ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2006
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциально-разностные уравнения

НОВЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ УСЛОВИЯ ТОЧЕЧНОЙ ПОЛНОТЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.А. Коробов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: alexegor@math.nsc.ru

Аннотация

Дается полное описание точечно вырожденных линейных стационарных систем III и IV порядков. Найдены новые достаточные эффективные условия точечной полноты для систем n-го порядка, матрицы которые имеют блочно треугольный вид. Дана оценка на размерность пространства вырождения линейной стационарной системы.

Введение

Проблема точечной полноты впервые была поставлена Вейсом в связи с проблемой нуль-управляемости для систем с последействием [1]. Он показал, что если соответствующая однородная система является точечно полной, то понятия нуль-управляемости и полной управляемости (в евклидовом пространстве) совпадают.

Вейс доказал, что не всякая нестационарная система является точечно полной и выдвинул гипотезу о точечной полноте линейной стационарной системы с запаздыванием [1]. Первые результаты подтвердили справедливость гипотезы Вейса. Ли доказал справедливость этой гипотезы при невырожденной второй матрице. Иорк и Като независимо показали, что любая система второго порядка с одним запаздыванием является точечно полной. Брукс и Шмитт аналогичный результат получили для случая, когда матрицы системы перестановочны [2]. Однако позже А.М. Зверкин [3] и В.М. Попов [4] построили примеры, опровергающие гипотезу Вейса.

В настоящей работе дается полное описание систем третьего порядка, для которых не выполняется гипотеза Вейса (теорема 3.3). Это описание состоит в том, что найдены все соотношения, которые связывают коэффициенты матриц и параметр запаздывания в таких системах. Определенная симметрия этих соотношений позволила получить простое транцендентное условие на параметры широкого класса уравнений шестого порядка с запаздыванием, обеспечивающее точечную полноту при любом параметре запаздывания (следствие 3.2).

В общем случае имеется алгебраический критерий точечной полноты на языке блочных матриц, т.е. матриц, составленных из блоков, каждый из которых является либо одной из матриц системы, либо нулевой, либо единичной матрицей [5]. На этом языке критерий точечной полноты можно сформулировать проще (теорема 2.1). Однако, в [11] на примере критерия Метельского [10] показывается, что такого сорта критерии не являются эффективными. В связи с этим особый интерес представляют новые простые условия на матрицы стационарной системы с запаздыванием, обеспечивающие ее точечную полноту (теорема 2.2, теорема 4.2). Как следствие классической теоремы Понтрягина [15] получается точечная полнота любой пары матриц порядка 2 над телом $\mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ — каноническое вещественное представление любого связного локально бикомпактного непрерывного тела.

К настоящему времени получены различные критерии точечной вырожденности, которые нашли применение в задачах построения регуляторов, использующих обратную связь с запаздыванием [4], [6–8]. В этой статье мы продолжаем исследование точечной вырожденности, начатое В.М. Поповым [4]. Речь пойдет о таких точечно вырожденных линейных стационарных системах с запаздыванием, что транспонированный вектор, на котором система вырождается, образует с первой матрицей системы полностью наблюдаемую пару. Дается полное описание таких систем, для которых условия его алгебраического критерия могут быть существенно упрощены. В частности, для этих систем найдены простые алгебраические соотношения, связывающие их матрицы (теорема 1.3), получен критерий точечной вырожденности для таких систем четвертого порядка (теорема 3.4). В том случае, который непосредственно обобщает рассмотренный В.М. Поповым класс систем, доказана нильпотентность второй матрицы системы (теорема 3.2).

При исследовании точечной вырожденности была установлена ее тесная связь со спектром системы [7]. В работах [4, 6] показано, что если система третьего порядка точечно вырождена, то она имеет конечный спектр. Мы показываем, что любая описанная система четвертого порядка имеет конечный спектр (следствие 3.1). Кроме того, в [10] описано пространство вырождения системы с конечным спектром. В статье дается оценка на размерность пространства вырождения произвольной стационарной системы с запаздыванием.

Результаты статьи можно широко использовать при решении проблемы точечной вырожденности для системы линейных уравнений в частных производных гиперболического типа [9], а также при исследовании дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием и импульсным воздействием [14].

1. Основные определения и предварительные результаты

Под системой с запаздыванием мы будем подразумевать следующее дифференциально-разностное уравнение n-го порядка

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h)\,, \quad t > 0\,. \tag{1.1}$$

Здесь и далее $h > 0$.

Определение. Система (1.1) называется точечно полной в момент T, если для каждого $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдется такая непрерывная функция $x(t)$, $t \geq -h$, удовлетворяющая (1.1), что $x(T) = x_1$.

Определение. Система (1.1) называется точечно вырожденной для q в момент T, если для любой непрерывной функции $x(t)$, $t \geq -h$, удовлетворяющей системе (1.1), выполнено $q^*x(T) = 0$.

Пусть k — натуральное число. Рассмотрим $nk\times nk$-матрицы A_k, J_k, $nk\times n$-

матрицы B_k, $\tilde{E}_k$:

$$A_k = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B & A \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ E \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Здесь и далее E обозначает единичную матрицу.

