ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы на многообразиях

УДК 514.752.8

Уравнение Якоби для горизонтальных геодезических на неголономном распределении и тензор кривизны Схоутена

Крым В.Р.
Санкт-Петербургское математическое общество
наб. р. Фонтанки, 27, 191023, Санкт-Петербург
e-mail: vkrym12@rambler.ru

Аннотация

В статье доказано, что если распределение определено на многообразии со специальной гладкой структурой и не зависит от вертикальных координат, то тензор кривизны Схоутена совпадает с римановым тензором кривизны. Уравнение Якоби для горизонтальных геодезических на распределении записано через тензор кривизны Схоутена и тензор неголономности. Исследованы необходимые и достаточные условия оптимальности второго порядка для горизонтальных геодезических в субримановой геометрии. Получен новый пример распределения, которое допускает анормальные геодезические, и сформулирована задача о проверке их оптимальности.

Ключевые слова: Уравнение Якоби, неголономные распределения, субриманова геометрия, сопряженные точки, анормальные геодезические, тензор кривизны Схоутена.

Abstract

The paper shows that if the distribution is defined on a manifold with the special smooth structure and does not depend on the vertical coordinates, then the Schouten curvature tensor coincides with the Riemannian curvature tensor. The Schouten curvature tensor is used to write the Jacobi equation for the distribution. This leads to studies on second-order optimality conditions for the horizontal geodesics in sub-Riemannian geometry. New example of a distribution with abnormal geodesics is constructed, their optimality being an open problem.

Key words: Jacobi equation, nonholonomic distributions, sub-Riemannian geometry, conjugate points, abnormal geodesics, Schouten curvature tensor.

1 Введение

Распределением на гладком многообразии N называется семейство подпространств $\mathcal{A}(x) \subset T_xN$, гладко параметризованное точками многообразия. Общая теория вариационного исчисления с неголономными ограничениями $\varphi(t, x, \dot{x}) = 0$ построена в книге [1]. Распределения получаются, если ограничения линейны по скоростям: $\omega_x(\dot{x}) = 0$, где ω – 1-форма [2, 3]. Распределение голономно, если существует подмногообразие $M \subset N$, такое, что распределение $\mathcal{A}$ совпадает с касательным расслоением TM. Субриманова структура на распределении — это скалярное произведение на слоях, гладко зависящее от точки. В субримановой геометрии распределение предполагается вполне неголономным (условие Хёрмандера) [4]. Последовательные коммутаторы базисных векторных полей распределения порождают все касательное пространство.

В 1928 г. румынский математик Врэнчану впервые четко сформулировал понятие неголономной структуры на римановом многообразии и ее отношение к динамике неголономных систем [5]. Голландский геометр Схоутен определил усеченную связность и тензор кривизны для горизонтальных векторных полей [6, 7]. Наконец, советский геометр В.В. Вагнер построил общий тензор кривизны, продолжающий тензор Схоутена, который отвечал всем обычным требованиям, например, он обращается в нуль в том и только в том случае, когда связность Схоутена—Врэнчану — плоская [8, 9]. В 1985 г. эти работы были изложены на современном языке Е.М. Горбатенко [10] (Томск).

Мы рассматриваем задачу оптимизации с неголономными ограничениями для распределения с внутренней метрикой. Эта задача в геометрической постановке требует привлечения связности Схоутена—Врэнчану. Присоединенная задача (минимизации индексной формы функционала энергии) требует привлечения тензора кривизны Схоутена [11]. В настоящей работе доказано, что если распределение и его метрический тензор не зависят от вертикальных координат, то связность Схоутена—Врэнчану распределения совпадает с симметричной римановой связностью некоторого риманова многообразия. В этом случае также тензор кривизны Схоутена совпадает с римановым тензором кривизны некоторого риманова многообразия. Для таких распределений можно выписать геометрически инвариантное уравнение Якоби. С помощью этого уравнения можно найти сопряженные и фокальные точки горизонтальных геодезических. Нами доказано, что большинство теорем о сопряженных точках, известных в римановой геометрии, сохраняются и для распределений. Это позволяет сформулировать достаточные условия оптимальности.

Мы будем рассматривать регулярные геодезические. Для анормальных геодезических мы рассмотрим только вопрос о существовании вариаций и приведем два примера распределений, на которых есть анормальные геодезические. Имеются результаты для гладких экстремальных задач с ограничениями, справедливые без априорных предположений о нормальности [12, 13].

2 Вариации и уравнения вариаций

Пусть $\gamma : [t_0, T] \to N$ – кусочно C^1-гладкий горизонтальный путь. *Элементарной вариацией* C^1-гладкого отрезка пути $\gamma : [t_1, t_2] \to N$ называется однопараметрическое семейство отображений $\sigma(\cdot, \tau) : [t_1, t_2] \to N$, $|\tau| < \varepsilon$, если существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial\sigma}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}$, на «центральной линии» $\sigma(t, 0) = \gamma(t)$ и $\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} \in \mathcal{A}(\sigma(t,\tau))$ при всех допустимых t и τ. Вторые производные $\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial t\partial\tau}$, $\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial\tau\partial t}$ существуют при всех допустимых t и τ и непрерывны в точках пути γ. Элементарные вариации примыкают друг к другу, если они определены на примыкающих отрезках $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ и полученная таким образом вариация непрерывна на своей области определения.

Горизонтальной вариацией горизонтального пути $\gamma : [t_0, T] \to N$ называется однопараметрическое семейство $\sigma(\cdot, \tau) : [t_0(\tau), T(\tau)] \to N$, состоящее из конечного числа последовательно примыкающих друг к другу элементарных вариаций, заданных на примыкающих отрезках $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $\ldots$, $[t_{k-1}, t_k]$, причем $t_1 < t_0(\tau) < t_2$ и $t_{k-1} < T(\tau) < t_k$. Предполагается также, что функции t_0, T имеют непрерывные производные по τ.

С каждой вариацией связаны два векторных поля вдоль отображения σ: $X = \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}$ и $Y = \dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}$. Векторное поле $Y(\cdot, 0)$ вдоль γ будем называть *основным векторным полем* и обозначать просто Y.

Горизонтальная вариация удовлетворяет условиям $\omega^\alpha(\frac{\partial\sigma}{\partial t}) = 0$. Дифференцируя это тождество по τ, получим $\sum\limits_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\omega_k^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\sigma^j}{\partial\tau}\frac{\partial\sigma^k}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^\alpha\frac{\partial^2\sigma^k}{\partial t\partial\tau} = 0$. При $\tau = 0$ получим *уравнения вариаций вдоль* γ*:*

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k^\alpha\frac{dY^k}{dt} + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\omega_k^\alpha}{\partial x^j}\gamma'^k Y^j = 0, \quad \alpha = m+1,\ldots,n. \tag{1}$$

Эти уравнения мы будем обозначать $\Phi^\alpha(Y', Y) = 0$, $\alpha = m{+}1,\ldots,n$. Это система из $n-m$ дифференциальных уравнений и ранг матрицы (ω_k^α) равен $n-m$. Поэтому горизонтальная проекция основного векторного поля может быть выбрана произвольно, а вертикальные компоненты Y^α определяются начальным условием.

Если на концы кривой наложены ограничения, то такие же ограничения наложены и на ее вариацию: $\psi_\mu\big(t_0(\tau), \sigma(t_0(\tau),\tau), T(\tau), \sigma(T(\tau),\tau)\big) = 0$, $\mu = 1,\ldots,p$. Будем считать, что функции ψ_μ зависят от переменных (t_0, x_0, T, x_T). Дифференцируя это тождество по τ и полагая $\tau = 0$, получим

$$\frac{\partial\psi_\mu}{\partial t_0}\xi_{t_0} + \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_0}\Big(Y(t_0) + \gamma'(t_0)\xi_{t_0}\Big) + \frac{\partial\psi_\mu}{\partial T}\xi_T + \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_T}\Big(Y(T) + \gamma'(T)\xi_T\Big) = 0, \tag{2}$$

где $\xi_{t_0} = \frac{dt_0}{d\tau}\big|_{\tau=0}$, $\xi_T = \frac{dT}{d\tau}\big|_{\tau=0}$. Это *уравнения трансверсальности.*

Лемма 1. *Пусть распределение является C^3-гладким. Пусть γ – горизонтальная кривая, поле Y вдоль γ удовлетворяет уравнениям вариаций* (1)*, числа $\xi_{t_0}, \xi_T \in \mathbb{R}$. Тогда существует горизонтальная вариация σ кривой $\gamma = \sigma|_{\tau=0}$ такая, что $Y = \frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\big|_{\tau=0}$ и $\xi_{t_0} = \frac{dt_0}{d\tau}\big|_{\tau=0}$, $\xi_T = \frac{dT}{d\tau}\big|_{\tau=0}$ [1, с. 233].*

Вариацию будем называть нетривиальной, если она отличается от репараметризации исходной кривой. Вариация из леммы 1 может оказаться тривиальной.

Теорема 1 *Пусть распределение размерности $m \geqslant 2$ является C^3-гладким и $\gamma : [t_0, T] \to N$ – горизонтальная непостоянная кривая*[1]*. Тогда существует горизонтальная вариация $\sigma(\cdot,\tau) : [t_0(\tau), T(\tau)] \to N$, $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$, такая, что $\sigma(\cdot, 0) = \gamma$ и содержащая в любой окрестности кривой γ горизонтальные кривые, не совпадающие с γ, причем для этой вариации вектор $Y(t_0)$ и компоненты $Y^i(T)$, $i = 1,\ldots,m$, могут быть выбраны произвольно. Условия трансверсальности на правом конце кривой для вертикальных компонент $Y^\alpha(T)$, $\alpha = m{+}1,\ldots,n$, вообще говоря, не выполняются.*

[1]Кривая называется постоянной, если $\gamma \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Для достаточно короткого отрезка кривой $[t_0, t_1] \subset [t_0, T]$ координаты на многообразии N можно выбрать так, чтобы этот отрезок превратился в прямую $\gamma^1(t) = x^1(t)$, координаты $\gamma^k(t) = 0$, $k = 2, \ldots, m$, а вертикальные координаты определяются условием горизонтальности. Уравнение вариаций (1) определяет вертикальные компоненты поля Y, а его горизонтальные компоненты могут быть выбраны произвольно. Выберем поле Y так, чтобы в некоторой средней точке $\theta \in (t_1, t_2)$ $Y^k(\theta) = \partial_k$ для некоторого k, $2 \leqslant k \leqslant m$, и построим вариацию σ по лемме 1 с начальным условием $Y(t_0) = Y_0$ в соответствии с уравнениями трансверсальности. Раскладывая вариацию σ по формуле Тейлора в окрестности кривой γ, получаем $\sigma(t, \tau) = \gamma(t) + \tau Y + o(\tau)$ $(\tau \to 0)$. Следовательно, горизонтальная вариация σ на отрезке $[t_0, t_1]$ содержит в любой окрестности кривой $\gamma|_{[t_0,t_1]}$ горизонтальные кривые, не совпадающие с $\gamma|_{[t_0,t_1]}$.

