}\left([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n\right)$. Это условие выполняется, если имеет место равенство

$$\int_{t}^{\tau} S\left(t,s\right)ds = \int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{t}^{\tau} S\left(t+\vartheta,s\right)ds + \left(t-\tau\right)I_n, \quad \tau\in\left[t_0,t\right], \quad t>t_0.$$

Правая часть полученного равенства является абсолютно непрерывной функцией аргумента τ на отрезке $[t_0,t]$ при фиксированном t. Следовательно, интеграл $\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{t}^{\tau} S\left(t+\vartheta,s\right)ds$ задает абсолютно непрерывную функцию аргумента τ на отрезке $[t_0,t]$. Продифференцировав это равенство по τ, получим искомое уравнение. Теорема доказана.

Утверждение 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Функция η абсолютно непрерывна по второму аргументу на отрезке $[-r,0]$ и для любого $T>\tau$ выполнено условие $vrai\sup\limits_{t\in[\tau,T],\ \vartheta\in[-r,0]}\left|\eta'_{\vartheta}\left(t,\vartheta\right)\right|<\infty$. Тогда функция S при фиксированном $\tau\in R$ является единственным решением уравнения*

$$S\left(t,\tau\right) = \int_{-r}^{0}\eta'_{\vartheta}\left(t,\vartheta\right)S\left(t+\vartheta,\tau\right)d\vartheta - I_n, \quad t>\tau, \tag{3}$$

с начальным условием $S\left(t,\tau\right)=0$ при $t\le\tau$, в пространстве матричных функций, ограниченных в существенном на любом конечном интервале полуоси $(\tau,+\infty)$.

Доказательство. Преобразуем уравнение (1) для функции S, меняя порядок интегрирования и дифференцируя по τ:

$$S(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-r}^{0}d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)\int_{t}^{\tau}S(t+\vartheta,s)\,ds-I_n=-I_n+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{t}^{\tau}\int_{-r}^{0}\eta'_{\vartheta}(t,\vartheta)\,S(t+\vartheta,s)\,d\vartheta ds=\int_{-r}^{0}\eta'_{\vartheta}(t,\vartheta)\,S(t+\vartheta,\tau)\,d\vartheta-I_n=$$

$$=\int_{t-r}^{t}\eta'_{\vartheta}(t,z-t)\,S(z,\tau)\,dz-I_n=\int_{\tau}^{t}\eta'_{\vartheta}(t,z-t)\,S(z,\tau)\,dz-I_n,\quad t>\tau.$$

При каждом фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$ на любом конечном интервале полуоси $(\tau,+\infty)$ уравнение (3) является матричным интегральным уравнением Вольтерра второго рода в пространстве функций, ограниченных в существенном на этом интервале. Поэтому оно имеет единственное решение [14, с.153]. Утверждение доказано.

Пример 4.1. *Дано однородное скалярное уравнение (1) с функцией* $\eta(t,\vartheta)=t\vartheta$, $\vartheta\in[-1,0]$, $t\in\mathbb{R}$, *и* $r=1$.

Уравнение (3) имеет вид

$$S(t,\tau)=t\int_{-1}^{0}S(t+\vartheta,\tau)\,d\vartheta-1,\quad t>\tau.$$

При $\tau\le t\le\tau+1$ получаем уравнение

$$S(t,\tau)=t\int_{t-1}^{t}S(y,\tau)\,dy-1=t\int_{\tau}^{t}S(y,\tau)\,dy-1.$$

Функция $\alpha(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}S(y,\tau)\,dy$, $\tau\le t\le\tau+1$, является решением дифференциального уравнения $\alpha'_t(t,\tau)=t\alpha(t,\tau)-1$ с начальным условием $\alpha(\tau+0,\tau)=0$. Находим $\alpha(t,\tau)=-\int_{\tau}^{t}e^{\frac{1}{2}\left(t^2-y^2\right)}dy$. Тогда $S(t,\tau)=-1-t\int_{\tau}^{t}e^{\frac{1}{2}\left(t^2-y^2\right)}dy$.

Пусть η является матричной функцией скачков с конечным числом точек разрыва, определяемой формулой

$$\eta(t,\vartheta)=\sum_{m=1}^{N}A_m(t)\,1(\vartheta_m-\vartheta),\quad\vartheta\in[-r,0],\quad -r\le\vartheta_N<...<\vartheta_1<0,\quad(4)$$

где $1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0,\end{cases}$ A_m – заданные непрерывные матричные функции на числовой оси.

Проверим выполнение условий теоремы 2.1:

1) функция $\operatorname*{var}_{z\in[-r,0]}\eta\,(t,z)$ ограничена на любом отрезке числовой оси, т.к. A_m – непрерывные матричные функции на числовой оси,

2) отображение $t \to \eta\,(t,-r)$ непрерывно на числовой оси, т.к. A_m – непрерывные матричные функции на числовой оси,

3) для любого фиксированного $\tau \in \mathbb{R}$ отображение $t \to \int_{t-r}^{\tau}\eta\,(t,s-t)\,ds$ непрерывено на $[\tau,\tau+r]$. Действительно,

$$\int_{t-r}^{\tau}\eta\,(t,s-t)\,ds=\int_{-r}^{\tau-t}\sum_{m=1}^{N}A_m\,(t)\,1\,(\vartheta_m-\vartheta)\,d\vartheta=\sum_{m=1}^{N}A_m\,(t)\int_{\vartheta_m-\tau+t}^{\vartheta_m+r}1\,(\xi)\,d\xi$$
$$=\sum_{m=1}^{N}A_m\,(t)\left[(\tau-t-\vartheta_m)\,1\,(\vartheta_m-\tau+t)+(\vartheta_m+r)\right].$$

Полученная функция непрерывно зависит от t на отрезке $[\tau,\tau+r]$.

4) отображение $(t,s) \to \eta\,(t,s)$ непрерывно при $s=0$ равномерно относительно t на любом конечном отрезке, т.к. $\eta\,(t,s)=0$ при $s\in(\vartheta_1,0]$.

Утверждение 4.2. *Если η – матричная функция скачков с конечным числом точек разрыва, определяемая формулой (4), то матричная функция S является единственным решением матричного разностного уравнения с непрерывным временем*

$$S\,(t,\tau)=-\sum_{m=1}^{N}A_m\,(t)\,S\,(t+\vartheta_m,\tau)-I_n,\quad t>\tau, \tag{5}$$

с начальным условием $S\,(t,\tau)=0$ при $t\le\tau$. Это решение – матричная функция, на произвольном интервале полуоси (τ,∞) ограниченная в существенном и имеющая конечное число точек разрыва.