Лемма 1.1. *Система (1.1) является точечно вырожденной для q в момент kh тогда и только тогда, когда найдется такое натуральное число m, $m \times nk$-матрица P, $m \times m$-матрица V, m-вектор v, что* $\operatorname{rang}(P) = m$, *$PB_k = 0$, $PA_k = VP$, $v^* P(e^{hA_k} - J_k) = 0$, $v^* P\tilde{E}_k = q^*$.*

Доказательство. Пусть матрицы P и V удовлетворяют соотношению

$$PA_k = VP\,. \tag{1.3}$$

Определим $n \times m$-матрицы $W_1, \dots, W_k$ из условия

$$P(e^{hA_k} - J_k) = (W_1, \dots, W_k)\,. \tag{1.4}$$

Из (1.3) следует $Pe^{hA_k} = e^{hV}P$. Тогда выполнены равенства

$$\begin{aligned} &W_1 = e^{hV}P_1\,, \\ &W_j = e^{hV}P_j - P_{j-1}\,, \quad j = 2, \dots, k\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Аналогично показывается, что если определить $W_1, \dots, W_k$ по (1.5), то выполнено равенство (1.4). По теореме 2 из [4] лемма доказана.

Пусть система (1.1) является точечно вырожденной для q в момент kh. Обозначим через v_q^* nk-вектор v^*P, где вектор v и матрица P удовлетворяет условию леммы 1.1. В доказательстве следствия 2 в [4] показано, что nk-вектор v_q определяется единственным образом.

Определение. Система (1.1) называется k-регулярно точечно вырожденной, если найдется такой $q \in \mathbb{R}^n$, что система (1.1) является точечно вырожденной для q в момент kh и

$$\operatorname{rang}(v_q\,, A_k^* v_q\,, \ldots, A_k^{*nk-1} v_q) = \operatorname{rang}(q, A^* q\,, \ldots, A^{*n-1} q) = n\,. \qquad (1.6)$$

Замечание 1. Всякая регулярная точечно вырожденная система (1.1) является 2-регулярно точечно вырожденной.

Действительно, из (1.2) и полной управляемости пары (A, B) следует, что

$$\operatorname{rang}\,(B_2, A_2 B_2, \ldots, A_2^{2n-1} B_2) \geq n\,.$$

Поскольку столбцы этой матрицы лежат в ядре линейного преобразования, которое каждый $2n$-вектор умножает на матрицу, составленную из строк $v_q^* A_2^i$, $i = 0, \ldots, 2n-1$, то размерность образа этого преобразования не превосходит n. Отсюда уже следует справедливость (1.6).

Замечание 2. Системы (1.1), являющиеся k-регулярно точечно вырожденными, и только такие точечно вырожденные системы для вектора q, удовлетворяющего последнему равенству в (1.6), в момент kh позволяют выбрать матрицу P так, что $m = n$, $V = A$, $P\tilde{E}_k = E$.

Поясним сначала почему выполнены равенства (1.6), если матрицу P можно выбрать таким специальным образом. Условия леммы означают, что строки матрицы P порождают n-мерное подпространство в $\mathbb{R}^{nk*}$, в котором имеются элементы $v_q^* A_k^i$, $i = 0, \ldots, kn-1$. Отсюда вытекают равенства (1.6).

Если же система (1.1) является k-регулярно точечно вырожденной, то матрицу P можно выбрать таким специальным образом потому, что, как мы сейчас покажем, можно выбрать матрицу P так, что $P\tilde{E}_k$ — невырожденная матрица.

Покажем, что в качестве P можно взять матрицу

$$P = \begin{bmatrix} v_q^* \\ v_q^* A_k \\ \ldots \\ v_q^* A_k^{n-1} \end{bmatrix}.$$

В самом деле, каждая строка этой матрицы после умножения на B_k превращается в нулевую по определению вектора v_q, а строка, умноженная на A_k, линейно выражается через строки матрицы P ввиду равенств (1.6). Далее, поскольку $v_q^* A_k^i \tilde{E}_k = q^* A^i$, то из (1.6) следует, что $P\tilde{E}_k$ — невырожденная матрица.

Определение. Пусть C — $m \times m$-матрица, D — $m \times n$-матрица. Многочленную матрицу $R(\lambda)$, удовлетворяющую уравнению

$$(\lambda E - C)R(\lambda) = D\chi_C(\lambda) \tag{1.7}$$

будем называть присоединенной матрицей пары (C, D). Здесь и далее $\chi_C(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы C.

Покажем, что уравнение (1.7) определяет матрицу $R(\lambda)$ однозначно. Во-первых, из (1.7) следует, что $\deg R(\lambda) = m - 1$. Разложим теперь λ-матрицу по степеням λ:

$$R(\lambda) = S_0 + S_1\lambda + \ldots + S_{m-1}\lambda^{m-1}\,. \tag{1.8}$$

Пусть α_i, $i = 0, \ldots, m-1$, — коэффициенты многочлена $\chi_C(\lambda)$:

$$\chi_C(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \lambda^m\,. \tag{1.9}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства (1.7), с учетом (1.8) и (1.9), получаем

$$S_{m-1} = D\,,$$

$$S_i = CS_{i+1} + D\alpha_{i+1}\,, \quad i = m-2, m-3, \ldots, 0\,,$$

что эквивалентно равенствам

$$S_i = D\alpha_{i+1} + CD\alpha_{i+2} + \ldots + C^{m-i-1}D\,, \quad i = 0\,, \ldots, m-1\,. \tag{1.10}$$

Теперь из (1.9) и (1.10) следует единственность матрицы $R(\lambda)$, удовлетворяющей (1.7).

2. Необходимые и достаточные условия точечной полноты

Будем говорить, что система (1.1) точечно полна, если она точечно полна в любой момент времени.

Лемма 2.1. *Система (1.1) точечно полна тогда и только тогда, когда она точечно полна в момент* $(n-1)h$.