Для следующего достаточно короткого отрезка кривой $[t_1, t_2] \subset [t_0, T]$ эту процедуру можно повторить, причем начальное условие будет иметь вид $Y|_{[t_1,t_2]}(t_1) = Y|_{[t_0,t_1]}(t_1)$. Получим новую вариацию, примыкающую к ранее найденной вариации и содержащую в любой окрестности кривой $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ горизонтальные кривые, не совпадающие с $\gamma|_{[t_1,t_2]}$. На последнем участке кривой $[t_p, T] \subset [t_0, T]$ поле Y должно также удовлетворять условию $Y(T) = Y_T$ в соответствии с уравнениями трансверсальности. Выберем горизонтальные компоненты $Y^k|_{[t_p,T]}(t) = Y^k|_{[t_{p-1},t_p]}(t_p)\frac{T-t}{T-t_p} + Y^k_T\frac{t-t_p}{T-t_p}$. Для горизонтальных координат вектора $Y(T)$ условия трансверсальности выполнены. Разбиение $t_0 < t_1 < \ldots < t_p < T$ конечно, потому что отрезок $[t_0, T]$ – компакт и вектор скорости γ' непрерывен. $\square$

В этой теореме предположение о нормальности геодезической не требуется. Для нормальных геодезических справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2 *Пусть γ – регулярная геодезическая, удовлетворяющая краевым условиям $\psi_\mu(t_0, x_0, T, x_T) = 0$, $\mu = 1, \ldots, p$. Тогда существует горизонтальная вариация $\sigma(\cdot, \tau) : [t_0(\tau), T(\tau)] \to N$, $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$, такая, что $\sigma(\cdot, 0) = \gamma$, содержащая в любой окрестности кривой γ горизонтальные кривые, не совпадающие с γ, и удовлетворяющая тем же краевым условиям [1, с. 254].*

Следствие. *Пусть совокупность ξ_0, ξ_1 – числа, Y – векторное поле вдоль регулярной геодезической γ, удовлетворяет уравнениям вариаций вдоль γ и условиям трансверсальности. Однопараметрическое семейство кривых σ,* *существование которого доказано в теореме 2, всегда можно выбрать так, чтобы ξ_0, ξ_1, Y были вариациями этого семейства вдоль γ [1, с. 255].*

Пусть распределение $\mathcal{A}$ на многообразии N^n задано дифференциальными формами $\omega^\alpha = \sum\limits_{s=1}^{m} A_s^\alpha dx^s + dx^\alpha$, $\alpha = m+1, \ldots, n$. Уравнения геодезических для распределения с условием цикличности имеют вид

$$a_0 \frac{D\gamma'}{dt} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} l_\alpha \hat{F}^\alpha \gamma' = 0, \tag{3}$$

где $\frac{D}{dt}$ – ковариантная производная, (a_0, l) – множители Лагранжа, не все равные нулю. Геодезическая называется *нормальной (регулярной)*, если для нее существует система множителей (a_0, l) с $a_0 = 1$. Оператор $\hat{F}^\alpha$ – это тензор неголономности $F_{ij}^\alpha = \partial_j A_i^\alpha - \partial_i A_j^\alpha$ (20), у которого второй индекс поднят с помощью обратного метрического тензора распределения. Для регулярных геодезических можно рассмотреть семейство путей, являющихся решениями этого уравнения с различными начальными точками $x_0 = x_0(\tau)$, с различной начальной скоростью и с различными l_α. Получится *геодезическая вариация* с $2n$ независимыми параметрами. Для анормальных геодезических геодезическая вариация либо не существует, либо имеет значительно меньше независимых параметров.

Пример 1. Пусть двухмерное распределение в $\mathbb{R}^3$ определено формой $\omega = -y^2 dx + dz$. Тензор неголономности $F = \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ 2y & 0 \end{pmatrix}$. Нетривиальные анормальные геодезические возникают при $y = 0$. Это любая абсолютно непрерывная функция $x = x(t)$, причем $z = \text{const}$ в силу $\omega(\gamma') = 0$. Так как мы рассматриваем кривые с точностью до репараметризации, а любая кривая с возвратами неоптимальна, можно считать, что

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = 0 \\ z = \text{const} \end{cases}. \tag{4}$$

Н.Н. Петров [14, 15, 16] и Р. Монтгомери [17] независимо показали, что если эта кривая достаточно короткая, то она оптимальна. В задаче с закрепленными концами нетривиальных геодезических вариаций нет, потому что (4) — это все кривые, удовлетворяющие уравнению $\hat{F}\gamma' = 0$. Найдем общие горизонтальные вариации. Пусть

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = f(t,\tau), \quad f(t,0) \equiv 0. \end{cases} \tag{5}$$

Условие горизонтальности $z' = y^2 x'$, т.е. $z' = f(t,\tau)^2$. Дифференцируя по τ, получим $z''_{t\tau} = 2f(t,\tau)f'_\tau(t,\tau)$, причем вдоль анормальной геодезической $z''_{t\tau}|_{\tau=0} = 0$. Если на левом конце кривой $z'_\tau(t_0,0) = 0$, то и на правом $z'_\tau(T,0) = 0$. Выберем $f(t,\tau) = a(t-t_0)(T-t)\tau$ $(a\neq 0)$, тогда $z'_t = a^2(t-t_0)^2(T-t)^2\tau^2$. Решением этого дифференциального уравнения является $z(t,\tau) = \frac{1}{30}a^2t^3\tau^2(6t^2 - 15tT + 10T^2) + g(\tau)$, где произвольная функция $g(\tau) = z(0,\tau)$ отражает тот факт, что координата z в начальной точке вариации может быть выбрана произвольно. Нами построена нетривиальная вариация анормальной геодезической в задаче с закрепленными концами (она, конечно, не является геодезической вариацией).

Достаточные условия оптимальности анормальных геодезических рассмотрены в работах [18, 19].

Пример 2. Пусть двухмерное распределение в $\mathbb{R}^3$ определено формой $\omega = f(x)g(y)dx - xdy + dz$, где f, g – некоторые достаточно гладкие функции. Тензор неголономности

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f(x)g'(y)+1 \\ -f(x)g'(y)-1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Если уравнение $f(x)g'(y) + 1 = 0$ имеет непрерывное решение для всех $y \in [y_0, y_1]$ при некоторых y_0, y_1, то это анормальная геодезическая с точностью до репараметризации. Так как $x = f^{-1}(-1/g'(y))$, будем предполагать, что $g' : [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$ – диффеоморфизм на свой образ, а f^{-1} существует и непрерывна в области значений функции $-1/g'$. Например, можно взять $g(y) = y^2/2$ и $f(x) = x$, тогда $x = -1/y$. Если $y = y_0 + ct$, то $x = -1/(y_0 + ct)$, где $c = \mathrm{const} \neq 0$ и $t \neq -y_0/c$. Координата $z = z(t)$ определяется условием горизонтальности $dz = xdy - \frac{1}{2}xy^2dx = -\frac{1}{y}dy + \frac{y}{2}d(-\frac{1}{y}) = -\frac{1}{y}dy + \frac{1}{2y}dy = -\frac{1}{2y}dy$. Следовательно, $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}\ln|y_0 + ct|$. Итак, на этом распределении есть анормальные геодезические

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{y_0 + t} \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 - \frac{1}{2}\ln|y_0 + t| \end{cases}, \quad t \neq -y_0, \quad y_0, z_0 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Задача. Установить, какие из этих анормальных геодезических являются кратчайшими для некоторого функционала длины на распределении.

Рассмотрим вариацию

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{y_0+t} \\ y = y_0 + t + f(t,\tau), \quad f(t,0) \equiv 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда для горизонтальной вариации $dz = xdy - \frac{1}{2}xy^2dx = -\dfrac{1}{y_0+t}(1+f'_t)dt - \frac{1}{2}\dfrac{1}{y_0+t}(y_0+t+f(t,\tau))^2 d\dfrac{1}{y_0+t} = -\dfrac{1}{y_0+t}(1+f'_t)dt + \frac{1}{2}\dfrac{1}{(y_0+t)^3}(y_0+t+f(t,\tau))^2dt$. Дифференцируя по τ, получим $z''_{t\tau} = -\dfrac{1}{y_0+t}f''_{t\tau} + \dfrac{1}{(y_0+t)^3}(y_0+t+f(t,\tau))f'_\tau$. Вдоль геодезической $z''_{t\tau}|_{\tau=0} = -\dfrac{1}{y_0+t}f''_{t\tau}|_{\tau=0} + \dfrac{1}{(y_0+t)^2}f'_\tau|_{\tau=0}$. Это надо рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной $z'_\tau|_{\tau=0}$. Если рассматривается задача с закрепленными концами, то на левом конце пути следует выбрать $z'_\tau|_{\tau=0}(t_0) = 0$. Чтобы вариация соответствовала граничным условиям поставленной задачи, необходимо найти функцию f, для которой решение этого дифференциального уравнения с начальным условием $z'_\tau|_{\tau=0}(t_0) = 0$ обращается в нуль на правом конце кривой. Из (8) следует, что $f'_\tau(t_0) = 0$ и $f'_\tau(T) = 0$.

Далее мы будем рассматривать только регулярные геодезические.

3 Присоединенная задача Г.А. Блисса (пример)

3.1 Задача Лагранжа

Рассмотрим двумерное распределение $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^3$, заданное дифференциальной формой $\omega = x^2dx^1 + dx^3$ (в физике принято индексы у координат писать сверху, чтобы было легче проследить за ковариантностью). Минимизируемый функционал имеет вид $J(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^T\big((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2\big)dt$, т.е. метрический тензор распределения единичный. Символы Кристоффеля симметричной римановой связности на распределении равны нулю. Лагранжиан условной вариационной задачи $L = \frac{1}{2}\big((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2\big) + l\omega(\gamma')$. Сужению тензора $F = d\omega = dx^2 \wedge dx^1$ на распределение соответствует матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для этого функционала выполняется условие Гильберта [1, с. 242]: определитель

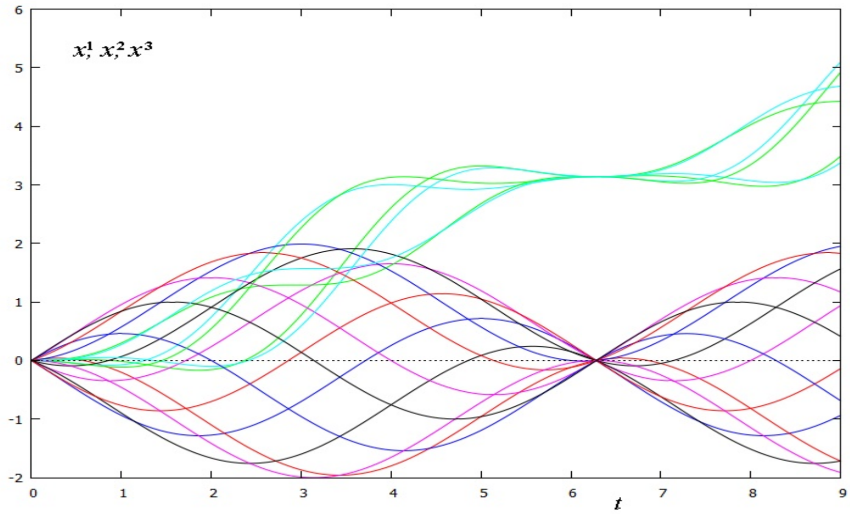

Рис. 1: Неголономные геодезические.