Доказательство. Подставим выражение (4) для функции η в уравнение (1) и преобразуем входящий в него интеграл:

$$S\,(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-r}^{0}d_\vartheta\eta\,(t,\vartheta)\int_t^{\tau}S\,(t+\vartheta,s)\,ds-I_n=$$
$$=\sum_{m=1}^{N}A_m\,(t)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-r}^{0}d_\vartheta 1\,(\vartheta_m-\vartheta)\int_t^{\tau}S\,(t+\vartheta,s)\,ds-I_n=$$
$$=-\sum_{m=1}^{N}A_m\,(t)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\int_t^{\tau}S\,(t+\vartheta_m,s)\,ds-I_n=-\sum_{m=1}^{N}A_m\,(t)\,S\,(t+\vartheta_m,\tau)-I_n.$$

При каждом фиксированном τ уравнение (5) является матричным разностным уравнением с непрерывным временем. Поэтому при заданной нулевой начальной функции оно имеет единственное решение. Требуемое решение можно найти методом шагов [2]. Из этого метода следует справедливость второй части утверждения.

Пример 4.2. *Рассмотрим разностное уравнение с непрерывным временем*

$$x(t) = A(t)\, x(t-1) + h(t)\,,$$

где A – непрерывная матричная функция на числовой оси.

Это уравнение можно записать в форме (1) с функцией η, определяемой формулой

$$\eta(t,\vartheta) = \begin{cases} 0, & -1 < \vartheta \le 0, \\ -A(t)\,, & \vartheta \le -1, \end{cases}$$

и $r = 1$. Уравнение (3) имеет вид

$$S(t,\tau) = A(t)\, S(t-1,\tau) - I_n, \quad t > \tau.$$

При каждом фиксированном τ это уравнение решается методом шагов: при $t \in (\tau, \tau+1]$

$$S(t,\tau) = -I_n,$$

при $t \in (\tau+1, \tau+2]$

$$S(t,\tau) = -A(t) - I_n,$$

при $t \in (\tau+2, \tau+3]$

$$S(t,\tau) = A(t)\left[-A(t-1) - I_n\right] - I_n = -A(t)\, A(t-1) - A(t) - I_n,$$

при $t \in (\tau+m-1, \tau+m]$

$$S(t,\tau) = -A(t)\, A(t-1) \ldots A(t-m+2) - A(t)\, A(t-1) \ldots A(t-m+3) -$$

$$-A(t) - I_n.$$

Пусть теперь матричная функция η имеет вид

$$\eta(t,\vartheta) = \sum_{m=1}^{N} A_m(t)\, 1(\vartheta_m - \vartheta) + \eta_1(t,\vartheta)\,, \quad \vartheta \in [-r, 0]\,, \tag{6}$$

где $-r \le \vartheta_N < \ldots < \vartheta_1 < 0$, η_1 – абсолютно непрерывная функция аргумента ϑ на отрезке $[-r, 0]$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.1.

Утверждение 4.3. *В случае функции η, заданной при помощи формулы (6), функция S является единственным решением уравнения*

$$S(t,\tau) = -\sum_{m=1}^{N} A_m(t)\, S(t+\vartheta_m,\tau) + \int_{-r}^{0} \eta'_{1_\vartheta}(t,\vartheta)\, S(t+\vartheta,\tau)\, d\vartheta - I_n, \quad t>\tau, \tag{7}$$

с начальным условием $S(t,\tau) = 0$ при $t \le \tau$, в пространстве матричных функций, ограниченных в существенном на любом конечном интервале полуоси $(\tau, +\infty)$.

Доказательство. Подставим выражение (6) для функции η в уравнение (1) и преобразуем входящий в него интеграл:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-r}^{0} d_\vartheta \left(\sum_{m=1}^{N} A_m(t)\, 1(\vartheta_m - \vartheta) + \eta_1(t,\vartheta)\right) \int_t^\tau S(t+\vartheta,s)\, ds =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{m=1}^{N} A_m(t) \int_{-r}^{0} d_\vartheta 1(\vartheta_m - \vartheta) \int_t^\tau S(t+\vartheta,s)\, ds +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-r}^{0} \eta'_{1_\vartheta}(t,\vartheta)\int_t^\tau S(t+\vartheta,s)\, ds d\vartheta = -\sum_{m=1}^{N} A_m(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_t^\tau S(t+\vartheta_m,s)\, ds +$$

$$+\int_{-r}^{0} \eta'_{1_\vartheta}(t,\vartheta)\, S(t+\vartheta,\tau)\, d\vartheta.$$

Таким образом, уравнение (1) преобразуется к виду (7). При каждом фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ ищем решение в пространстве функций ограниченных в существенном на любом интервале полуоси (τ, ∞). Применяем метод шагов с шагом $|\vartheta_1|$. В результате, задача сводится к нахождению решения уравнения Вольтерра 2 рода в пространстве функций, ограниченных в существенном. Полученное уравнение имеет единственное решение в этом пространстве. Утверждение доказано.

Пример 4.3. *Дано однородное скалярное уравнение (1) с функцией*

$$\eta(t,\vartheta) = \begin{cases} 0, & \vartheta \in (-\pi, 0], \\ \cos(t+\vartheta), & \vartheta \in [-2\pi, -\pi], \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$ и $r = 2\pi$.

Функция η допускает представление (6)

$$\eta(t,\vartheta) = \cos(t)\, 1(-\pi - \vartheta) + \eta_1(t,\vartheta), \quad \vartheta \in [-2\pi, 0],$$

где $\eta_1(t,\vartheta) = \begin{cases} 0, & \vartheta \in (-\pi, 0], \\ \cos(t+\vartheta) - \cos(t), & \vartheta \in [-2\pi, -\pi]. \end{cases}$ Уравнение (7) имеет вид

$$S(t,\tau) = -\cos(t)\, S(t-\pi,\tau) - \int_{-2\pi}^{-\pi} \sin(t+\vartheta)\, S(t+\vartheta,\tau)\, d\vartheta - 1, \quad t > \tau. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) имеет вид: при $\tau < t \leq \pi + \tau$ $S(t,\tau) = -1$, при $\pi + \tau < t \leq 2\pi + \tau$ $S(t,\tau) = \cos(t) + \int_{\tau}^{t-\pi} \sin(z)\, dz - 1 = 2\cos(t) + \cos(\tau) - 1$.

5 Связь функций S и V.

Для нахождения функции V можно воспользоваться утверждением.