Доказательство. Очевидно, что если система (1.1) точечно полна, то она точечно полна в момент $(n-1)h$. Предположим, что система (1.1) не является точечно полной в момент T. Тогда найдется такой ненулевой вектор $q \in \mathbb{R}^n$, что система (1.1) является точечно вырожденной для q в момент T. Хорошо известно, что множество моментов вырожденности является лучом (см. [4], теорема 1). Доказательство леммы будет закончено, если мы покажем, что из точечной вырожденности для q в момент $T > (n-1)h$ следует точечная вырожденность для q в момент $(n-1)h$.

Предположим противное. Тогда найдется такое натуральное $l \geq n$, что $q^*S(\lambda)^{l+1} = 0$, $q^*S(\lambda)^l \neq 0$ (см. [4], теорема 1), где $S(\lambda)$ — присоединенная матрица пары (A, B). Значит, найдется такое $r \in \mathbb{R}$, что $q^*S(r)^l \neq 0$. Пусть $\chi_{S(r)}(\lambda) = \gamma_j\lambda^j + \ldots + \lambda^n$, $\gamma_j \neq 0$. Поскольку $l \geq n$, то $l \geq j$. Тогда по теореме Гамильтона-Кэли получаем

$$0 = q^*\chi_{S(r)}(S(r))S(r)^{l-j} = \gamma_j q^* S(r)^l\,.$$

Это противоречит выбору числа l. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Система (1.1) точечно полна в момент kh тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang}(e^{hA_k} - J_k\,, B_k\,, A_kB_k\,, \ldots, A_k^{nk-1}B_k) = nk\,.$$

Следствие 2.1. *Если* $\det(e^{hA_{n-1}} - J_{n-1}) \neq 0$, *система (1.1) точечно полна. В частности, если мы зафиксируем в системе (1.1) матрицы A, B и будем менять h, то при достаточно малом $h > 0$ система (1.1) будет точечно полной.*

Следствие непосредственно следует из теоремы и непрерывной зависимости $\det(e^{hA_{n-1}} - J_{n-1})$ от h.

Доказательство теоремы. Достаточно показать, что система (1.1) точечно вырождена в момент kh тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang}(e^{hA_k} - J_k\,, B_k\,, A_kB_k\,, \ldots, A_k^{nk-1}B_k) < nk\,. \tag{2.1}$$

По следствию 2 из [4] можно считать, что пара $(A_k\,, B_k)$ не является полностью управляемой. Тогда условие (2.1) выполняется тогда и только тогда, когда найдется такой m-вектор v, что $v^*P(e^{hA_k} - J_k) = 0$, где матрица P составлена из строк, образующих фундаментальную систему решений системы уравнений

$$y^*A_k^iB_k = 0, \quad i = 0, \ldots, nk-1\,.$$

Определим $n \times m$-матрицы $W_1\,, \ldots, W_k$ из условия (1.4). Тогда условие (2.1) выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}(W_1\,, \ldots, W_k) < m$.По определению матрицы P найдется такая $m \times m$-матрица V, что выполняется (1.3). Тогда, как показано в доказательстве леммы 1.1, уравнения (1.4) и

(1.5) имеют одно и то же решение $W_1, \ldots, W_k$. Таким образом, условие (2.1) выполняется тогда и только тогда, когда $\mathrm{rang}(W_1, \ldots, W_k) < m$,где матрицы W_i определяются формулой (1.5), а матрица V — формулой (1.3). По следствию 2 из [4] теорема полностью доказана.

Будем говорить, что пара матриц $(A,\ B)$ точечно полна, если для любого $h > 0$ система (1.1) с этими матрицами является точечно полной.

Теорема 2.2. *Пусть A, B — две вещественные $n \times n$-матрицы. Пусть существует разбиение матриц A, B на блоки, в котором обе матрицы имеют блочно-треугольный вид. Пусть для каждой пары соответствующих диагональных $\bar{n} \times \bar{n}$-блоков $\overline{A}$ и $\overline{B}$ выполнено одно из следующих условий:*
а) пара матриц $\overline{A}, \overline{B}$ точечно полна,
б) строки матрицы $(e^{t\overline{A}}\overline{B})^{\bar{n}}$ являются линейно независимыми функциями от t в некоторой окрестности точки $t = 0$,
в) $\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}$,
г) $\det \overline{B} \neq 0$,
д) $\mathrm{rang}\,(\overline{B}) = 1$.

Тогда пара матриц (A, B) точечно полна.

Доказательство. Пусть X, Y — $m \times m$-матрицы. Определим $m \times m$-матрицу $F_{X,Y}(t)$ следующим образом

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}F_{X,Y}(t) = XF_{X,Y}(t) + YF_{X,Y}(t-h), \quad t > 0; \\ F_{X,Y}(0) = E\,, \quad F_{X,Y}(t) = 0\,, \quad t < 0\,. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Хорошо известен критерий (в терминах матриц $F_{A,B}(t)$) точечной полноты системы (1.1) в момент T (см. [5], теорема 2). С учетом леммы 2.1 его можно перефразировать следующим образом: пара матриц (A, B) точечно полна тогда и только тогда, когда строки матриц $F_{A,B}(t)$, $t \geq (n-1)h$, определяют линейно независимые функции от t.

Для того, чтобы воспользоваться этим критерием, мы первым делом покажем индукцией по k, что матрицы $F_{A,B}(t)$, $(k-1)h < t \leq kh$, блочно-треугольны и $\overline{F_{A,B}(t)} = F_{\bar{A},\bar{B}}(t)$, $(k-1)h < t \leq kh$.