$\begin{vmatrix} (g_{ij}) & (\omega_i) \\ (\omega_j) & 0 \end{vmatrix}$, $i, j = 1, \ldots, n$, не обращается в нуль. Поэтому геодезические будут C^∞-гладкими. Можно считать, что вектор скорости допустимой кривой принадлежит единичному шару. Тогда решение вариационной задачи существует по лемме Филиппова [20] и теореме Рашевского—Чжоу [21, 22].

Горизонтальные геодезические с началом в нуле при $l \neq 0$ имеют вид

$$\begin{cases} x^1(t) = & \frac{1}{l}\big(-v_2 + v_2\cos lt + v_1 \sin lt\big), \\ x^2(t) = & \frac{1}{l}\big(v_1 - v_1\cos lt + v_2 \sin lt\big), \\ x^3(t) = & \frac{1}{4l^2}\Big(2lt(v_1^2+v_2^2) + 2v_1v_2 - 4v_1v_2\cos lt - 4v_1^2 \sin lt + \\ & +2v_1v_2\cos 2lt + (v_1^2 - v_2^2)\sin 2lt\Big). \end{cases} \tag{9}$$

Горизонтальные геодезические при $l = 0$ — это прямые и этот случай мы не рассматриваем. Отметим, что $\dot{x}^1(0) = v_1$ и $\dot{x}^2(0) = v_2$. Неголономные геодезические приведены на рис. 1 при $l = -1$. Как будет показано ниже, на полуинтервале $[0, 2\pi/|l|)$ геодезическая оптимальна, т.е. функционал J имеет локальный слабый минимум. Если $|lt| > 2\pi$, то геодезическая перестает быть оптимальной.

3.2 Присоединенная задача

Рассмотрим вариационную задачу минимизации функционала $\int_{t_0}^{T} f(t, x, \dot{x})\,dt$ с неголономными ограничениями $\varphi(t, x, \dot{x}) = 0$. Предположим, что матрица $\left(\dfrac{\partial\varphi^\alpha}{\partial\dot{x}^k}\right)_{\substack{\alpha=m+1,..,n,\\ k=1,..,n}}$ имеет ранг $n{-}m$ для всех $(t,x,\dot{x})$. Пусть $L(t,x,\dot{x},l) = f(t,x,\dot{x}) + \sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} l_\alpha\varphi^\alpha(t,x,\dot{x})$. Вторая вариация функционала $J=\int_{t_0}^{T} L(t,x,\dot{x},l)\,dt$ имеет вид

$$\delta^2 J = L(t,x,\dot{x})\xi'_\tau\Big|_{t_0}^{T} + 2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x^k}\eta^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^k}\dot{\eta}^k\right)\xi\Big|_{t_0}^{T} + \frac{dL}{dt}\xi^2\Big|_{t_0}^{T} +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^k}\frac{\partial\eta^k}{\partial\tau}\Big|_{t_0}^{T} + \int_{t_0}^{T}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j}\dot{\eta}^i\dot{\eta}^j + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x^i\partial\dot{x}^j}\eta^i\dot{\eta}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i\partial x^j}\eta^i\eta^j\right)dt, \tag{10}$$

где $\xi(t_0)=\frac{dt_0}{d\tau}$, $\xi(T)=\frac{dT}{d\tau}$, $\xi'_\tau(t_0)=\frac{d^2t_0}{d\tau^2}$, $\xi'_\tau(T)=\frac{d^2T}{d\tau^2}$, $\eta=\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}$ при $\tau=0$.

Г.А. Блисс [1, с. 271] сформулировал следующую присоединенную задачу для второй вариации функционала. Для нормальной и неособой экстремали γ можно рассмотреть задачу минимизации функционала $\delta^2 J$ в классе допустимых вариаций η, удовлетворяющих уравнениям вариаций вдоль γ. В рассматриваемом примере распределение задано дифференциальной формой $\omega = x^2dx^1+dx^3$, следовательно, ограничения в присоединенной задаче имеют вид (1)

$$\Phi \equiv \dot{\eta}^3 + x^2\dot{\eta}^1 + \eta^2\dot{x}^1 = 0. \tag{11}$$

Это уравнения вариаций вдоль γ. В рассматриваемом примере лагранжиан $L=\frac{1}{2}\big((\dot{x}^1)^2+(\dot{x}^2)^2\big)+l(x^2\dot{x}^1+\dot{x}^3)$. Следовательно, лагранжиан присоединенной задачи $\Omega=\frac{1}{2}\big((\dot{\eta}^1)^2+(\dot{\eta}^2)^2\big)+l\eta^2\dot{\eta}^1+\lambda(\dot{\eta}^3+x^2\dot{\eta}^1+\eta^2\dot{x}^1)$. Обобщенные импульсы $p_1=\dot{\eta}^1+l\eta^2+\lambda x^2$, $p_2=\dot{\eta}^2$ и $p_3=\lambda$. Обобщенные силы $f_1=0$, $f_2=l\dot{\eta}^1+\lambda\dot{x}^1$ и $f_3=0$. Уравнения Эйлера—Лагранжа присоединенной задачи принимают вид $\ddot{\eta}^1+l\dot{\eta}^2+\lambda\dot{x}^2=0$, $\ddot{\eta}^2=l\dot{\eta}^1+\lambda\dot{x}^1$ и $\dot{\lambda}=0$. С учетом уравнений геодезических (9),

$$\begin{cases} \ddot{\eta}^1 + l\dot{\eta}^2 + \lambda\big(v_1\sin lt + v_2\cos lt\big) = 0\\ \ddot{\eta}^2 - l\dot{\eta}^1 - \lambda\big(v_1\cos lt - v_2\sin lt\big) = 0\\ \dot{\eta}^3 + \frac{1}{l}\big(v_1 - v_1\cos lt + v_2\sin lt\big)\dot{\eta}^1 + \big(v_1\cos lt - v_2\sin lt\big)\eta^2 = 0\\ \dot{\lambda} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Это система линейных однородных дифференциальных уравнений относительно переменных η,λ. Чтобы найти точки, сопряженные с $t_0=0$, необходимо найти решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям $\eta(0)=0$,

$\eta'(0) \neq 0$. Соответствующая часть фундаментальной матрицы системы решений

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sin lt}{l} & \frac{\cos lt - 1}{l} & \frac{(v_1 lt - v_2)\cos lt - (v_1 + v_2 lt)\sin lt + v_2}{l^2} \\ \frac{1-\cos lt}{l} & \frac{\sin lt}{l} & \frac{(v_1 lt - v_2)\sin lt + (v_1 + v_2 lt)\cos lt - v_1}{l^2} \\ \frac{\begin{array}{c}\big(2v_1 lt - 4v_1 \sin lt + \\ + v_1 \sin 2lt - 2v_2 \cos lt + \\ + v_2 \cos 2lt + v_2\big)\end{array}}{2l^2} & \frac{\begin{array}{c}\big(2v_2 lt - v_2 \sin 2lt + \\ + v_1 \cos 2lt + v_1 - \\ -2v_1 \cos lt\big)\end{array}}{2l^2} & \frac{\begin{array}{c}-\big((v_1^2+v_2^2)lt - 4v_1^2 \sin lt + (v_1^2 - v_2^2 + 2v_1v_2 lt)\sin 2lt + \\ +2(v_1 lt - 2v_2)v_1 \cos lt - 2v_1v_2 lt \sin lt + 2v_1v_2 + \\ +(2v_1v_2 + (v_2^2 - v_1^2)lt)\cos 2lt\big)\end{array}}{2l^3} \end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид

$$(\eta^1, \eta^2, \eta^3)^T = P(a_1, a_2, \lambda)^T, \tag{13}$$

где a_1, a_2, λ – постоянные. Определитель матрицы коэффициентов

$$\det P = -2t\big(lt\cos\frac{lt}{2} - 2\sin\frac{lt}{2}\big)\sin\big(\frac{lt}{2}\big)(v_1^2 + v_2^2)/l^4. \tag{14}$$

В сопряженной точке $\det P = 0$. Получаем два уравнения. Для первой серии сопряженных точек $\sin\frac{lt}{2} = 0$ и $t_k = 2\pi k/l$, $k \in \mathbb{Z}$. Соответствующее поле Якоби определяется уравнением (13) с параметрами

$$a_1 = v_2, \quad a_2 = -v_1, \quad \lambda = 0. \tag{15}$$

Для второй серии сопряженных точек $lt\cos\frac{lt}{2} - 2\sin\frac{lt}{2} = 0$. Легко найти, что $t_n \approx \pm(\pi + 2\pi n)/l$, $n \in \mathbb{N}$. Первая сопряженная точка этой серии $t_1 \approx 8.99/l$. Соответствующее поле Якоби определяется уравнением (13) с параметрами

$$a_1 \approx 4.49 v_2/l, \quad a_2 \approx -4.49 v_1/l, \quad \lambda = 1. \tag{16}$$

3.3 Ранг экспоненциального отображения

Уравнения (9) задают экспоненциальное отображение геодезических в рассматриваемой задаче с начальным вектором скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и множителем Лагранжа l: $x(t) = \exp_0^l(t\mathbf{v})$. Рассмотрим семейство путей

$$y(t,\tau) = \exp_0^{l+\tau\mu}(t(\mathbf{v} + \tau\mathbf{b})), \tag{17}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Это вариация пути $x(\cdot)$. Найдем производные

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = -\big((l\mu t\sin lt + \mu\cos lt - \mu)v_2 + (\mu\sin lt - l\mu t\cos lt)v_1 - \\ b_1 l\sin lt - b_2 l\cos lt + b_2 l\big)/l^2$$

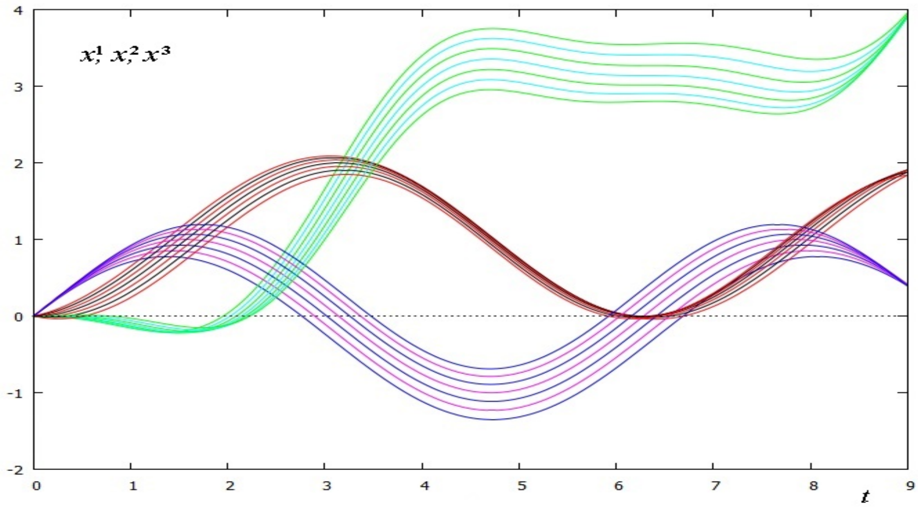

Рис. 2: Сопряженная точка второй серии $t_1 \approx 8.99$.