Утверждение 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда функция V определяется формулой*

$$V(t,t_0) = -S(t,t_0)\,\eta(t_0,-r) - \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\,\eta(s,-r), \quad t > t_0.$$

Доказательство. Решение $\widetilde{x}_0$ совпадает с решением $x_{\widetilde{h}}$, где $\widetilde{h}$ определяется формулой:

$$\widetilde{h}(t) = (\eta(t_0,-r) - \eta(t,-r))\,\varphi(t_0), \quad t > t_0.$$

Преобразуем последнее решение

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\,(\eta(t_0,-r) - \eta(s,-r))\,\varphi(t_0) =$$
$$= \left(\int_{t_0}^{t} dS(t,s)\,\eta(t_0,-r) - \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\,\eta(s,-r) \right) \varphi(t_0) =$$
$$= \left(-S(t,t_0)\,\eta(t_0,-r) - \int_{t_0}^{t} dS(t,s)\,\eta(s,-r) \right) \varphi(t_0).$$

Утверждение доказано.

6 Связь функций S и T.

Для нахождения функции T можно воспользоваться теоремой.

Теорема 6.1. *Функция* T *определяется формулой*

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{s-\xi}\left[\eta(\xi,\vartheta)-\eta(\xi,-r)\right]d\vartheta, \qquad (1)$$

$t > t_0, \quad s \in [t_0 - r, t_0]$.

Доказательство. Рассмотрим решение $x_{\widetilde{\varphi}}$ с начальной функцией $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}^2([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$. Это решение при $t > t_0$ совпадает с решением $x_{\widetilde{h}}$, где $\widetilde{h}$ определяется формулами:

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} \int_{-r}^{t_0-t} d_\vartheta\eta(t,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t+\vartheta) - \int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta), & t\in[t_0,t_0+r],\\ -\int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta), & t > t_0+r. \end{cases} \qquad (2)$$

Преобразуем интеграл в формуле (2):

$$\int_{-r}^{t_0-t} d_\vartheta\eta(t,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t+\vartheta) = -\eta(t,-r)\,\widetilde{\varphi}(t-r) - \int_{-r}^{t_0-t}\eta(t,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}'(t+\vartheta)\,d\vartheta =$$
$$= \int_{-r}^{t_0-t}\left[\eta(t,-r)-\eta(t,\vartheta)\right]\widetilde{\varphi}'(t_0)\,d\vartheta +$$
$$+\int_{t-r}^{t_0}\int_{-r}^{s-t}\left[\eta(t,-r)-\eta(t,\vartheta)\right]d\vartheta\,\widetilde{\varphi}''(s)\,ds, \quad t\in[t_0,t_0+r].$$

Находим

$$\widetilde{h}(t) = \int_{-r}^{t_0-t}\left[\eta(t,-r)-\eta(t,\vartheta)\right]\widetilde{\varphi}'(t_0)\,d\vartheta - \int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta) +$$
$$+\int_{t-r}^{t_0}\int_{-r}^{s-t}\left[\eta(t,-r)-\eta(t,\vartheta)\right]d\vartheta\,\widetilde{\varphi}''(s)\,ds, \quad t\in[t_0,t_0+r],$$
$$\widetilde{h}(t) = -\int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(t_0,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t_0+\vartheta), \quad t > t_0+r.$$

Преобразуем выражение для решения $x_{\widetilde{h}}$:

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_{t_0}^{t_0+r} dS(t,\xi)\,\widetilde{h}(\xi) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_0+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{t_0-\xi}\left[\eta(\xi,-r)-\eta(\xi,\vartheta)\right]d\vartheta\,\widetilde{\varphi}'(t_0) -$$
$$-\int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0}^{s+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{s-\xi}\left[\eta(\xi,-r)-\eta(\xi,\vartheta)\right]d\vartheta\,\widetilde{\varphi}''(s)\,ds.$$

Теперь преобразуем выражение для решения $x_{\widetilde{\varphi}}$:

$$x_{\widetilde{\varphi}}(t) = -\int_{t_0-r}^{t_0} T(t,\tau,t_0)\,\widetilde{\varphi}'(\tau)\,d\tau =$$
$$= -\int_{t_0-r}^{t_0} T(t,\tau,t_0)\,d\tau\widetilde{\varphi}'(t_0) + \int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0-r}^{s} T(t,\tau,t_0)\,d\tau\widetilde{\varphi}''(s)\,ds.$$

Запишем условия совпадения решений $x_{\widetilde{h}}$ и $x_{\widetilde{\varphi}}$ для произвольных функций $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}^2([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{t_0}^{t_0+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{t_0-\xi}[\eta(\xi,-r)-\eta(\xi,\vartheta)]\,d\vartheta = -\int_{t_0-r}^{t_0} T(t,\tau,t_0)\,d\tau,$$
$$-\int_{t_0}^{s+r} dS(t,\xi)\int_{-r}^{s-\xi}[\eta(\xi,-r)-\eta(\xi,\vartheta)]\,d\vartheta = \int_{t_0-r}^{s} T(t,\tau,t_0)\,d\tau,$$
$$t>t_0, \quad s\in[t_0-r,t_0].$$

При выполнении второго условия первое условие выполняется. Дифференцируемость по s левой части второго условия следует из дифференцируемости правой части этого условия. Дифференцируя второе равенство по s и сделав замену переменной, получаем искомую формулу (1). Теорема доказана.

Утверждение 6.1. *В случае дискретной меры η, заданной формулой (4) с абсолютно непрерывными A_m $(m=\overline{1,N})$, функция T определяется формулой*

$$T(t,s,t_0) = -S(t,t_0)\sum_{m=1}^{N} A_m(t_0)\left(1(\vartheta_m - s + t_0) - 1\right) -$$
$$-\sum_{m=1}^{N}\int_{t_0}^{s+r} S(t,\xi)\,A_m'(\xi)\left(1(\vartheta_m - s+\xi)-1\right)d\xi +$$
$$+\frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r} S(t,\xi)\sum_{m=1}^{N} A_m(\xi)\,1(\vartheta_m - s+\xi)\,d\xi -$$
$$-S(t,s+r)\sum_{m=1}^{N} A_m(s+r), \quad t>t_0, \quad s\in[t_0-r,t_0].$$

Доказательство. Преобразуем формулу (1)

$$T\left(t,s,t_0\right)=\frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r}dS\left(t,\xi\right)\int_{-r}^{s-\xi}\left[\eta\left(\xi,\vartheta\right)-\eta\left(\xi,-r\right)\right]d\vartheta=$$
$$=\frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r}dS\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(\xi\right)\int_{-r}^{s-\xi}1\left(\vartheta_m-\vartheta\right)d\vartheta-$$
$$-\frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r}dS\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(\xi\right)\left(s-\xi+r\right).$$