Пусть $k = 1$. Тогда из (2.2) следует, что $F_{A,B}(t) = e^{tA}$, $0 < t \leq h$. Поэтому утверждения справедливы. Предположим, что утверждения справедливы для $k = l$. Тогда из (2.2) следует, что

$$\begin{gathered} F_{A,B}(t) = F_{A,B}(lh) + \int\limits_{lh}^{t} e^{(t-\tau)A}BF_{A,B}(\tau - h)d\tau\,, \\ lh < t \leq (l+1)h\,. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Поскольку матрицы $F_{A,B}(t)$, $(l-1)h < t \le lh$, имеют по индуктивному предположению блочно-треугольный вид, то из (2.3) следует, что такими же будут матрицы $F_{A,B}(t)$, $lh < t \le (l+1)h$. Далее, при $lh < t \le (l+1)h$, используя индуктивное предположение, из (2.3) получаем

$$\overline{F_{A,B}(t)} = \overline{F_{A,B}(lh)} + \int\limits_{lh}^{t} \overline{e^{(t-\tau)A} B F_{A,B}(\tau - h)} d\tau =$$

$$= F_{\bar{A},\bar{B}}(lh) + \int\limits_{lh}^{t} e^{(t-\tau)\bar{A}} \bar{B} F_{\bar{A},\bar{B}}(\tau - h) d\tau = F_{\bar{A},\bar{B}}(t)\,.$$

Приступая непосредственно к доказательству теоремы, предположим, что мы уже доказали теорему для одноблочного разбиения. Справедливость заключения теоремы для произвольного разбиения будем доказывать индукцией по числу k диагональных блоков в разбиении.

Пусть разбиение, удовлетворяющее условиям теоремы, имеет $k+1$ диагональных блоков. Без ограничения общности можно считать, что матрицы A и B — верхние блочно-треугольные матрицы в этом разбиении. Возьмем произвольный ненулевой $q \in \mathbb{R}^n$. Согласно предыдущему, доказательство индуктивного перехода будет закончено, если мы укажем такой момент $t_q \ge (n-1)h$, что $q^* F_{A,B}(t_q) \ne 0$. Для этого удобно использовать другое разбиение, имеющее два диагональных блока, где верхний диагональный блок — самый верхний диагональный блок в исходном разбиении. Верхний блок будем помечать чертой, а нижний — волной. Далее, в соответствии с новым разбиением представим и вектор $v \in \mathbb{R}^n : v^* = (\bar{v}^*, \tilde{v}^*)$. Применяя к парам матриц $(\bar{A}, \bar{B})$, $(\tilde{A}, \tilde{B})$ индуктивное предположение, видим, что эти пары являются точечно полными. Поэтому если $\bar{q} \ne 0$, то найдется такой $t_{\bar{q}} \ge (n-1)h$, что $\bar{q}^* F_{\bar{A},\bar{B}}(t_{\bar{q}}) \ne 0$. В этом случае в качестве t_q можно взять $t_{\bar{q}}$, поскольку

$$\overline{q^* F_{A,B}(t_{\bar{q}})} = \bar{q}^* \overline{F_{A,B}(t_{\bar{q}})} = \bar{q}^* F_{\bar{A},\bar{B}}(t_{\bar{q}}) \ne 0\,.$$

Если же $\bar{q} = 0$, то $\tilde{q} \ne 0$ и аналогичные аргументы показывают, что в качестве t_q можно взять $t_{\tilde{q}}$.

Осталось рассмотреть случай, когда разбиение состоит из одного блока. Если для пары (A, B) выполнено условие а), то утверждение очевидно. Пусть теперь выполнено условие б).

Пусть, напротив, нашелся такой ненулевой вектор $q \in \mathbb{R}^n$, что система (1.1) является точечно вырожденной для q в некоторый момент T. Тогда по лемме 2.1 имеем $q^* S(\lambda)^n \equiv 0$, где $S(\lambda)$ — присоединенная матрица пары (A, B) (см. [4], теорема 1).

Пусть $R(\lambda)$ — присоединенная матрица пары (A_n, B_n). Покажем, что

$$R(\lambda) = \begin{bmatrix} S(\lambda)\chi_A(\lambda)^{n-1} \\ S(\lambda)^2\chi_A(\lambda)^{n-2} \\ \dots \\ S(\lambda)^{n-1}\chi_A(\lambda) \\ S(\lambda)^n \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

В самом деле, из (1.2) легко следует, что правая часть равенства (2.4) удовлетворяет уравнению (1.7), которое имеет единственное решение.

Пусть $q_n^* = (0, \dots, 0, q^*)$. Тогда из (2.4) получаем $q_n^* R(\lambda) = q^* S(\lambda)^n = 0$. Теперь из (1.8) и (1.10) следует, что

$$q_n^* A_n^i B_n = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n^2 - 1\,.$$

Отсюда по теореме Гамильтона-Кэли получаем, что

$$q_n^* A_n^i B_n = 0, \quad i = 0, 1, \dots\,. \tag{2.5}$$

Нетрудно проверить, что

$$q_n^* A_n^{n-1} A_n^k B_n = \frac{d^k}{dt^k} q^*(e^{tA}B)^n \bigg|_{t=0}, \quad k = 0, 1, \dots\,.$$

Тогда из (2.5) получаем, что $q^*(e^{tA}B)^n \equiv 0$. Получили противоречие с условием б).

В частности, если пара (A, B) удовлетворяет условию г), то пара (A, B) точечно полна. Случаи, когда пара (A, B) удовлетворяет условию в) или д) хорошо известны (см. [3]; [4], следствие 2). Теорема полностью доказана.

3. Некоторые классы точечно вырожденных систем

Пусть M — квадратная матрица. Обозначим через $\operatorname{tr}(M)$ сумму ее диагональных элементов.