$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -\big((\mu \sin lt - l\mu t \cos lt)v_2 + (-l\mu t \sin lt - \mu \cos lt + \mu)v_1 - b_2 l \sin lt + b_1 l \cos lt - b_1 l\big)/l^2$$

$$\left.\frac{\partial y_3}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \big((\mu \sin 2lt - l\mu t \cos 2lt - l\mu t)v_2^2 + ((-2l\mu t \sin 2lt - 2\mu \cos 2lt + 2l\mu t \sin lt + 4\mu \cos lt - 2\mu)v_1 - b_2 l \sin 2lt + b_1 l \cos 2lt - 2b_1 l \cos lt + 2b_2 l^2 t + b_1 l)v_2 + (-\mu \sin 2lt + l\mu t \cos 2lt + 4\mu \sin lt - 2l\mu t \cos lt - l\mu t)v_1^2 + (b_1 l \sin 2lt + b_2 l \cos 2lt - 4b_1 l \sin lt - 2b_2 l \cos lt + 2b_1 l^2 t + b_2 l)v_1\big)/(2l^3)$$

Сопряженные точки — это точки, где падает ранг экспоненциального отображения геодезических. В сопряженной точке $\left.\frac{\partial y}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}(t) = 0$. Для сопряженных точек первой серии это условие равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} (2\pi\mu v_1)/l^2 = 0 \\ (2\pi\mu v_2)/l^2 = 0 \\ (2\pi(\mu(v_1^2 + v_2^2) - l(b_2 v_2 + b_1 v_1)))/l^3 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Следовательно, $\mu = 0$ и $b_2 = -b_1 v_1/v_2$. Это означает, что множитель Лагранжа l закреплен и $\mathbf{b} \perp \mathbf{v}$, как в (15).

Для сопряженных точек второй серии уравнение $\left.\frac{\partial y}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}(t) = 0$ необходимо решать численно. Для точки $t_1 \approx 8.99/l$ решение имеет вид $b_1 \approx 4.49 v_2 \mu/l$,

$b_2 \approx -4.49 v_1 \mu / l$. В этом случае множитель Лагранжа l подвергается вариации в соответствии с (17), $\mu \neq 0$. Условие $\mathbf{b} \perp \mathbf{v}$ сохраняется, как в (16). Зная это решение, можно найти семейство кривых, концы которых близки между собой в точке $t_1 \approx 8.99/l$. Это семейство показано на рис. 2 для $l = 1$.

4 Связность и кривизна распределения

Рассмотрим распределение $\mathcal{A}$ размерности m на гладком многообразии N размерности n. На любой достаточно малой области $U \subset N$ координаты x^k, $k = 1, \ldots, n$, можно выбрать так, чтобы «проекция» распределения $\mathcal{A}$ на первые m координат была максимальной. Тогда базис распределения $\mathcal{A}$ можно выбрать следующим образом:

$$e_k = \partial_k - \sum_{\alpha=m+1}^{n} A_k^\alpha \partial_\alpha, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

где $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ – координатные векторные поля. Функции A_k^α будем называть *потенциалами распределения*. Мы предполагаем, что они C^1-гладкие. Распределение $\mathcal{A}$ может быть также задано дифференциальными формами

$$\omega^\alpha = \sum_{s=1}^{m} A_s^\alpha dx^s + dx^\alpha, \quad \alpha = m{+}1, \ldots, n. \tag{20}$$

Далее латинские индексы пробегают диапазон $1, \ldots, m$, а греческие $m{+}1, \ldots, n$. Компоненты скобок Ли $[e_i, e_j] = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{ij}^k e_k + \sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} c_{ij}^\alpha \partial_\alpha$ будем обозначать c_{ij}^k. В базисе (19) отличны от нуля могут быть только компоненты $F_{ij}^\alpha = c_{ij}^\alpha$. Тензор F_{ij}^α — это тензор неголономности распределения.

Для каждой точки $x \in N$ на распределении $\mathcal{A}(x)$ определена квадратичная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ — метрический тензор распределения. В базисе (19)

$$g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j \rangle_x. \tag{21}$$

Метрический тензор распределения гладко зависит от точки.

Чтобы определить ковариантное дифференцирование ∇ на распределении, необходимо ввести симметричную риманову связность. Римановость определяется как обычно:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{22}$$

а условие симметричности необходимо модифицировать:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathrm{pr}([X, Y]), \tag{23}$$

где $\mathrm{pr} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \otimes dx^k$ – (горизонтальная) проекция на распределение. Чтобы эта проекция была инвариантна к преобразованиям координат, необходимо ограничить гладкую структуру многообразия: $\dfrac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} = 0$, $k = 1, \ldots, m$, $\alpha = m+1, \ldots, n$, и $\big(\dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}\big)_{\alpha,\beta=m+1,\ldots,n}$ — единичная матрица [23, 24]. Координаты x^α будем называть *вертикальными*. Матрицы дифференциалов отображений перехода $h_U \circ h_V^{-1}$ для всех карт $h_U : U \to \mathbb{R}^n$, $U, V \subset N$, из выбранной гладкой структуры имеют блочный вид

$$\begin{pmatrix} \Big(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big) & \Big(\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}\Big) \\ & \\ \Big(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^\beta}\Big) & \Big(\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & * \\ & \star & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \ldots & 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \tag{24}$$

— матрицы Якоби отображений перехода от одной карты к другой. Левый верхний блок (квадратный размерности m) является невырожденным линейным преобразованием. Левый нижний блок — нулевой. Правый нижний блок — единичная матрица порядка $n - m$. Такие матрицы образуют группу, поэтому наше определение корректно. Векторы базиса (19) распределения $\mathcal{A}$ преобразуются, как координатный репер: $e_i = \sum_{s=1}^m \dfrac{\partial y^s}{\partial x^i} \tilde{e}_s$. Потенциалы распределения подвергаются также калибровочному преобразованию: $\tilde{A}_j^\alpha = \sum_{s=1}^m A_s^\alpha \dfrac{\partial x^s}{\partial y^j} + \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}$.

Легко получить аналог формулы Кошуля:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = (X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \mathrm{pr}[X, Z]\rangle) + (Y\langle Z, X\rangle - \langle X, \mathrm{pr}[Y, Z]\rangle) - \\ - (Z\langle X, Y\rangle - \langle Z, \mathrm{pr}[X, Y]\rangle). \end{aligned} \tag{25}$$

Но в базисе (19) $\mathrm{pr}[e_i, e_j] = 0$. Предположим, что метрический тензор распределения не зависит от вертикальных координат x^α. Тогда формула Кошуля для римановой pr-симметричной связности распределения такая же, как и на римановом многообразии размерности m: $\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k e_k$ и

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} g^{sk} \big(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\big). \tag{26}$$

Теорема 3 *Для распределения размерности m на многообразии с гладкой структурой* (24) *векторы базиса* (19) *преобразуются, как координатный репер многообразия размерности m. Если распределение и его метрический тензор не зависят от вертикальных координат, то pr-симметричная риманова связность распределения совпадает с симметричной римановой связностью многообразия с метрикой* (21).

Для каждой точки $x \in N$ и любых трех векторов $u, v, w \in \mathcal{A}(x)$ *преобразование кривизны распределения* $\mathcal{A}$ в точке x определяется тензором Схоутена [6, 7, 10]

$$R(u,v)w = \nabla_{\tilde{u}}\nabla_{\tilde{v}}\tilde{w} - \nabla_{\tilde{v}}\nabla_{\tilde{u}}\tilde{w} - \nabla_{\mathrm{pr}[\tilde{u},\tilde{v}]}\tilde{w} - \mathrm{pr}\big[(1-\mathrm{pr})[\tilde{u},\tilde{v}],\tilde{w}\big], \tag{27}$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ – распространения векторов u, v, w до гладких горизонтальных векторных полей на окрестности точки x ($\tilde{u}(x) = u$, $\tilde{v}(x) = v$, $\tilde{w}(x) = w$). Преобразование кривизны не зависит от способа распространения векторов u, v, w до векторных полей, т.е. является тензорным полем на многообразии. Векторное поле $\tilde{w}$ будем выбирать так, чтобы оно не зависело от вертикальных координат x^α. Рассмотрим $R(e_i, e_j)e_k$ для базиса распределения (19). Горизонтальная проекция производной Ли по вертикальному векторному полю $\mathrm{pr}\big[(1-\mathrm{pr})[e_i, e_j], e_k\big] = 0$, потому что e_k не зависит от координат x^α, а результат дифференцирования скобки Ли $[e_i, e_j]$ по e_k обнуляется проекцией. Поэтому в базисе (19) формула для преобразования кривизны упрощается: $R(e_i,e_j)e_k = \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k - \nabla_{\mathrm{pr}[e_i,e_j]}e_k$ [24]. Слагаемое $\nabla_{\mathrm{pr}[e_i,e_j]}e_k = 0$, потому что $\mathrm{pr}[e_i, e_j] = 0$. В римановой геометрии соответствующий член также равен нулю для любых координатных векторных полей, так как $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Поэтому формула для тензора кривизны распределения в базисе (19) совпадает с формулой для тензора кривизны в римановой геометрии: $R_{ijkl} = \langle R(e_k, e_l)e_j, e_i\rangle$ и

$$R^i{}_{jkl} = \partial_k\Gamma^i_{lj} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \sum_{s=1}^{m}\big(\Gamma^s_{lj}\Gamma^i_{ks} - \Gamma^s_{kj}\Gamma^i_{ls}\big). \tag{28}$$

Теорема 4 *Пусть распределение задано на многообразии с гладкой структурой* (24)*. Если распределение и его метрический тензор не зависят от вертикальных координат, то его тензор кривизны Схоутена совпадает с римановым тензором кривизны многообразия с метрикой* (21)*.*

«Взгляд изнутри»: локально мы не можем отличить распределение (19) от многообразия такой же размерности, пока мы не начинаем изучать электричество. Для 4-мерного распределения на 5-мерном многообразии потенциалы A_j — это в точности 4-потенциал электромагнитного поля. Потенциалы распределения при преобразовании координат подвергаются *калибровочному преобразованию:* $\tilde{A}_j^\alpha \mapsto A_j^\alpha + \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}$. Интерпретация калибровочных преобразований как преобразований координат известна в теории Калуцы—Клейна [25]. Но теория Калуцы—Клейна не использует распределений. Нами доказано, что для распределения на многообразии с гладкой структурой (24) калибровочные преобразования также являются следствием преобразований координат.