Введем обозначания и проинтегрируем по частям:

$$F_1(t,s,t_0)=\int_{t_0}^{s+r}dS\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(\xi\right)\int_{-r}^{s-\xi}1\left(\vartheta_m-\vartheta\right)d\vartheta=$$
$$=-S\left(t,t_0\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(t_0\right)\int_{-r}^{s-t_0}1\left(\vartheta_m-\vartheta\right)d\vartheta-$$
$$-\int_{t_0}^{s+r}S\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m'\left(\xi\right)\int_{-r}^{s-\xi}1\left(\vartheta_m-\vartheta\right)d\vartheta d\xi+$$
$$+\int_{t_0}^{s+r}S\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(\xi\right)1\left(\vartheta_m-s+\xi\right)d\xi;$$

$$F_2(t,s,t_0)=\int_{t_0}^{s+r}dS\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(\xi\right)\left(s-\xi+r\right)=\sum_{m=1}^{N}\int_{t_0}^{s+r}S\left(t,\xi\right)A_m\left(\xi\right)d\xi-$$
$$-S\left(t,t_0\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(t_0\right)\left(s-t_0+r\right)-\sum_{m=1}^{N}\int_{t_0}^{s+r}S\left(t,\xi\right)A_m'\left(\xi\right)\left(s-\xi+r\right)d\xi.$$

Продифференцируем $F_1(t,s,t_0)$ и $F_2(t,s,t_0)$ по s:

$$\frac{d}{ds}\left(F_1(t,s,t_0)\right)=\frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r}S\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(\xi\right)1\left(\vartheta_m-s+\xi\right)d\xi-$$
$$\int_{t_0}^{s+r}S\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N}A_m'\left(\xi\right)1\left(\vartheta_m-s+\xi\right)d\xi-S\left(t,t_0\right)\sum_{m=1}^{N}A_m\left(t_0\right)1\left(\vartheta_m-s+t_0\right);$$

$$\frac{d}{ds}\left(F_2(t,s,t_0)\right) = -S\left(t,t_0\right)\sum_{m=1}^{N} A_m\left(t_0\right) - \sum_{m=1}^{N}\int_{t_0}^{s+r} S\left(t,\xi\right)A'_m\left(\xi\right)d\xi +$$
$$+\,S\left(t,s+r\right)\sum_{m=1}^{N} A_m\left(s+r\right).$$

В результате получаем

$$T\left(t,s,t_0\right) = -S\left(t,t_0\right)\sum_{m=1}^{N} A_m\left(t_0\right)\left(1\left(\vartheta_m - s + t_0\right) - 1\right) -$$
$$-S\left(t,s+r\right)\sum_{m=1}^{N} A_m\left(s+r\right) + \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+r} S\left(t,\xi\right)\sum_{m=1}^{N} A_m\left(\xi\right)1\left(\vartheta_m - s + \xi\right)d\xi -$$
$$-\sum_{m=1}^{N}\int_{t_0}^{s+r} S\left(t,\xi\right)A'_m\left(\xi\right)\left(1\left(\vartheta_m - s + \xi\right) - 1\right)d\xi$$

Утверждение доказано.

Пример 6.1. *Рассмотрим разностное уравнение с непрерывным временем*

$$x\left(t\right) = A\left(t\right)x\left(t-1\right) + h\left(t\right), \quad t > 0,$$

где A – абсолютно непрерывная матричная функция на числовой оси.

Это уравнение можно записать в форме (1) с функцией η:

$$\eta\left(t,\vartheta\right) = \begin{cases} 0, & -1 < \vartheta \le 0, \\ -A\left(t\right), & \vartheta = -1, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$, и $r = 1$.

Используя утверждение 6.1, имеем

$$T\left(t,s,0\right) = S\left(t,0\right)A\left(0\right)\left(1\left(-1-s\right) - 1\right) - \int_0^{s+1} S\left(t,\xi\right)A'\left(\xi\right)d\xi +$$
$$+S\left(t,s+1\right)A\left(s+1\right) = \int_0^{s+1} dS\left(t,\xi\right)A\left(\xi\right) + S\left(t,0\right)A\left(0\right)1\left(-1-s\right),$$
$$t > 0, \quad s \in \left[-1,0\right].$$

1) Пусть $t \in (0,1]$. Если $-1 \le s < t-1$, то из примера 4.2 следует, что $S\left(t,\xi\right) = -I_n$ при $\xi \in [0,s+1]$. Находим,

$$T(t,s,0) = -A(0)\,1(-1-s) = \begin{cases} -A(0), & s=-1, \\ 0, & s \in (-1,0]. \end{cases}$$

Если $t-1 \le s \le 0$, то из примера 4.2 следует, что $S(t,\xi) = \begin{cases} 0, & t \le \xi \le s+1, \\ -I_n, & 0 \le \xi < t. \end{cases}$ Находим,

$$T(t,s,0) = A(t) - A(0)\,1(-1-s) = \begin{cases} A(t) - A(0), & s=-1, \\ A(t), & s \in (-1,0]. \end{cases}$$

2) Пусть $t \in (1,2]$. Если $-1 \le s < t-2$, то из примера 4.2 следует, что $S(t,\xi) = -A(t) - I_n$ при $\xi \in [0,s+1]$. Находим,

$$T(t,s,0) = -(A(t)+I_n)\,A(0)\,1(-1-s) = \begin{cases} -(A(t)+I_n)\,A(0), & s=-1, \\ 0, & s \in (-1,0]. \end{cases}$$

Если $t-2 \le s \le 0$, то из примера 4.2 следует, что $S(t,\xi) = \begin{cases} -I_n, & t-1 \le \xi \le s+1, \\ -A(t)-I_n, & 0 \le \xi < t-1. \end{cases}$ Находим, $T(t,s,0) = A(t)\,A(t-1) - (A(t)+I_n)\,A(0)\,1(-1-s) =$

$$= \begin{cases} A(t)\,A(t-1) - (A(t)+I_n)\,A(0), & s=-1, \\ A(t)\,A(t-1), & s \in (-1,0]. \end{cases}$$

Пример 6.2. *Дано однородное скалярное уравнение (1) с функцией* $\eta(t,\vartheta) = t\vartheta$, $r=1$.