Теорема 3.1. *Для любой k-регулярно точечно вырожденной системы (1.1) выполнены следующие соотношения:*

$$\operatorname{tr}(A^i B) = 0, \quad i = 0, 1, \dots\,; \tag{3.1}$$

$$\mathrm{tr}\,(B^2) = \mathrm{tr}\,(B^3) = \mathrm{tr}\,(AB^2) = \mathrm{tr}\,(AB^3) = 0\,. \qquad (3.2)$$

Доказательство. Пусть система (1.1) является k-регулярно точечно вырожденной. По лемме 1.1, с учетом замечания 2, найдется такая $n \times nk$-матрица P, что $PA_k = AP$. Приравнивая соответствующие $n \times n$-блоки в последнем равенстве, заключаем, что найдутся такие $n \times n$-матрицы T и Z, что

$$\mathrm{tr}\,(A^iTB) = 0, \quad i = 0, 1, \dots\,; \qquad (3.3)$$

$$ZB = AT - TA, \qquad (3.4)$$

$$B = AZ - ZA. \qquad (3.5)$$

Теперь из (3.5) сразу следует (3.1). Далее, выражая B из (3.5) с учетом (3.4), получим $-\mathrm{tr}\,(A^iB^2) = \mathrm{tr}\,(A^i(ZA^2Z - ZAZA))$. При $i = 1$ правая часть последнего равенства всегда равна нулю, а при $i = 0$ в этом легко убедиться, подставив в (3.4) выражение для B из (3.5).

Заметим, что из (3.4) и (3.3) следует равенство

$$\mathrm{tr}\,(A^iZA^2ZB) = 0\,, \quad i = 0, 1\,. \qquad (3.6)$$

Применяя (3.5) с учетом (3.6), (3.4) и (3.3), получим, что $\mathrm{tr}\,(A^iB^3) = \mathrm{tr}\,(A^i(ZAZA^2Z - AZ^2A^2Z))$. Ввиду (3.6) при $i = 0, 1$ правая часть последнего равенства равна нулю. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Для любой 2-регулярно точечно вырожденной для q системы (1.1) n-го порядка $B^n = 0$, $\mathrm{tr}\,(AB^i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, и существует $n \times n$-матрица Z такая, что $B = AZ - ZA$, $ZAZ = Z^2A$, $q^*Z^2 = 0$, $q^*Z = q^*e^{hA}$. В частности, при $n \geq 4$ выполнено $B^{n-1} = 0$. Более того, если матрица Z не является нильпотентной, то пара (A, B) не является полностью управляемой.*

Доказательство. Пусть система (1.1) является точечно вырожденной для q в момент $2h$. Тогда условия леммы 1.1 принимают вид:

$$P_1B = 0, \qquad (3.7)$$

$$P_1A + P_2B = VP_1, \qquad (3.8)$$

$$P_2A = VP_2, \qquad (3.9)$$

$$v^*e^{hV}P_1 = 0, \qquad (3.10)$$

$$v^*e^{hV}P_2 - v^*P_1 = 0, \qquad (3.11)$$

$$v^*P_2 = q^*, \qquad (3.12)$$

где P_1 и P_2 — $m \times n$-матрицы, V — $m \times m$-матрица, v — m-вектор. Так же как в доказательстве предыдущей теоремы, условие (1.6) позволяет выбрать P_1 и P_2 так, что $m = n$ и P_2 — невырожденная матрица.

Определим матрицу Z по формуле

$$Z = P_2^{-1} P_1 \,. \tag{3.13}$$

Тогда (3.8) дает

$$B = AZ - ZA \,. \tag{3.14}$$

Из (3.7) и (3.14) получаем

$$ZAZ = Z^2 A \,. \tag{3.15}$$

Используя (3.9) и (3.12), условия (3.10) и (3.11) можно переписать в следующей форме: $q^* Z^2 = 0$, $q^* Z = q^* e^{hA}$.

Предположим, что матрица Z не является нильпотентной. Тогда найдется ненулевой корень λ характеристического многочлена матрицы Z. Далее до конца доказательства теоремы комплексный собственный вектор (строку) матрицы Z, отвечающий этому числу λ, будем коротко называть собственным вектором. Поскольку $\lambda \neq 0$, то из соотношения $ZAZ = Z^2 A$ следует, что после умножения собственного вектора на матрицу A снова получится собственный вектор. Поэтому транспонированный собственный вектор будет решением однородной системы линейных уравнений с матрицей B^*. Любой собственный вектор является решением (в поле комплексных чисел) системы $x^* A^i B = 0, \;\; i = 0, \ldots, n-1$. Тогда все миноры порядка n матрицы этой системы равны нулю. Значит, пара (A, B) не является полностью управляемой.

Используя (3.14), (3.15), индукцией по l легко показать, что

$$Z^k A Z^l = Z^{k+l} A, \quad k = 1, 2, \ldots; \;\; l = 0, 1, \ldots \,. \tag{3.16}$$

Используя (3.14), (3.16), индукцией по i легко показать, что

$$B^i = (-Z)^{i-1} A^{i-1} B, \quad i = 1, 2, \ldots \,. \tag{3.17}$$

Из (3.14), (3.16) и (3.17) нетрудно получить, что $\operatorname{tr}(A^i B^k) = 0$, $i = 0, 1$; $k = 1, 2, \ldots$. В частности, $B^n = 0$. Доказательство теоремы будет закончено, если мы покажем, что $\operatorname{rang}(B) < n - 1$.