В физике при описании электромагнетизма почти исключительно используется калибровочно инвариантный тензор F_{ij}, который совпадает с тензором неголономности некоторого распределения [26, 27]. Но существование 4-потенциала электромагнитного поля A_k подтверждено с помощью эффекта Ааронова—Бома [28]. Доказано также существование совместных решений уравнений Максвелла и Дирака [29].

5 Уравнение Якоби

Мы рассматриваем распределения с условием цикличности: распределение $\mathcal{A}$ и его метрический тензор не зависят от вертикальных координат. Множители Лагранжа в предлагаемой теории не зависят от времени. Уравнение Якоби для этого класса вариаций можно записать в геометрически ковариантной форме через преобразование кривизны распределения.

Распределение предполагается вполне неголономным. Если распределение в каком-то смысле интегрируемо, т.е. последовательные коммутаторы (флаг распределения) не порождают все касательное расслоение к многообразию, то вертикальные координаты полей Якоби будут зависимы и определитель фундаментальной матрицы уравнения Якоби будет равен нулю на всей своей области определения.

Рассмотрим задачу минимизации функционала энергии

$$J(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \langle \gamma', \gamma' \rangle \, dt \tag{29}$$

на множестве горизонтальных путей при закрепленном времени и закрепленных концах. Распределение (локально) определяется семейством 1-форм $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=m+1,..,n}$, где n – размерность гладкого многообразия N, m – размерность распределения $\mathcal{A}$. В суммах, содержащих множители Лагранжа

$\sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} l_\alpha \omega^\alpha$ и $\sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} l_\alpha F^\alpha$, индекс α и знак суммирования будем опускать ($F^\alpha = d\omega^\alpha$). В силу условия цикличности, распределение $\mathcal{A}$ и его метрический тензор (g_{ij}) могут зависеть только от координат $\{x^k\}_{k=1,..,m}$. Итак, минимизируем функционал $J(\gamma) = \int_{t_0}^{T} L(\gamma(t), \gamma'(t), l)\,dt$, где функция Лагранжа $L(x, x', l) = \frac{1}{2}\langle x', x'\rangle + l\omega(x')$.

Геодезическая называется *неособой*, если на ней выполняется условие Гильберта [1, с. 242]: определитель $\begin{vmatrix} (g_{ij})_{i,j=1,..,n} & (\omega_i^\alpha)_{\substack{i=1,..,n \\ \alpha=m+1,..,n}} \\ (\omega_j^\beta)_{\substack{j=1,..,n \\ \beta=m+1,..,n}} & 0 \end{vmatrix}$, не обращается в нуль, где g – метрический тензор во всем касательном пространстве к многообразию. В силу условия цикличности, $g_{i\alpha} = g_{\alpha i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = m{+}1, \ldots, n$ (в том числе $g_{\alpha\beta} = 0$). Сужение метрического тензора в TN на распределение $\mathcal{A}$ — это в точности метрический тензор распределения. В координатах (19) метрический тензор распределения имеет матрицу (g_{ij}), $i, j = 1, \ldots, m$. Матрица $(g_{ij})_{i,j=1,..,m}$ в субримановой геометрии положительно определена и, в частности, невырождена. В силу этого условия и выбора 1-форм (20), условие Гильберта в предлагаемой теории всегда выполнено.

Условие Клебша [1, с. 266] для горизонтальных геодезических имеет вид $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\pi_i\pi_j > 0$ для всех $\pi \neq 0$ таких, что $\omega(\pi) = 0$. Если зависимые координаты π_α, $\alpha = m{+}1, \ldots, n$, выразить через независимые и воспользоваться тем, что $g_{i\alpha} = g_{\alpha i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, то получится условие положительной определенности метрического тензора распределения. Поэтому условие Клебша также всегда выполнено. Условие Клебша является обобщением условия Лежандра для задач с неголономными ограничениями.

Двухпараметрической вариацией σ геодезической γ называется семейство кривых $\sigma(t, \mu, \tau)$ такое, что $\sigma(t, 0, 0) \equiv \gamma(t)$ [1, 11]. Геодезическая γ и ее вариация σ предполагаются C^2-гладкими. Кроме того, мы предполагаем, что третьи производные $\dfrac{\partial^3\sigma}{\partial\mu\partial t\partial\tau}$, $\dfrac{\partial^3\sigma}{\partial t\partial\mu\partial\tau}$ существуют при всех допустимых t, μ, τ и непрерывны вдоль γ. В работе [11] было показано, что вторая вариация функционала энергии (гессиан) для распределения имеет вид $\dfrac{\partial^2 J}{\partial\mu\partial\tau}\Big|_{\substack{\tau=0\\ \mu=0}} = \Big\langle \gamma', \dfrac{DZ}{\partial\mu}\Big\rangle\Big|_{t_0}^{T} + l\dfrac{\partial(\omega(Z))}{\partial\mu}\Big|_{t_0}^{T} + I(Y, Z)$, где $Y = \dfrac{\partial\sigma}{\partial\mu}$, $Z = \dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}$. Функционал

$$I(Y,Z) = \int_{t_0}^{T}\Big(\Big\langle \frac{DY}{dt}, \frac{DZ}{dt}\Big\rangle - \big\langle R(Y,\gamma')\gamma', Z\big\rangle\Big)dt - \int_{t_0}^{T} l\Big((\nabla_Y F)(\gamma', Z) + F\big(\frac{DY}{dt}, Z\big)\Big)dt \tag{30}$$

назовем *индексной формой горизонтальной геодезической* γ (R – преобразование кривизны распределения). Векторные поля $Y(\cdot,0,0)$, $Z(\cdot,0,0)$ вдоль γ будем обозначать теми же буквами Y, Z. Если одно из полей Y, Z вертикально, то $I(Y,Z)=0$.

Метрический тензор распределения в субримановой геометрии положительно определен. Поэтому функционал $I(Y,Y)>0$ для достаточно коротких геодезических. Это одно из необходимых условий оптимальности (условие Клебша). Чтобы найти уравнение Якоби, необходимо рассмотреть задачу минимизации функционала $I(Y,Y)$ при выполнении уравнений вариаций $\Phi^\alpha(Y',Y)=0$ (1) и условий трансверсальности. Например, если в исходной задаче Лагранжа концы кривой закреплены, то граничные условия в присоединенной задаче имеют вид $Y(t_0)=0$ и $Y(T)=0$. Итак, минимизируем функционал

$$\begin{aligned}
&I_\lambda(Y)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big(\Big\langle\frac{DY}{dt},\frac{DY}{dt}\Big\rangle-\big\langle R(Y,\gamma')\gamma',Y\big\rangle\Big)dt-\\
&-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}l\Big((\nabla_Y F)(\gamma',Y)+F\big(\frac{DY}{dt},Y\big)\Big)dt+\int_{t_0}^{T}\lambda\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\frac{dY^k}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^j}\gamma'^kY^j\Big)dt.
\end{aligned}\tag{31}$$

Проварьируем поле $Y\mapsto Y+\delta Y$ и соберем линейные по δY слагаемые. Получим

$$\begin{aligned}
&\delta I_\lambda(Y)=\int_{t_0}^{T}\Big(\Big\langle\frac{DY}{dt},\frac{D\delta Y}{dt}\Big\rangle-\big\langle R(Y,\gamma')\gamma',\delta Y\big\rangle\Big)dt-\\
&-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}l\Big((\nabla_{\delta Y}F)(\gamma',Y)+(\nabla_Y F)(\gamma',\delta Y)+F\big(\frac{D\delta Y}{dt},Y\big)+F\big(\frac{DY}{dt},\delta Y\big)\Big)dt+\\
&\qquad+\int_{t_0}^{T}\lambda\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\frac{d\delta Y^k}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^j}\gamma'^k\delta Y^j\Big)dt.
\end{aligned}\tag{32}$$

Если векторное поле Y C^1-гладкое и производная $\frac{DY}{dt}$ абсолютно непрерывна, то

$$\delta I_\lambda(Y)=\Big\langle \frac{DY}{dt},\delta Y\Big\rangle\Big|_{t_0}^{T}-\int_{t_0}^{T}\Big(\Big\langle \frac{D}{dt}\frac{DY}{dt},\delta Y\Big\rangle+\big\langle R(Y,\gamma')\gamma',\delta Y\big\rangle\Big)dt-\frac{l}{2}F\big(\delta Y,Y\big)\Big|_{t_0}^{T}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}l\Big((\nabla_{\delta Y}F)(\gamma',Y)+(\nabla_Y F)(\gamma',\delta Y)-(\nabla_{\gamma'}F)\big(\delta Y,Y\big)-F\big(\delta Y,\frac{DY}{dt}\big)+F\big(\frac{DY}{dt},\delta Y\big)\Big)dt+$$

$$+\lambda\omega(\delta Y)\Big|_{t_0}^{T}+\int_{t_0}^{T}\lambda F\big(\delta Y,\gamma'\big)dt. \quad (33)$$

Так как $F=d\omega$, то $(\nabla_{\delta Y}F)(\gamma',Y)+(\nabla_Y F)(\gamma',\delta Y)-(\nabla_{\gamma'}F)\big(\delta Y,Y\big)=(\nabla_{\delta Y}F)(\gamma',Y)+(\nabla_{\gamma'}F)\big(Y,\delta Y\big)-(\nabla_Y F)(\delta Y,\gamma')=-2(\nabla_Y F)(\delta Y,\gamma')$.

Определение 1 *Пару $(\tilde{Y},\lambda)$, где $\tilde{Y}$ — векторное поле вдоль геодезической γ с множителями Лагранжа l, будем называть полем Якоби с присоединенными множителями Лагранжа λ, если $\tilde{Y}$ удовлетворяет уравнению вариаций* (1) *и его горизонтальная проекция $Y=\operatorname{pr}\tilde{Y}$ удовлетворяет неголономному уравнению Якоби*

$$\frac{D}{dt}\frac{DY}{dt}+R(Y,\gamma')\gamma'+l\widehat{F}\big(\frac{DY}{dt}\big)+l(\nabla_Y\widehat{F})(\gamma')+\lambda\widehat{F}(\gamma')=0. \quad (34)$$

Оператор $\widehat{F}$ — это тензор неголономности F, у которого второй индекс поднят с помощью обратного метрического тензора распределения. Мы рассматриваем распределения с условием цикличности: распределение $\mathcal{A}$ и его метрический тензор не зависят от вертикальных координат. Поэтому множители Лагранжа в предлагаемой теории не зависят от времени. Уравнения (1), (34) совместно с условием $\lambda'=0$ являются системой линейных однородных дифференциальных уравнений относительно переменных (Y,λ). Множество решений этой системы образует линейное пространство. Поэтому мы можем выделить два типа полей Якоби. Для полей Якоби первого типа $\lambda\equiv 0$ (ноль-вектор, потому что число множителей Лагранжа равно коразмерности распределения). Для полей Якоби второго типа $\lambda\neq 0$.