Находим

$$\int_{-1}^{s-\xi} [\eta(\xi,\vartheta) - \eta(\xi,-1)]\,d\vartheta = \int_{-1}^{s-\xi} \xi(\vartheta+1)\,d\vartheta = \frac{\xi}{2}(s-\xi+1)^2,$$
$$\xi \in [t_0, s+1], \quad s \in [t_0-1, t_0].$$

Следовательно, формула (1) имеет вид

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+1} dS(t,\xi)\,\frac{\xi}{2}(s-\xi+1)^2, \quad t > t_0, \quad s \in [t_0-1, t_0].$$

Пусть $t \in (t_0, t_0+1]$. Если $t_0 - 1 \le s \le t-1$, то из примера 4.1 следует, что

$S(t,\xi) = -1 - t\int_\xi^t e^{\frac{1}{2}\left(t^2-y^2\right)}dy$ при $\xi \in [t_0, s+1]$. Находим,

$$T(t,s,t_0) = t\frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+1} e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\xi^2\right)}\frac{\xi}{2}(s-\xi+1)^2\,d\xi =$$
$$= t\int_{t_0}^{s+1} e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\xi^2\right)}\xi(s-\xi+1)\,d\xi, \quad t \in (t_0, t_0+1], \quad s \in [t_0-1, t-1].$$

Если $t-1 < s \le t_0$, то из примера 4.1 следует, что $S(t,\xi) = -1 - t\int_\xi^t e^{\frac{1}{2}\left(t^2-y^2\right)}dy$ при $\xi \in [t_0, t]$ и $S(t,\xi) = 0$ при $\xi \in [t, s+1]$. Находим,

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+1} dS(t,\xi)\,\frac{\xi}{2}(s-\xi+1)^2 = t\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\xi^2\right)}\xi(s-\xi+1)\,d\xi +$$
$$+t(s-t+1), \quad t \in (t_0, t_0+1], \quad s \in [t_0-1, t-1].$$

Пример 6.3. *Дано однородное скалярное уравнение (1) с функцией* $\eta(t,\vartheta) = \begin{cases} 0, & \vartheta > -\pi, \\ \cos(t+\vartheta), & \vartheta \le -\pi, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, $r = 2\pi$.

Находим

$$\int_{-2\pi}^{s-\xi}\left[\eta(\xi,\vartheta) - \eta(\xi,-2\pi)\right]d\vartheta = \int_{-2\pi}^{s-\xi}\left[\cos(\xi+\vartheta) - \cos(\xi)\right]d\vartheta =$$
$$= \sin(s) - \sin(\xi) - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi), \xi \in [t_0, s+2\pi], s \in [t_0-2\pi, t_0-\pi],$$

$$\int_{-2\pi}^{s-\xi}\left[\eta(\xi,\vartheta) - \eta(\xi,-2\pi)\right]d\vartheta = \int_{-2\pi}^{-\pi}\cos(\xi+\vartheta)\,d\vartheta - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi) =$$
$$= -2\sin(\xi) - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi), \quad \xi \in [t_0, s+2\pi], \quad s \in (t_0-\pi, t_0].$$

1) Пусть $t_0 < t \le t_0+\pi$. При $s \in [t_0-2\pi, t_0-\pi]$ формула (1) имеет вид:

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+2\pi} dS(t,\xi)\left(\sin(s) - \sin(\xi) - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi)\right).$$

Если $t-2\pi \le s \le t_0-\pi$, то из примера 4.3 следует, что $S(t,\xi) = \begin{cases} -1, & t-\pi \le t_0 \le \xi < t, \\ 0, & t \le \xi \le s+2\pi. \end{cases}$ Находим

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\left(\sin(s) - \sin(t) - (s-t+2\pi)\cos(t)\right) = \cos(s) - \cos(t).$$

Если $t_0 - 2\pi \le s < t - 2\pi \le t_0 - \pi$, то из примера 4.3 следует, что $S(t,\xi) = -1$, $t_0 \le \xi \le s + 2\pi < t$. Находим, что

$$T(t,s,t_0) = 0.$$

При $s \in (t_0 - \pi, t_0]$ формула (1) имеет вид:

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+2\pi} dS(t,\xi)\left(-2\sin(\xi) - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi)\right).$$

Из примера 4.3 следует, что $S(t,\xi) = \begin{cases} -1, & t-\pi \le t_0 \le \xi < t, \\ 0, & t \le \xi \le s+2\pi. \end{cases}$ Находим

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\left(-2\sin(t) - (s-t+2\pi)\cos(t)\right) = -\cos(t).$$

2) Пусть $t_0 + \pi < t \le t_0 + 2\pi$. При $s \in [t_0 - 2\pi, t_0 - \pi]$ формула (1) имеет вид:

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+2\pi} dS(t,\xi)\left(\sin(s) - \sin(\xi) - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi)\right).$$

Если $t - 3\pi \le s \le t_0 - \pi$, то из примера 4.3 следует, что $S(t,\xi) = \begin{cases} 2\cos(t) + \cos(\xi) - 1, & t-2\pi \le t_0 \le \xi < t-\pi, \\ -1, & t-\pi \le \xi \le s+2\pi < t. \end{cases}$ Находим

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{t-\pi}(-\sin(\xi))\left(\sin(s) - \sin(\xi) - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi)\right)d\xi +$$

$$+\frac{d}{ds}\left(\sin(s) + \sin(t) + (s-t+3\pi)\cos(t)\right) = \cos(s) + \cos(t) -$$

$$-\int_{t_0}^{t-\pi}\left(\sin(\xi)\cos(s) - \frac{1}{2}\sin(2\xi)\right)d\xi = -\cos(s)\left(\cos(t) + \cos(t_0) - 1\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t_0) + \cos(t).$$

Если $t_0 - 2\pi \le s < t - 3\pi \le t_0 - \pi$, то из примера 4.3 следует, что $S(t,\xi) = -1$, $t_0 \le \xi \le s + 2\pi < t$. Находим

$$T(t,s,t_0) = 0.$$

При $s \in (t_0 - \pi, t_0]$ формула (1) имеет вид:

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s+2\pi} dS(t,\xi)\left(-2\sin(\xi) - (s-\xi+2\pi)\cos(\xi)\right).$$

Если $t_0 + \pi < t \leq s + 2\pi \leq t_0 + 2\pi$, то из примера 4.3 следует, что $S(t,\xi) = \begin{cases} 2\cos(t) + \cos(\xi) - 1, & t - 3\pi < t_0 \leq \xi < t - 2\pi, \\ -1, & t - 2\pi \leq \xi \leq t - \pi \leq s + 2\pi. \end{cases}$ Находим

$$T(t,s,t_0) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{t-2\pi} (-\sin(\xi))(-2\sin(\xi) - (s - \xi + 2\pi)\cos(\xi))\, d\xi +$$

$$+\frac{d}{ds}(2\sin(t) + (s - t + 3\pi)\cos(t)) = \int_{t_0}^{t-2\pi} \frac{1}{2}\sin(2\xi)\, d\xi +$$

$$+\cos(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t_0) + \cos(t).$$

Если $t_0 + \pi < t \leq s + 2\pi < t \leq t_0 + 2\pi$, то из примера 4.3 следует, что $S(t,\xi) = -1$, $t_0 \leq \xi \leq s + 2\pi < t$. Находим

$$T(t,s,t_0) = 0.$$

7 Уравнение для функции T

Функцию T можно определять непосредственно, не зная функцию S. Найдем уравнения, определяющие эту функцию.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Функция T является решением системы уравнений*

$$T(t,\tau,t_0) = \frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\int_{t_0-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\, ds + [\eta(t_0,-r) - \eta(t_0,\tau - t_0)], \tag{1}$$

$$t \geq t_0 + r, \tau \in [-r, 0],$$

$$T(t,\tau,t_0) = \frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\int_{-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\, ds + \eta(t,-r) - \eta(t,\tau), \tag{2}$$

$$\tau \in (-r, t - r), \quad t \in (t_0, t_0 + r),$$

$$T(t,\tau,t_0) = \frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\int_{-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\, ds + \eta(t,\tau - r) - \eta(t,\tau), \tag{3}$$

$$\tau \in (t - r, 0), \quad t \in (t_0, t_0 + r),$$

с начальной функцией $T(t,\tau,t_0) = 0$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$.