Предположим, что $\operatorname{rang}(B) = n - 1$. Тогда ввиду (3.7) $\operatorname{rang}(P_1) \leq 1$. Отметим теперь, что из (3.12), (3.9), (3.11) и (3.7) следует $q^* e^{hA} B = 0$. Поэтому найдется такой n-вектор p, что

$$P_1 = p q^* e^{hA} \,. \tag{3.18}$$

Подставляя это выражение в (3.10), получаем $v^* e^{hV} p = 0$. Ввиду (3.13) отсюда и из (3.18), с учетом (3.9), получаем $Z^2 = 0$. Тогда (3.17) дает $B^3 = 0$. Рассмотрение жордановой формы матрицы B, позволяет заключить, что $n < 4$. Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Определение. Пусть A — $n \times n$-матрица, h — ненулевое вещественное число. Старший коэффициент (при $(n-1)$-й степени) того многочлена (наименьшей возможной степени), значение которого на матрице A есть e^{-hA} будем кратко называть старшим коэффициентом экспоненты e^{-hA}.

Лемма 3.1. *Пусть пара (q^*, A) полностью наблюдаема. Если $n = 4$ и старший коэффициент экспоненты e^{-hA} не равен нулю, то разрешима система линейных уравнений $q^* r = 1$, $q^* e^{hA} r = 0$, $q^* A e^{hA} r = 0$, $q^* A^2 e^{hA} r = 0$; для любого вектора r, удовлетворяющего этой системе, пара (A, r) полностью управляема.*

Доказательство. Из предположения, что указанная система неразрешима, следует, что строка $q^* e^{-hA}$ линейно выражается через строки q^*, $q^* A$, $q^* A^2$. Подставляя в это выражение значение соответствующего многочлена вместо матрицы e^{-hA}, воспользовавшись линейной независимостью строк q^*, $q^* A$, $q^* A^2$, $q^* A^3$, получаем, что старший коэффициент экспоненты e^{-hA} равен нулю. Полученное противоречие с условием леммы доказывает разрешимость рассматриваемой системы.

Для того, чтобы показать линейную независимость векторов r, Ar, $A^2 r$, $A^3 r$, рассмотрим их линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $\alpha_0 A^3 r + \alpha_1 A^2 r + \alpha_2 A r + \alpha_3 r = 0$. Умножив ее на строку $q^* e^{hA}$ и воспользовавшись условиями на вектор r, получим, что $\alpha_0 q^* e^{hA} A^3 r = 0$. Если бы число α_0 не равнялось нулю, то заменяя в выражении $q^* e^{hA} e^{-hA} r$ матрицу e^{-hA} на соответствующий многочлен третьей степени от матрицы $-hA$ и учитывая условия на вектор r, мы бы получили, что $q^* r = 0$, что невозможно. Поэтому $\alpha_0 = 0$. Теперь, применив то же рассуждение к линейной комбинации, полученной из рассматриваемой умножением на матрицу A, видим, что $\alpha_1 = 0$. Аналогично показывается, что $\alpha_2 = 0$. Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Система третьего порядка $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h)$ является точечно вырожденной тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\mathrm{tr}(A^i B^j) = 0$, $i = 0, 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, $i + j \leq 3$; б) $\mathrm{tr}(A^2 B^2) \neq 0$; в) старший коэффициент экспоненты e^{-hA} отличен от нуля и равен выражению $\mathrm{tr}(A^2 BAB^2)/(\mathrm{tr}(A^2 B^2))^2$. Кроме того, если выполнены условия а), б), в) то $\mathrm{tr}\,(B^2 ABA^2) = -\mathrm{tr}(A^2 BAB^2)$ и пространством вырождения указанной системы является прямая с направляющим вектором, являющимся* *собственным для матрицы $(e^{hA}B)^*$, отвечающим нулевому собственному значению.*

Доказательство. Пусть сначала указанная система является точечно вырожденной. По теореме 4.1, доказанной ниже, пространство ее вырождения — это некоторая прямая. Пусть q — ее направляющий вектор. Тогда по теореме 4 из [8] рассматриваемая система третьего порядка строго регулярна в направлении q. Тогда из теорем 3.1 и 3.2 следует, что выполнено условие а) теоремы. По теореме 3.2 существует нильпотентная 3×3-матрица Z такая, что $B = AZ - ZA$, $q^*Z = q^*e^{hA}$, $q^*Z^2 = 0$, $ZAZ = Z^2A$. В частности, $ZB = 0$, $q^*e^{hA}B = 0$, что доказывает последнее утверждение теоремы.

Далее, хорошо известно, что для рассматриваемой точечно вырожденной системы ранг матрицы B больше единицы (см. [5], следствие 1). Поэтому все строки матрицы Z пропорциональны строке q^*e^{hA}. Значит, найдется такой столбец $r \in \mathbb{R}^3$, что $Z = rq^*e^{hA}$. Последнее соотношение позволяет переписать заключение теоремы 3.2 в следующем виде: $q^*r = 1$, $q^*e^{hA}r = 0$, $q^*e^{hA}Ar = 0$. Из теоремы 3.2 выводим $B^3 = 0$. Сменив систему координат, можно считать, что

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Тогда из доказанного уже условия а) следует, что $\mathrm{tr}(A^2B^2) = -a_{21}^2$ и при $a_{21} \neq 0$ имеем $AB^2 - B^2A = a_{21}B$. Очевидно, что r — собственный вектор матрицы B, $(q^*e^{hA})^*$ — собственный вектор матрицы B^*. Поэтому столбец r пропорционален e_1, а строка q^*e^{hA} пропорциональна строке e_3^*. В частности, матрица Z пропорциональна матрице B^2. Из равенства $q^*r = 1$ выводим, что $e_3^*e^{-hA}e_1 \neq 0$. С другой стороны, из определения старшего коэффициента a_0 экспоненты e^{-hA} и условия а) следует, что $a_0\mathrm{tr}(A^2B^2) = \mathrm{tr}(e^{-hA}B^2) = e_3^*e^{-hA}e_1$. Итак, доказано условие б).