Горизонтальное векторное поле Y вдоль геодезической γ с множителями Лагранжа l будем называть *горизонтальным полем Якоби*, если Y удовлетворяет уравнению (34) с некоторыми λ.

Определение 2 *Точки $t_1,t_2\in[t_0,T]$, $t_1\neq t_2$, называются сопряженными вдоль горизонтальной геодезической γ, если существует нетривиальное поле Якоби Y (с некоторыми λ) вдоль γ, обращающееся в нуль в этих точках: $Y(t_1)=0$ и $Y(t_2)=0$.*

Наглядно сопряженность означает следующее: если из точки $\gamma(t_1)$ выпустить геодезические, образующие с γ углы φ, то эти геодезические будут проходить на расстоянии $o(\varphi)$ $(\varphi \to 0)$ от точки $\gamma(t_2)$. Можно также сказать, что точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ сопряжены вдоль γ, если параметры t_1, t_2 определяются однозначно.

Гладкая вариация $\sigma(\cdot,\cdot) : [t_0, T] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$, $\varepsilon > 0$, называется *геодезической вариацией*, если все ее продольные линии $\sigma(\cdot, \tau)$ геодезические.

Лемма 2. *Если $\sigma(\cdot,\cdot) : [t_0, T] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ — геодезическая вариация, то горизонтальная проекция векторного поля $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}$ является горизонтальным полем Якоби вдоль любой продольной линии $\sigma(\cdot, \tau)$ этой вариации.*

Доказательство. Пусть $X = \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}$, тогда в силу уравнений геодезических $\frac{DX}{\partial t} + l(\tau)\hat{F}X = 0$. Если поле Y горизонтально, то $R(Y,X)X = \frac{D}{\partial\tau}\frac{DX}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{DX}{\partial\tau}$ [11]. Пусть $Y = \mathrm{pr}\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)$, тогда, продолжая это равенство, получим $R(Y,X)X = \frac{D}{\partial\tau}(-l(\tau)\hat{F}X) - \frac{D^2Y}{\partial^2 t} = -l'_\tau\hat{F}X - l(\tau)(\nabla_Y\hat{F})X - l(\tau)\hat{F}\frac{DY}{\partial t} - \frac{D^2Y}{\partial^2 t}$. Обозначив $\lambda = l'_\tau$, получим уравнение (34). □

Теорема 5 *Пусть γ – геодезическая с началом $x_0 = \gamma(t_0)$ и концом $x_1 = \gamma(T)$. Точка x_1 сопряжена с точкой x_0 вдоль γ тогда и только тогда, когда ранг дифференциала $d_{(u,l)}\exp_{x_0}$ немаксимален, т.е. когда (u,l) является критической точкой отображения $(u,l) \mapsto \exp^l_{x_0}(u)$.*

Доказательство. Для распределений с условием цикличности индексная форма $I(Y,Z)$ зависит только от горизонтальных проекций векторных полей Y, Z. Поэтому горизонтальная проекция поля Якоби задачи Блисса удовлетворяет уравнению (34). С другой стороны, уравнение (34) совместно с уравнением вариаций (1) совпадают с уравнениями Якоби задачи Блисса. Мы можем рассмотреть горизонтальное векторное поле, являющееся решением уравнения (34), и найти его вертикальные компоненты с помощью уравнения вариаций (1). Фундаментальная матрица полученной системы решений совпадет с аналогичной матрицей в присоединенной задаче Блисса.

Уравнение Якоби (34) — это результат линеаризации уравнений геодезических

$$\begin{cases} \gamma' = X \\ \frac{DX}{dt} + l\hat{F}X = 0 \\ l' = 0 \\ \omega(X) = 0 \end{cases}. \tag{35}$$

Фундаментальная матрица системы решений в задаче Блисса совпадает с матрицей дифференциала $d_{(u,l)}\exp_{x_0}$, потому что по теореме о дифференцировании решения дифференциального уравнения по начальным данным этот дифференциал удовлетворяет линеаризованным уравнениям геодезических [32, с. 289], [33, с. 120]. Следовательно, точка x_1 сопряжена с точкой x_0 вдоль γ тогда и только тогда, когда ранг дифференциала $d_{(u,l)}\exp_{x_0}$ немаксимален. □

Лемма 3. *Если (Y,λ), (Z,μ) — поля Якоби вдоль геодезической γ с множителями Лагранжа l, то функция*

$$f = \langle Y, Z'\rangle - \langle Y', Z\rangle - lF(Y,Z) - \lambda\omega(Z) + \mu\omega(Y)$$

постоянна.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
f' = \langle Y', Z'\rangle + \langle Y, Z''\rangle - \langle Y'', Z\rangle - \langle Y', Z'\rangle - l(\nabla_{\gamma'}F)(Y,Z) - lF(Y',Z)-\\
- lF(Y,Z') - \lambda(\nabla_{\gamma'}\omega)(Z) - \lambda\omega(Z') + \mu(\nabla_{\gamma'}\omega)(Y) + \mu\omega(Y') =\\
= -\big\langle Y, R(Z,\gamma')\gamma' + l(\nabla_Z\widehat{F})\gamma' + l\widehat{F}Z' + \mu\hat{F}\gamma'\big\rangle +\\
+ \big\langle R(Y,\gamma')\gamma' + l(\nabla_Y\widehat{F})\gamma' + l\widehat{F}Y' + \lambda\hat{F}\gamma', Z\big\rangle -\\
- l(\nabla_{\gamma'}F)(Y,Z) - lF(Y',Z) - lF(Y,Z')-\\
- \lambda(\nabla_{\gamma'}\omega)(Z) - \lambda\omega(Z') + \mu(\nabla_{\gamma'}\omega)(Y) + \mu\omega(Y') =\\
= -l(\nabla_Z F)(\gamma', Y) - l(\nabla_Y F)(Z,\gamma') - l(\nabla_{\gamma'}F)(Y,Z)-\\
- \lambda(\nabla_{\gamma'}\omega)(Z) - \lambda\omega(Z') + \mu(\nabla_{\gamma'}\omega)(Y) + \mu\omega(Y') - \mu F(\gamma', Y) + \lambda F(\gamma', Z) =\\
= -l\,dF(\gamma', Y, Z) - \lambda\big(\omega(Z') + (\nabla_Z\omega)(\gamma')\big) + \mu\big(\omega(Y') + (\nabla_Y\omega)(\gamma')\big) = 0. \quad (36)
\end{aligned}$$

□

Таким образом, поля Якоби сохраняют определенную кососимметрическую форму. Отметим, что векторное поле $X = \gamma'$ является горизонтальным полем Якоби первого типа. Действительно, в силу уравнений геодезических $\gamma'' = -l\widehat{F}\gamma'$, следовательно, $X'' = -l(\nabla_X\widehat{F})\gamma' - l\widehat{F}X'$, а это уравнение (34) (вклад кривизны $R(X,X)X = 0$).

Применяя лемму 3 к произвольному полю Якоби первого типа Y и γ', получим, что $\langle Y, \gamma''\rangle - \langle Y', \gamma'\rangle - lF(Y,\gamma') = C$. Так как γ — горизонтальная геодезическая, то $\gamma'' = -l\widehat{F}\gamma'$ и следовательно, $\langle Y', \gamma'\rangle = \mathrm{const}$.

Определение 3 *Обозначим $\mathcal{X}_\gamma$ — пространство горизонтальных векторных полей вдоль геодезической $\gamma : [t_0, T] \to N$, у которых (слабая) производная интегрируема с квадратом, а норма определяется формулой $\|X\| = X(t_0)^2 + \int_{t_0}^T X'(t)^2 dt$. Индексной формой I геодезической γ назовем билинейную форму на $\mathcal{X}_\gamma$, определенную равенством* (30).

Индексную форму можно переписать следующим образом. Если векторное поле Y C^1-гладкое и производная $\frac{DY}{dt}$ абсолютно непрерывна, то

$$I(Y,Z) = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle\Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \Big(\Big\langle \frac{D}{dt}\frac{DY}{dt}, Z \Big\rangle + \big\langle R(Y,\gamma')\gamma', Z \big\rangle \Big) dt - \\ - \int_{t_0}^T l\Big((\nabla_Y F)(\gamma', Z) + F\big(\frac{DY}{dt}, Z\big) \Big) dt. \quad (37)$$

Из этой формулы следует, что если (Y, λ) – поле Якоби, то

$$I(Y,Z) = \Big\langle \frac{DY}{dt}, Z \Big\rangle\Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T \lambda F(\gamma', Z) dt = \\ = \Big\langle \frac{DY}{dt}, Z \Big\rangle\Big|_{t_0}^T + \lambda\omega(Z)\Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T \lambda\big(-\omega(Z)' + F(\gamma', Z) \big) dt = \\ = \Big\langle \frac{DY}{dt}, Z \Big\rangle\Big|_{t_0}^T + \lambda\omega(Z)\Big|_{t_0}^T, \quad (38)$$

потому что подынтегральное выражение — это $-\Phi(Z', Z)$, тождественно равное нулю в силу (1). В задаче с закрепленными концами вторая вариация функционала энергии равна индексной форме на основном векторном поле вариации σ. Если Y – горизонтальное поле Якоби, обращающееся в нуль на концах геодезической, то $I(Y,Y) = 0$.

Обозначим $\mathcal{Y}_\gamma$ — пространство векторных полей вдоль геодезической $\gamma : [t_0, T] \to N$, удовлетворяющих уравнениям вариаций (1), у которых (слабая) производная интегрируема с квадратом, а норма определяется формулой $\|Y\| = Y(t_0)^2 + \int_{t_0}^T Y'(t)^2 dt$. Если $Y \in \mathcal{Y}_\gamma$, то $I_\lambda(Y) = \frac{1}{2} I(\operatorname{pr} Y, \operatorname{pr} Y)$ и не зависит от λ.

Теорема 6 *Если регулярная геодезическая $\gamma : [t_0, T] \to N$ с множителями Лагранжа l является решением задачи минимизации функционала J, то функционал $I_\lambda(Y)$ неотрицателен для любого векторного поля Y вдоль γ, удовлетворяющего уравнениям вариаций* (1).