Доказательство. Рассмотрим решения уравнения (1) с начальной функцией $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{C}^2([t_0,+\infty), \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\widetilde{\varphi}(t_0) = 0$, и неоднородностью h, определяемой формулой

$$h\left(t\right)=-\int_{t_0-r}^{t_0}d_s\eta\left(t_0,s-t_0\right)\widetilde{\varphi}\left(s\right),\quad t\in\left[t_0,\infty\right).$$

Такие решения определяются формулой (4), то есть

$$\widetilde{x}\left(t\right)=\int_{t_0-r}^{t_0}dT\left(t,s,t_0\right)\widetilde{\varphi}\left(s\right)=-\int_{t_0-r}^{t_0}T\left(t,s,t_0\right)\widetilde{\varphi}\prime\left(s\right)d\tau.$$

Имеем

$$\widetilde{\varphi}\prime\left(\tau\right)=\int_{t_0}^{\tau}\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(s\right)ds+\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right),$$

$$\widetilde{\varphi}\left(t_0-r\right)=-\int_{-r}^{0}\widetilde{\varphi}'\left(t_0+\vartheta\right)d\vartheta=-\int_{-r}^{0}\int_{t_0}^{t_0+\vartheta}\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(s\right)dsd\vartheta-r\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right)=$$

$$=\int_{t_0-r}^{t_0}\int_{-r}^{s-t_0}\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(s\right)d\vartheta ds-r\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right)=\int_{t_0-r}^{t_0}\left(s-t_0+r\right)\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(s\right)ds-r\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right),$$

тогда решение $\widetilde{x}$ перепишется в виде

$$\widetilde{x}\left(t\right)=-\int_{t_0-r}^{t_0}T\left(t,s,t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right)+\int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0}^{\tau}T\left(t,s,t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(\tau\right)d\tau,$$

а неоднородность h – в виде

$$h\left(t\right)=\eta\left(t_0,-r\right)\left(\int_{t_0-r}^{t_0}\left(s-t_0+r\right)\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(s\right)ds-r\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right)\right)-$$

$$-\int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0-r}^{\tau}\eta\left(t_0,s-t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(\tau\right)d\tau+\int_{t_0-r}^{t_0}\eta\left(t_0,s-t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right),\quad t>t_0.$$

Пусть $t\geq t_0+r$. Уравнение (1) перепишется в виде

$$-\int_{t_0-r}^{t_0}T\left(t,s,t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right)+\int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0-r}^{\tau}T\left(t,s,t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(\tau\right)d\tau=$$

$$-\int_{-r}^{0}d_\vartheta\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{t_0-r}^{t_0}T\left(t+\vartheta,s,t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right)+$$

$$+\int_{t_0-r}^{t_0}\int_{-r}^{0}d_\vartheta\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{t_0-r}^{\tau}T\left(t+\vartheta,s,t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(\tau\right)d\tau+$$

$$+\eta\left(t_0,-r\right)\left(\int_{t_0-r}^{t_0}\left(s-t_0+r\right)\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(s\right)ds-r\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right)\right)-$$

$$-\int_{t_0-r}^{t_0}\int_{t_0-r}^{\tau}\eta\left(t_0,s-t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\prime\left(\tau\right)d\tau+\int_{t_0-r}^{t_0}\eta\left(t_0,s-t_0\right)ds\widetilde{\varphi}\prime\left(t_0\right).\qquad(4)$$

Равенство (4) возможно тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$-\int_{t_0-r}^{t_0} T(t,s,t_0)\,ds = -\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta) \int_{t_0-r}^{t_0} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds+$$
$$+\int_{t_0-r}^{t_0} \eta(t_0,s-t_0)\,ds - \eta(t_0,-r)\,r, \tag{5}$$

$$\int_{t_0-r}^{\tau} T(t,s,t_0)\,ds = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta) \int_{t_0-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds+$$
$$+\eta(t_0,-r)(\tau-t_0+r) - \int_{t_0-r}^{\tau} \eta(t_0,s-t_0)\,ds. \tag{6}$$

Равенство (5) является следствием равенства (6) при $\tau = t_0$, следовательно, дифференцируя второе равенство по τ, имеем искомое уравнение (1)

$$T(t,\tau,t_0) = \frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta) \int_{t_0-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds + [\eta(t_0,-r) - \eta(t_0,\tau-t_0)]\,.$$

Пусть теперь $t_0 < t < t_0 + r$. Тогда

$$\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\,\widetilde{x}(t+\vartheta) = \int_{-r}^{-t} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t+\vartheta) + \int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\,\widetilde{x}(t+\vartheta)\,. \tag{7}$$

Преобразуем правую часть равенства (7). Введем обозначения

$$J_1(t) = \int_{-r}^{-t} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t+\vartheta)\,,$$
$$J_2(t) = \int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\,\widetilde{x}(t+\vartheta)\,.$$

Тогда

$$J_1(t) = -\eta(t,-r)\,\widetilde{\varphi}(t-r) - \int_{-r}^{-t} \eta(t,\vartheta)\left[\widetilde{\varphi}'(t_0) - \int_{t+\vartheta}^{t_0} \widetilde{\varphi}''(\tau)\,d\tau\right] d\vartheta =$$
$$= -\left[(t-r)\,\eta(t,-r) + \int_{-r}^{-t} \eta(t,\vartheta)\,d\vartheta\right]\widetilde{\varphi}'(t_0) +$$
$$+\int_{t-r}^{t_0}\left[-\eta(t,-r)(\tau-t+r) + \int_{-r}^{\tau-t} \eta(t,\vartheta)\,d\vartheta\right]\widetilde{\varphi}''(\tau)\,d\tau.$$