Наконец, из соотношения $a_0\mathrm{tr}(A^2B^2) = e_3^*e^{-hA}e_1$ следует, что $B^2 = a_0\mathrm{tr}(A^2B^2)Z$, и соотношение $AB^2 - B^2A = a_{21}B$ влечет $a_{21} = a_0\mathrm{tr}(A^2B^2)$ и $\mathrm{tr}(A^2BAB^2) = \mathrm{tr}(A^2B(AB^2 - B^2A)) = a_{21}\mathrm{tr}(A^2B^2)$. Из последних двух равенств заключаем, что выполнено условие в).

Пусть теперь выполнены условия а), б), в). Из условия а) аналогично предыдущему выводим, что $B^3 = 0$, а из условия б) следует, что $B^2 \neq 0$. Поэтому, снова можно считать, что матрица B совпадает со своей жордановой формой, т.е. выполнено равенство (3.19). Теперь из условия а) снова следует, что $\mathrm{tr}(A^2B^2) = -a_{21}^2$ и $AB^2 - B^2A = a_{21}B$. Полагаем $Z = (a_{21})^{-1}B^2$. Тогда $B = AZ - ZA$. Кроме того, как и выше, $a_{21} = \mathrm{tr}(A^2BAB^2)/\mathrm{tr}(A^2B^2)$.

Далее, по определению матрицы Z имеем $Z^2 = 0$, $ZB = 0$ и $ZAZ = 0$. Пусть $q^* = e_3^* e^{-hA}$, $r = a_{21}^{-1}e_1$. Тогда $Z = rq^*e^{hA}$.

Наконец, из вида матрицы B следует, что $\mathrm{tr}(e^{-hA}B^2) = e_3^*e^{-hA}e_1$. Поэтому из условия а) заключаем, что

$$q^*r = a_{21}^{-1}\mathrm{tr}(e^{-hA}B^2) = a_{21}^{-1}a_0\mathrm{tr}(A^2B^2)\,,$$

где a_0 — старший коэффициент экспоненты e^{-hA}. Выразив a_{21}^{-1} через отношение следов матриц A^2B^2 и A^2BAB^2, с учетом условия в) получаем, что $q^*r = 1$. Тогда $q^*Z = (q^*r)q^*e^{hA} = q^*e^{hA}$. Поскольку матрица Z удовлетворяет всем условиям теоремы 3 из [8], то система точечно вырождена. Кроме того, из соотношений $B^2 = \gamma Z$, $B = AZ - ZA$, $ZAZ = 0$ следует, что $\mathrm{tr}\,(B^2ABA^2 + A^2BAB^2) = \gamma\,\mathrm{tr}\,(ZA(BA + AB)A) = 0$. Теорема полностью доказана.

Теорема 3.4. *Пусть $h > 0$, $n = 4$, A — $n \times n$-матрица, q — такой n-вектор, что пара (q^*, A) полностью наблюдаема. Система $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - h)$ является регулярной точечно вырожденной для q тогда и только тогда, когда найдется вектор r, образующий с матрицей A полностью управляемую пару и удовлетворяющий следующим соотношениям: $q^*r = 1$, $q^*e^{hA}r = 0$, $q^*Ae^{hA}r = 0$, $Be^{-hA} = Arq^* - rq^*A$.*

Доказательство. Пусть указанная система является регулярной точечно вырожденной для q. Тогда, согласно теореме 3.2, найдется нильпотентная $n \times n$-матрица Z такая, что $ZAZ = Z^2A$, $q^*Z^2 = 0$, $q^*Z = q^*e^{hA}$. Пусть сначала старший коэффициент экспоненты e^{-hA} отличен от нуля. По лемме 3.1 строки $e_1^* = q^*e^{hA}$, $e_2^* = e_1^*A$, $e_3^* = q^*$, $e_4^* = e_2^*A$ образуют базис пространства $(\mathbb{R}^4)^*$. В случае, когда старший коэффициент экспоненты e^{-hA} равен нулю, мы будем предполагать, что $e_1^* = q^*e^{hA}$, $e_2^* = e_1^*A$, $e_3^* = e_2^*A$, $e_4^* = e_3^*A$, и дальше будем вести рассмотрение обоих случаев одновременно.

В обоих случаях, $e_1^*Z = 0$, $e_2^*Z = 0$, строка e_3^*Z пропорциональна e_1^*. Поскольку след матрицы Z равен нулю, то строка $u^* = e_4^*Z$ линейно выражается через строки e_1^*, e_2^*, e_3^*. Поскольку $ZAZ = Z^2A$, то строка u^*AZ пропорциональна строке e_2^*. Предположим, что строка u^* не выражается через строки e_1^*, e_2^*. Тогда ранг матрицы Z^2 не меньше единицы. Поэтому строка u^*A, являющаяся решением системы $x^*Z^2 = 0$, линейно выражается через фундаментальную систему решений этой системы — строки e_1^*, e_2^*, e_3^*. Поэтому ненулевая строка u^*AZ пропорциональна строке e_1^*. Получили противоречие с линейной независимостью строк e_1^* и e_2^*. Итак, u^* выражается через строки e_1^* и e_2^*. В частности, $Z^2 = 0$. Предположим, что строка u^* не пропорциональна строке e_1^*. Тогда из выбора базиса e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^* следует, что строка u^*AZ ненулевая. С другой стороны, $ZAZ = 0$ и, поэтому, $u^*AZ = 0$. Полученное противоречие показывает, что ранг матрицы Z равен единице. Поскольку все строки матрицы Z пропорциональны строке e_1^*, то найдется такой вектор r, что $Z = re_1^*$. Далее, используя свойство ассоциативности произведения прямоугольных матриц, соотношения $q^*Z = q^*e^{hA}$, $Z^2 = 0$, $ZAZ = 0$ можно переписать, соответственно, в виде: $q^*r = 1$, $q^*e^{hA}r = 0$, $q^*Ae^{hA}r = 0$.