Доказательство. В силу теоремы 2 и ее следствия, существует однопараметрическая вариация σ, для которой $\gamma = \sigma|_{\tau=0}$ и $Y = \sigma'_\tau$. Так как на геодезической γ достигается минимум функционала J, то функция $J(\tau)$ для этого семейства также имеет минимум и $J'(0) = 0$, $J''(0) = I_\lambda(Y) \geqslant 0$. Таким образом, вторая производная неотрицательна при любых допустимых вариациях, удовлетворяющих уравнениям вариаций и условиям трансверсальности. □

Теорема 7 *Пусть $\gamma : [t_0, T] \to N$ – геодезическая с множителями Лагранжа l и на полуинтервале $(t_0, T]$ нет точек, сопряженных с t_0. Тогда функционал $I_\lambda(Y)$ положительно определен для всех $Y \in \mathcal{Y}_\gamma$, обращающихся в нуль на концах.*

Доказательство. Пусть ξ – точная нижняя грань чисел, для которых интеграл I_λ, взятый в пределах от t_0 до ξ, положительно определен на классе допустимых вариаций, удовлетворяющих уравнениям (1) при закрепленных концах. Интервалы $[t_0, \xi]$ существуют. Действительно, рассмотрим произвольную горизонтальную вариацию σ с закрепленными концами на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$ и разложим ее поле $Y = \dfrac{\partial \sigma}{\partial \tau}$ в ряд Тейлора при $t \to t_0$: $Y = A(t - t_0) + O((t - t_0)^2)$. Можно считать, что вектор $A \neq 0$. Производная Y'_t на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$ близка к вектору A, а само поле Y – вектор-функция первого порядка малости в точке t_0. Поэтому $I_\lambda(Y) = \langle A, A\rangle\delta + O(\delta^2)$ $(\delta \to +0)$. Так как метрический тензор распределения положительно определен, $\langle A, A\rangle > 0$ и $I_\lambda(Y) > 0$ для всех достаточно малых $\delta > 0$.

Для всех $\varepsilon > 0$ на отрезке $[t_0, \xi + \varepsilon]$ интеграл I_λ положительно определен. Следовательно, I_λ неотрицательно определен на отрезке $[t_0, \xi]$. Проверим, что I_λ положительно определен на отрезке $[t_0, \xi]$. Предположим противное. Тогда существует вариация с закрепленными концами и соответствующее ей поле Y, не равное тождественно нулю, такое, что $I_\lambda(Y) = 0$. Так как функционал I_λ достигает минимума на этом отрезке, поле Y должно быть решением уравнения Якоби, обращающимся в нуль на концах. Это противоречит предположению об отсутствии сопряженных точек.

Точная нижняя граница ξ совпадает с T. Это проверяется, как в [1, с. 305]. □

Теорема 8 *Если функционал I_λ положительно определен на $\mathcal{Y}^0_\gamma$, то на γ нет сопряженных точек.*

Доказательство. Предположим противное: пусть точки $t_1, t_2 \in [t_0, T]$ сопряжены. Тогда существует нетривиальное поле Якоби Y, обращающееся в нуль в этих точках. Продолжим его нулем на оставшуюся часть отрезка $[t_0, T]$. Тогда на этом векторном поле индексная форма равна нулю (противоречие). $\square$

Теорема 9 *Пусть (нормальная) геодезическая $\gamma : [t_0, T] \to N$ соединяет две заданные точки $x_0 = \gamma(t_0)$ и $x_1 = \gamma(T)$ и на полуинтервале $(t_0, T]$ нет точек, сопряженных с t_0. Тогда на кривой γ функционал энергии имеет локальный слабый минимум в задаче с закрепленными концами.*

Доказательство. Пусть ρ_0 – наименьшее из собственных чисел матрицы $g_{ij}(\gamma(t))$ на отрезке $[t_0, T]$. Очевидно, что $\rho_0 > 0$. Пусть $0 < \rho < \rho_0$. Вместо задачи минимизации функционала $I_\lambda(\cdot)$ рассмотрим задачу минимизации функционала $J_\rho(\cdot)$, определенного формулой $J_\rho(Y) = I_\lambda(Y) - \rho \int_{t_0}^T Y'^2 dt$. Рассмотрим функционал J_ρ сначала на пространстве C^1-гладких векторных полей вдоль γ, обращающихся в нуль на концах.

Обозначим $P(t, \rho)$ – матричное решение уравнения Якоби для функционала J_ρ такое, что $P(t_0, \rho) = 0$ и для горизонтальных компонент $P'_{ij}(t_0, \rho) = I_{ij}$ (I – единичная матрица), где первый индекс $i = 1, \ldots, m$ – координата поля Якоби, а второй индекс $j = 1, \ldots, m$ нумерует начальные условия, причем все $\lambda = 0$. Далее, $P'_{i\beta}(t_0, \rho) = 0$, причем все $\lambda = 0$, кроме $\lambda_\beta = 1$, $i = 1, \ldots, m$, $\beta = m+1, \ldots, n$. Для вертикальных компонент $\Phi^\beta(P'_{ij}, P_{ij}) = 0$. Будем считать, что эти уравнения разрешены относительно $P'_{\beta j} = (\Lambda P)_{\beta j}$. По предположению (усиленное условие Якоби), $\det P(t, 0) > 0$ при всех $t \in (t_0, T]$ или $\det P(t, 0) < 0$ также при всех $t \in (t_0, T]$. Для определенности предположим, что $\det P(t, 0) > 0$.

Проверим, что существует такая правая окрестность точки t_0, что $\det P(t, \rho) > 0$ при всех $t \in (t_0, t_0 + \sigma]$. Действительно, из формулы Тейлора и начальных условий следует, что для горизонтальных компонент $P_{ij}(t, \rho) = (t - t_0)(I_{ij} + V_{ij}(t, \rho))$, где $V(t_0, \rho) = 0$ для всех ρ и матрица $V(t, \rho)$ непрерывна по совокупности переменных на замкнутом множестве $\{t_0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant \rho^2 \leqslant \rho_1^2\}$, где $0 < \rho_1^2 < \rho_0^2$. Следовательно, матрица $V(t, \rho)$ равномерно непрерывна на этом множестве. Определитель $\det(P_{ij}(t, \rho))_{i,j=1,..,m} = (t - t_0)^m(1 + v(t, \rho))$. Соответствующая скалярная функция $v(t, \rho)$ также равномерно непрерывна на множестве $\{t_0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant \rho^2 \leqslant \rho_1^2\}$ и при $t = t_0$ обращается в нуль.

В силу выбора начальных условий, $\det(P_{\alpha\beta}(t_0, \rho))_{\alpha,\beta=m+1,..,n} = 0$. Поэтому кратность корня функции $\det P(t, \rho)$ при $t = t_0$ будет больше m. Обозначим эту кратность через p. Тогда $\det P(t, \rho) = (t - t_0)^p(C + u(t, \rho))$, где $C = \text{const}$, а функция $u(t, \rho)$ равномерно непрерывна на множестве $\{t_0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant$

$\rho^2 \leqslant \rho_1^2\}$ и при $t = t_0$ обращается в нуль. В силу равномерной непрерывности функции u, найдется такая не зависящая от ρ окрестность точки t_0, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma$, в которой $|u(t,\rho)| < C$.

Итак, существует такая окрестность точки t_0, в которой функция $\det P(t,\rho)$ при всех достаточно малых ρ строго положительна, кроме точки t_0: $\det P(t,\rho) > 0$ при всех $t \in (t_0, t_0+\sigma]$, $0 \leqslant \rho^2 \leqslant \rho_1^2$.

По предположению, $\det P(t,0) \geqslant \beta > 0$ при всех $t \in [t_0+\sigma, T]$. На этом отрезке функция $\det P(t,\rho)$ равномерно стремится к функции $\det P(t,0)$ при $\rho \to 0$. Следовательно, существует $\rho_2 > 0$ такое, что $\det P(t,\rho) > 0$ при всех $t \in [t_0+\sigma, T]$, $0 \leqslant \rho^2 \leqslant \rho_2^2$.

Итак, при всех значениях ρ: $\rho^2 \leqslant \min\{\rho_1^2, \rho_2^2\}$, для функционала J_ρ выполнено усиленное условие Якоби.

Обозначим $K = \min\{\rho_1, \rho_2\} > 0$. По теореме 7 функционал J_K кривой γ неотрицательно определен на подпространстве $\mathcal{Y}_\gamma^0 \subset \mathcal{Y}_\gamma$ векторных полей вдоль γ, обращающихся в нуль на концах: $J_K(Y) = I_\lambda(Y) - K\langle Y', Y'\rangle \geqslant 0$. Так как $I_\lambda(Y) \geqslant K\langle Y', Y'\rangle$ и скалярное произведение эквивалентно $|Y'|^2$, $I_\lambda(Y) \geqslant K_1\|Y\|^2$ для некоторого $K_1 > 0$, где $\|\cdot\|$ – норма Соболева на $\mathcal{Y}_\gamma^0$. Итак, функционал I_λ строго положительно определен на $\mathcal{Y}_\gamma^0$.

Рассмотрим теперь приращение функционала $\Delta J = \int_{t_0}^T \big(L(x+\tau h, \dot{x}+\tau\dot{h}, l) - L(x,\dot{x},l)\big)dt$ вдоль геодезической γ. Раскладывая подынтегральную функцию по формуле Тейлора, получим

$$\Delta J = \frac{\tau^2}{2}\int_{t_0}^T \sum_{i,j=1}^n \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} h^i \dot{h}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{h}^i \dot{h}^j\Big)dt + r_3, \tag{39}$$

где остаточный член $r_3 = \frac{\tau^3}{6}\int_{t_0}^T \sum\limits_{i,j,k=1}^n \Big(\frac{\partial^3 L}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}\Big|_\theta h^i h^j h^k + 3\frac{\partial^3 L}{\partial x^i \partial x^j \partial \dot{x}^k}\Big|_\theta h^i h^j \dot{h}^k + 3\frac{\partial^3 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}\Big|_\theta h^i \dot{h}^j \dot{h}^k\Big)dt$. Слагаемые, содержащие третьи производные лагранжиана по скоростям, равны нулю. Значения производных от лагранжиана в остаточном члене вычисляются в некоторой средней точке промежутка $(\gamma, \gamma+\tau h)$. Интеграл в (39) — это вторая вариация функционала энергии $\delta^2 J(h) = I(h,h) \geqslant K_1\|h\|^2$. Чтобы оценить остаточный член, используем неравенство Пуанкаре: существует постоянная $C > 0$ такая, что $\int_{t_0}^T h^2 dt \leqslant C\int_{t_0}^T \dot{h}^2 dt$ для всех функций h из пространства Соболева, у которых производная интегрируема с квадратом и $h(t_0) = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность нуля в пространстве Соболева, что для всех точек h этой окрестности остаточный член не превосходит $\varepsilon\|h\|^2$. Это доказательство аналогично [35, с. 120]. □

Условие Вейерштрасса для функционала $J = \int_{t_0}^{T} L(x,x',l)dt$ имеет вид $E(x,x',l,y') \geqslant 0$ при всех допустимых $y' \neq x'$ вдоль геодезической $x(\cdot)$, где

$$E(x,x',l,y') = L(x,y',l) - L(x,x',l) - \sum_{i=1}^{n} (y'^i - x'^i) \frac{\partial L}{\partial x'^i}(x,x',l) \tag{40}$$

— функция Вейерштрасса [1, с. 265]. Эта функция представляет собой разность между значением функции L в точке (x,y',l) и первыми двумя членами ее разложения Тейлора с центром (x,x',l). Поэтому функция Вейерштрасса может быть записана как остаточный член формулы Тейлора в средней точке:

$$E(x,x',l,y') = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (y'^i - x'^i)(y'^j - x'^j) \frac{\partial^2 L}{\partial x'^i \partial x'^j}(x, x' + \theta \cdot (y' - x'), l). \tag{41}$$

Условие допустимости — это условие горизонтальности $\omega(x') = 0$ и $\omega(y') = 0$. Поэтому координаты x'^α, $\alpha = m{+}1,\ldots,n$, зависимы и их можно выразить через независимые координаты x'^i, $i = 1,\ldots,m$, и аналогично для y'. В силу условия цикличности, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x'^i \partial x'^\alpha} = 0$, $i = 1,\ldots,n$, $\alpha = m{+}1,\ldots,n$. Тогда эта формула принимает вид

$$E(x,x',l,y') = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} (y'^i - x'^i)(y'^j - x'^j) g_{ij}(x), \tag{42}$$

где $(g_{ij})_{i,j=1,..,m}$ – матрица метрического тензора распределения. Так как в субримановой геометрии метрический тензор распределения положительно определен, условие Вейерштрасса всегда выполнено и даже в усиленной форме: $E(x,x',l,y') > 0$ при всех допустимых $y' \neq x'$.