Для J_2 имеем:

$$J_2(t) = -\int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta) \int_{-r}^{0} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds\,\widetilde{\varphi}'(t_0) +$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta) \int_{-r}^{\tau} T(t+\vartheta,s,t_0)\,ds\,\widetilde{\varphi}''(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, из (7) получаем

$$-\int_{-r}^{0} T\left(t,s,t_0\right) ds \widetilde{\varphi\prime}\left(t_0\right) + \int_{-r}^{0}\int_{-r}^{\tau} T\left(t,s,t_0\right) ds \widetilde{\varphi\prime\prime}\left(\tau\right) d\tau =$$

$$-\int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta\left(t,\vartheta\right) \int_{-r}^{0} T\left(t+\vartheta,s,t_0\right) ds \widetilde{\varphi\prime}\left(t_0\right) +$$

$$+\int_{-r}^{0}\int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta\left(t,\vartheta\right) \int_{-r}^{\tau} T\left(t+\vartheta,s,t_0\right) ds \widetilde{\varphi\prime\prime}\left(\tau\right) d\tau +$$

$$+\left[-\eta\left(t,-r\right)\left(t-r\right) - \int_{-r}^{-t} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta\right] \widetilde{\varphi\prime}\left(t_0\right) + \int_{-r}^{0} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta \widetilde{\varphi\prime}\left(t_0\right) +$$

$$+\int_{t-r}^{t_0}\left[\eta\left(t,-r\right)\left(\tau-t+r\right) - \int_{-r}^{\tau-t} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta\right] \widetilde{\varphi\prime\prime}\left(\tau\right) d\tau +$$

$$+\eta\left(t,-r\right)\left(\int_{-r}^{0}\left(\tau+r\right)\widetilde{\varphi\prime\prime}\left(\tau\right) d\tau - \widetilde{\varphi\prime}\left(t_0\right) r\right) - \int_{-r}^{0}\int_{-r}^{\tau} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta \widetilde{\varphi\prime\prime}\left(\tau\right) d\tau.$$

Это равенство выполнено тогда и только тогда, когда:

$$-\int_{-r}^{0} T\left(t,s,t_0\right) ds = -\eta\left(t,-r\right) t - \int_{-r}^{-t} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta + \int_{-r}^{0} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta -$$

$$-\int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta\left(t,\vartheta\right) \int_{-r}^{0} T\left(t+\vartheta,s,t_0\right) ds,$$

$$\int_{-r}^{\tau} T\left(t,s,t_0\right) ds = \int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta\left(t,\vartheta\right) \int_{-r}^{\tau} T\left(t+\vartheta,s,t_0\right) ds + \eta\left(t,-r\right)\left(\tau+r\right) -$$

$$-\int_{-r}^{\tau} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta, \quad \tau \in \left[-r,t-r\right],$$

$$\int_{-r}^{\tau} T\left(t,s,t_0\right) ds = \int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta\left(t,\vartheta\right) \int_{-r}^{\tau} T\left(t+\vartheta,s,t_0\right) ds - \eta\left(t,-r\right)\left(\tau-t+r\right) +$$

$$+\int_{-r}^{\tau-t} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta - \int_{-r}^{-\tau} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta + \eta\left(t,-r\right)\left(\tau+r\right) = \eta\left(t,-r\right) t +$$

$$+\int_{\tau}^{\tau-t} \eta\left(t,\vartheta\right) d\vartheta + \int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta\left(t,\vartheta\right) \int_{-r}^{\tau} T\left(t+\vartheta,s,t_0\right) ds, \quad \tau \in \left[t-r,0\right].$$

Дифференцируя по τ, получим

$$T\left(t,\tau,t_0\right)=\frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0}d_\vartheta\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{-r}^{\tau}T\left(t+\vartheta,s,t_0\right)ds+\eta\left(t,-r\right)-\eta\left(t,\tau\right),$$

$$\tau\in\left(-r,t-r\right),$$

$$T\left(t,\tau,t_0\right)=\frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0}d_\vartheta\eta\left(t,\vartheta\right)\int_{-r}^{\tau}T\left(t+\vartheta,s,t_0\right)ds+\eta\left(t,\tau-r\right)-$$

$$-\eta\left(t,\tau\right),\quad \tau\in\left(t-r,0\right).$$

где $T\left(t,\tau,t_0\right)=0$ при $t\in[t_0-r,t_0]$. Теорема доказана.

Утверждение 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Функция* η *абсолютно непрерывна по второму аргументу на отрезке* $[-r,0]$ *и для любого* $\Delta>\tau$ *выполнено условие* $vrai\sup\limits_{t\in[\tau,\Delta],\ \vartheta\in[-r,0]}\left|\eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right)\right|<\infty$. *Тогда функция* T *при фиксированном* $\tau\in R$ является *единственным решением системы уравнений*

$$T\left(t,\tau,t_0\right)=\int_{-r}^{0}\eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right)T\left(t+\vartheta,\tau,t_0\right)d\vartheta+\left[\eta\left(t_0,-r\right)-\eta\left(t_0,\tau-t_0\right)\right],\qquad(8)$$

$$\tau\in\left(-r,0\right),\quad t\geq t_0+r,$$

$$T\left(t,\tau,t_0\right)=\int_{-r}^{0}\eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right)T\left(t+\vartheta,\tau,t_0\right)d\vartheta+\eta\left(t,-r\right)-\eta\left(t,\tau\right),$$

$$\tau\in\left(-r,t-r\right),\quad t\in\left(t_0,t_0+r\right),$$

$$T\left(t,\tau,t_0\right)=\int_{-r}^{0}\eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right)T\left(t+\vartheta,\tau,t_0\right)d\vartheta+\eta\left(t,\tau-r\right)-\eta\left(t,\tau\right),$$

$$\tau\in\left(t-r,0\right),\quad t\in\left(t_0,t_0+r\right),$$

с начальной функцией $T\left(t,\tau,t_0\right)=0$ *при* $t\in[t_0-r,t_0]$.

Доказательство. Преобразуем формулы (1), (2) и (3). При $t\geq t_0+r$, $\tau\in(-r,0)$ имеем

$$T\left(t,\tau-t_0,t_0\right)=\frac{d}{d\tau}\int_{-r}^{0}\eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right)\int_{t_0-r}^{\tau}T\left(t+\vartheta,s-t_0,t_0\right)dsd\vartheta+$$

$$+\left[\eta\left(t_0,-r\right)-\eta\left(t_0,\tau-t_0\right)\right]=\frac{d}{d\tau}\int_{t_0-r}^{\tau}\int_{-r}^{0}\eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right)T\left(t+\vartheta,s-t_0,t_0\right)d\vartheta ds+$$

$$+\left[\eta\left(t_0,-r\right)-\eta\left(t_0,\tau-t_0\right)\right]=\int_{-r}^{0}\eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right)T\left(t+\vartheta,\tau-t_0,t_0\right)d\vartheta+$$

$$+\left[\eta\left(t_0,-r\right)-\eta\left(t_0,\tau-t_0\right)\right],$$

При $\tau \in (-r, t-r)\,,\quad t \in (t_0, t_0+r)$, имеем

$$T\left(t,\tau,t_0\right) = \int_{-r}^{0} \eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right) T\left(t+\vartheta,\tau,t_0\right) d\vartheta + \eta\left(t,-r\right) - \eta\left(t,\tau\right),$$
$$\tau \in (-r, t-r)\,,\quad t \in (t_0, t_0+r)$$

При $\tau \in (t-r, 0)\,,\quad t \in (t_0, t_0+r)$, имеем

$$T\left(t,\tau,t_0\right) = \int_{-r}^{0} \eta'_\vartheta\left(t,\vartheta\right) T\left(t+\vartheta,\tau,t_0\right) d\vartheta + \eta\left(t,\tau-r\right) - \eta\left(t,\tau\right)$$

При каждом фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ на любом конечном интервале полуоси $(\tau, +\infty)$ уравнение (8) является матричным интегральным уравнением Вольтерра второго рода в пространстве функций, ограниченных в существенном на этом интервале. Поэтому оно имеет единственное решение ([12], с.153). Утверждение доказано.

Утверждение 7.2. *Если η – матричная функция скачков с конечным числом точек разрыва, определяемая формулой (4), то функция T является единственным решением разностных уравнений с непрерывным временем*

$$T\left(t,\tau,t_0\right) = -\sum_{m=1}^{N} A_m\left(t\right) T\left(t+\vartheta_m,\tau,t_0\right) + \sum_{m=1}^{N} A_m\left(t_0\right)\left(I_n - 1\left(\vartheta_m - \tau + t_0\right)\right),$$
$$\tau \in (-r, 0)\,,\quad t \geq t_0 + r,$$

$$T\left(t,\tau,t_0\right) = -\sum_{m=1}^{N} A_m\left(t\right) T\left(t+\vartheta_m,\tau,t_0\right) + \sum_{m=1}^{N} A_m\left(t\right)\left(I_n - 1\left(\vartheta_m - \tau\right)\right),$$
$$\tau \in (-r, t-r)\,,\quad t \in (t_0, t_0+r)\,,$$

$$T\left(t,\tau,t_0\right) = \sum_{m=1}^{N} A_m\left(t\right)\left(1\left(\vartheta_m - \tau + r\right) - 1\left(\vartheta_m - \tau\right)\right) -$$
$$-\sum_{m=1}^{N} A_m\left(t\right) T\left(t+\vartheta_m,\tau,t_0\right),\quad \tau \in (t-r, 0)\,,\quad t \in (t_0, t_0+r)\,,$$

с начальной функцией $T\left(t,\tau,t_0\right) = 0$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$.

Доказательство. При $t \geq t_0 + r$, $\tau \in (-r, 0)$ имеем

$$T(t,\tau,t_0) = \sum_{m=1}^{N} A_m(t) \frac{d}{d\tau} \int_{-r}^{0} d_\vartheta 1(\vartheta_m - \vartheta) \int_{t_0-r}^{\tau} T(t+\vartheta, s, t_0)\, ds +$$

$$+ \left[\sum_{m=1}^{N} A_m(t_0)\, 1(\vartheta_m + r) - \sum_{m=1}^{N} A_m(t_0)\, 1(\vartheta_m - \tau + t_0) \right] =$$

$$= -\sum_{m=1}^{N} A_m(t)\, T(t+\vartheta_m, \tau, t_0) + \sum_{m=1}^{N} A_m(t_0) - \sum_{m=1}^{N} A_m(t_0)\, 1(\vartheta_m - \tau + t_0)$$

Аналогично получаются второе и третье уравнение. Единственность решения следует из единственности решения начальной задачи Коши для разностного уравнения. Утверждение доказано.

Утверждение 7.3. *Если η – матричная функция, определяемая формулой (6), то функция T является единственным решением разностных уравнений с непрерывным временем*

$$T(t,\tau,t_0) = \int_{-r}^{0} \eta'_{1\vartheta}(t,\vartheta)\, T(t+\vartheta,\tau,t_0)\, d\vartheta + [\eta_1(t_0,-r) - \eta_1(t_0,\tau - t_0)] -$$

$$- \sum_{m=1}^{N} A_m(t)\, T(t+\vartheta_m,\tau,t_0) + \sum_{m=1}^{N} A_m(t_0)\,(I_n - 1(\vartheta_m - \tau + t_0)),$$

$$\tau \in (-r, 0), \quad t \geq t_0 + r,$$

$$T(t,\tau,t_0) = \int_{-r}^{0} \eta'_{1\vartheta}(t,\vartheta)\, T(t+\vartheta,\tau,t_0)\, d\vartheta + \eta_1(t,-r) - \eta_1(t,\tau) -$$

$$- \sum_{m=1}^{N} A_m(t)\, T(t+\vartheta_m,\tau,t_0) + \sum_{m=1}^{N} A_m(t)\,(I_n - 1(\vartheta_m - \tau)),$$

$$\tau \in (-r, t-r), \quad t \in (t_0, t_0 + r),$$

$$T(t,\tau,t_0) = \int_{-r}^{0} \eta'_{1\vartheta}(t,\vartheta)\, T(t+\vartheta,\tau,t_0)\, d\vartheta + \eta_1(t,\tau - r) - \eta_1(t,\tau) -$$

$$- \sum_{m=1}^{N} A_m(t)\, T(t+\vartheta_m,\tau,t_0) + \sum_{m=1}^{N} A_m(t)\,(1(\vartheta_m - \tau + r) - 1(\vartheta_m - \tau)),$$

$$\tau \in (t-r, 0), \quad t \in (t_0, t_0 + r),$$

с начальной функцией $T(t,\tau,t_0) = 0$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$.

Доказательство. Следует из утверждений 7.1 и 7.2.

Список литературы

[1] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972, 352с.

[2] Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967, 548с.

[3] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984, 421с.

[4] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 384с.

[5] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981, 448с.

[6] Долгий Ю.Ф., Леонтьева Т.В. Устойчивость разностных систем с непрерывным временем // Деп. в ВИНИТИ 06.07.84. УрГУ, Екатеринбург, 1984, N4765-84, 17с.

[7] Близоруков М.Г. К вопросу о построении решений линейных разностных систем с непрерывным временем // Дифференциальные уравнения, 1996, Т.32, N1, С.127-128.

[8] Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Линейные неоднородные разностные уравнения. М.: Наука, 1986, 128с.

[9] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971, 309с.

[10] Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1972.

[11] Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В. Представления решений стационарных функционально-разностных уравнений // Изв.УрГУ, 2002, N22, Вып.4, С.62-80.

[12] Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 448с.

[13] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во.иностр.литературы, 1962, 895с.