Так как в уравнении Якоби используется кривизна распределения и производные от тензора неголономности, мы должны предположить, что метрический тензор и потенциалы распределения кусочно C^2-гладкие. Тогда в силу уравнений геодезических для регулярной геодезической вектор скорости также C^2-гладкий, т.е. угловые точки (точки разрыва для γ') отсутствуют. Следовательно, в силу основного достаточного условия Г.А. Блисса [1, с. 280], *в условиях теоремы 9 функционал J достигает на геодезической γ сильного (локального) и строгого минимума в классе достаточно близких к γ горизонтальных кривых с данными граничными условиями.* Для такой кривой выполняются правило множителей, усиленные условия Вейерштрасса и Клебша, положительная определенность второй вариации и отсутствие угловых точек.

6 Пример

В этом разделе постановка задачи — как в разделе 3.1. Рассмотрим двумерное распределение $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^3$, заданное дифференциальной формой $\omega = x^2dx^1 + dx^3$. Минимизируемый функционал имеет вид $J(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^T \big((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2\big)dt$, т.е. метрический тензор распределения g равен единичной матрице второго порядка (евклидова метрика). Символы Кристоффеля симметричной римановой связности на распределении равны нулю. Преобразование кривизны распределения в этой задаче также равно нулю. Если записать предложенное в настоящей работе уравнение Якоби (34) с учетом уравнений геодезических (9), то получатся в точности первые два уравнения системы (12). Чтобы не выписывать еще раз те же уравнения, найдем только точки Якоби первого типа, т.е. для $\lambda = 0$. Тогда уравнение (34) примет вид $\begin{cases} \frac{d^2Y^1}{dt^2} + l\frac{dY^2}{dt} = 0 \\ \frac{d^2Y^2}{dt^2} - l\frac{dY^1}{dt} = 0 \end{cases}$. Общее решение имеет вид

$$\begin{cases} Y^1(t) = c_1 + \frac{1}{l}\big(c_2 \sin lt + c_4(\cos lt - 1)\big) \\ Y^2(t) = c_3 + \frac{1}{l}\big(c_2(1 - \cos lt) + c_4 \sin lt\big). \end{cases} \tag{43}$$

Если на левом конце геодезической $Y(0) = 0$, то $c_1 = 0$ и $c_3 = 0$. Фундаментальная матрица этой системы решений имеет вид $\frac{1}{l}\begin{pmatrix} \sin lt & \cos lt - 1 \\ 1 - \cos lt & \sin lt \end{pmatrix}$. Детерминант этой матрицы равен $\frac{2}{l^2}(1 - \cos lt)$. Поэтому на промежутке $0 < |l|t < 2\pi$ на геодезической нет точек, сопряженных с ее началом. Но в точках $t_k = 2\pi k/l$, $k \in \mathbb{Z}$, вся фундаментальная матрица обращается в нуль.

Вертикальная компонента поля Якоби определяется уравнением вариаций $\dot{Y}^3 + x^2\dot{Y}^1 + Y^2\dot{x}^1 = 0$. Его решение, обращающееся в нуль на левом конце кривой, имеет вид $Y^3 = c_2\big(2v_1lt - 4v_1\sin lt + v_1\sin 2lt - 2v_2\cos lt + v_2\cos 2lt + v_2\big)/(2l^2) + c_4\big(2v_2lt - v_2\sin 2lt - 2v_1\cos lt + v_1\cos 2lt + v_1\big)/(2l^2)$. В точках $t_k = 2\pi k/l$ вертикальная компонента $Y^3(t_k) = 2\pi(v_1c_2 + v_2c_4)/l^2$. Эта компонента обращается в нуль, если $v_1c_2 = -v_2c_4$. Таким образом, точки $t_k = 2\pi k/l$ сопряжены с начальной точкой $t_0 = 0$. Их кратности равны единице. Это сопряженные точки первого типа.

Сопряженные точки второго типа также могут быть найдены из уравнения (34) при $\lambda \neq 0$.

7 Заключение

Итак, нами предложено геометрически инвариантное уравнение Якоби для геодезических на распределении в субримановой геометрии с использованием связности и кривизны распределения. Так же, как и в общей теории Г.А. Блисса, это уравнение для регулярных геодезических. Так как распределения допускают также анормальные геодезические, мы привели два примера таких геодезических. Первый пример был открыт независимо Н.Н. Петровым и Р. Монтгомери. Во втором примере мы установили существование анормальных экстремалей и сформулировали задачу: найти метрику на распределении, для которой эти экстремали будут кратчайшими. Известно, что «запас вариаций» для анормальных геодезических меньше, чем для регулярных. Мы доказали теорему, с помощью которой на этот вопрос можно взглянуть более конструктивно, чем в общей теории.

В римановой геометрии есть много теорем, использующих кривизну многообразия и уравнение Якоби, например, теорема Синга, теорема Картана—Адамара, теоремы Рауха и Берже. Полученное нами уравнение открывает перспективы использования такого же подхода в субримановой геометрии.

Список литературы

[1] *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. М.: Иностранная литература, 1950. (Пер. с англ.: *Bliss G.A.* Lectures on the calculus of variations. Chicago, Illinois.)

[2] *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики, фундаментальные направления. Т. 16. С. 5–85. М.:ВИНИТИ, 1987.

[3] *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономный оператор Лапласа // Проблемы математического анализа. 1990. Т. 11. С. 96–108.

[4] *Gromov M.* Carnot—Carathéodory spaces seen from within // Prog. Math. 1996, 144, 79–323.

[5] *Vranceanu G.* Parallélisme et courbure dans une variété non holonome // Atti del congresso lnternaz. del Mat. di Bologna, 1928, 6.

[6] *Schouten J.A., van Kampen D.* Zur Einbettung und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Annalen. 1930. V. 103. P. 752–783.

[7] *Schouten J.A., Kulk V.D.* Pfaffs problem and its generalization. Oxford: Clarendon Press, 1949.

[8] *Вагнер В.В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. Казань: Изд-во Каз. физ.-мат общ., 1939.

[9] *Вагнер В.В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 301–327.

[10] *Горбатенко Е.М.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий (по В.В. Вагнеру) // Геом. сб. Томского ун-та. 1985. Вып. 26. С. 31–43.

[11] *Крым В.Р.* Поля Якоби для неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. N 4. С. 51–61.

[12] *Arutyunov A.V.* Second-order conditions in extremal problems. The abnormal points // Transactions of the American Mathematical Society. 1998. Vol. 350, N 11. P. 4341–4365.

[13] *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.

[14] *Петров Н.Н.* Существование анормальных кратчайших геодезических в субримановой геометрии // Вестн. С.-Петерб. ун-та, сер. 1, 1993, Вып. 3 N15, с. 28–32.

[15] *Петров Н.Н.* О кратчайших субримановых геодезических // Дифференц. уравнения, 30:5 (1994), 768–775; Differ. Equ., 30:5 (1994), 705–711.

[16] *Петров Н.Н.* Об одной задаче субримановой геометрии // Дифференц. уравнения, 31:6 (1995), 973–979; Differ. Equ., 31:6 (1995), 911–916.

[17] *Montgomery R.* A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry // J. Dynam. Contr. Syst. 1995, N1, P. 49–90.

[18] *Dmitruk A.V.* Quadratic sufficient minimality conditions for abnormal sub-Riemannian geodesics // J. Math. Sci. 2001, V. 104, N1, P. 779–829.

[19] *Bryant R.L., Hsu L.* Rigidity of integral curves of rank-2 distributions // Invent. Math. 1993, V. 114, N2, P. 435–461.

[20] *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ, серия математика и механика. 1959. N2. С. 25–32.

[21] *Рашевский П.К.* Любые две точки вполне неголономного пространства могут быть соединены допустимой кривой // Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта, сер. физико-матем. 1938. Вып. 2. С. 83–94.

[22] *Chow W.L.* Über Systeme von linearen partiellen Differential-gleichungen erster Ordnung // Math. Ann. 1939. V. 117, N1. P. 98–105.

[23] *Крым В.Р., Петров Н.Н.* Каузальные структуры на гладких многообразиях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 2. N 9. С. 27–34.

[24] *Крым В.Р., Петров Н.Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. N 3. С. 67–79.

[25] *Крым В.Р.* Топологическое квантование зарядов в теории Калуцы—Клейна // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. 2009. N 3. С. 3–12.

[26] *Крым В.Р.* Уравнения геодезических для заряженной частицы в объединенной теории гравитационных и электромагнитных взаимодействий // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 119. N 3. С. 517–528.

[27] *Крым В.Р., Петров Н.Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. N 1. С. 62–70.

[28] Aharonov Y., Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory // Phys. Rev., 2nd series. 1959. Vol. 115. N 3. P. 485–491.

[29] *Esteban M.J., Georgiev V., Séré E.* Stationary solutions of the Maxwell—Dirac and the Klein—Gordon—Dirac equations // Calculus of Variations. 1996. V. 4. P. 265–281.

[30] *Крым В.Р.* Индексная форма для неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. N 2. С. 31–40.

[31] *Krym V.R.* The Schouten Curvature for a Nonholonomic Distribution in Sub-Riemannian Geometry and Jacobi Fields // Proceedings of the School-Seminar on Optimization Problems and their Applications (OPTA-SCL 2018). Omsk, Russia, July 8–14, 2018. CEUR Workshop Proceedings, v. 2098 (2018).

[32] *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1963.

[33] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[34] *Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А.* Введение в риманову геометрию. СПб.: Наука, 1994.

[35] *Зеликин М.И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: ЛЕНАНД, 2017.