Покажем теперь, что векторы r, Ar, A^2r, A^3r линейно независимы. Предположим противное. Применяя теорему Гамильтона-Кэли для матрицы A, получаем, что найдется ненулевой n-вектор w такой, что для любого натурального числа i выполнено $w^*A^ir = 0$, а, значит, $w^*A^iB = 0$. Полученное противоречие с полной управляемостью пары (A, B) завершает доказательство необходимости условий теоремы.

Пусть нашелся такой n-вектор r, образующий с матрицей A полностью управляемую пару, что $q^*r = 1$, $q^*e^{hA}r = 0$, $q^*Ae^{hA}r = 0$. Положим $Z = rq^*e^{hA}$. Тогда $B = AZ - ZA$. Покажем, что пара (A, B) полностью управляема. Предположив противное и воспользовавшись теоремой Гамильтона-Кэли, можно считать, что пространство всех строк w^* таких, что для любого натурального числа i выполнено $w^*A^iB = 0$, ненулевое. Очевидно, что после умножения любой строки из этого пространства на матрицу A мы снова получим строку из этого пространства. Пусть w^* — произвольная строка из рассматриваемого пространства. Покажем, что $w^*r = 0$. Действительно, если $w^*r \neq 0$, то из условия $w^*B = 0$ следует, что q — собственный вектор матрицы A^*, отвечающий некоторому вещественному собственному значению, и мы приходим к противоречию с полной наблюдаемостью пары (q^*, A). Из двух последних утверждений вытекает линейная зависимость векторов r, Ar, A^2r, A^3r, что противоречит полной управляемости пары (A, r).

Наконец, еще В.М.Попов показал что система $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h)$, с указанной матрицей B, является точечно вырожденной для вектора q в любой момент времени $t_1 \geq 2h$. Тем самым теорема полностью доказана.

Теперь мы применим теорему 3.3, чтобы исправить неточность, допущенную в п. 5 статьи [11]. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Выясним при каких значениях параметра a и запаздывания

h система (1.1) точечно вырождена, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Во-первых, $\mathrm{tr}(A^2B)=a-1$ и из условия а) теоремы заключаем, что $a=1$. Во-вторых, характеристические числа матрицы A суть $0, i, -i$. Очевидно, что если значение квазимногочлена $e^{-hx}-a_0x^2-a_1x-a_2$ на матрице A равно нулю, то и значение этого квазимногочлена на любом характеристическом числе матрицы A тоже равно нулю. Из полученной системы линейных уравнений относительно a_0, a_1, a_2 находим, что $a_0=1-\cos h$. С другой стороны, из условия в) находим, что старший коэффициент a_0 экспоненты e^{-hA} равен 1. Окончательно находим, что $h=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, где k — любое целое неотрицательное число. Проверка остальных условий теоремы труда не составляет. Таким образом, система (1.1) с указанными матрицами A и B точечно вырождена тогда и только тогда, когда $a=1$ и $h=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, где k — любое целое неотрицательное число.

Будем говорить, что система (1.1) имеет конечный спектр, если уравнение $|zE-A-e^{-zh}B|=0$ имеет конечное число корней.

Следствие 3.1. *Любая k-регулярно точечно вырожденная система (1.1) четвертого порядка имеет конечный спектр.*

Доказательство. Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям следствия 3.1. По теореме 3.1, ввиду (1.8) и (1.10), получаем, что след присоединенной матрицы $S(\lambda)$ пары (A,B) равен нулю. Кроме того, по теореме 3.1 и теореме 3.2 имеем $B^4=0$ и $\mathrm{tr}(AB^3)=0$. Поэтому можно считать, что матрица B совпадает со своей жордановой формой, а тогда вычисляя определитель матрицы $zE-A-e^{-zh}B$, получаем, что коэффициент характеристического квазиполинома при e^{-3zh} равен $\mathrm{tr}(AB^3)$.

Пусть теперь z — произвольное комплексное число. Тогда

$$\begin{aligned}\chi_A(z)\chi_{S(z)}(\chi_A(z)e^{zh}) &= |zE-A||\chi_A(z)e^{zh}E-S(z)| =\\ &= |\chi_A(z)e^{zh}(zE-A)-(zE-A)S(z)| =\\ &= \chi_A(z)^n e^{nzh}|zE-A-e^{-zh}B|\,.\end{aligned}$$

Ввиду указанной связи между квазиполиномом $\chi_{S(z)}(\chi_A(z)e^{zh})$ и характеристическим квазиполиномом коэффициент при первой степени многочлена $\chi_{S(z)}$ равен нулю.

Тогда, применяя теорему Гамильтона-Кэли для матрицы $S(\lambda)$ и пользуясь свойством присоединенной матрицы пары (A, B), не являющейся точечно полной (см. [4], теорема 1), заключаем, что $S(\lambda)^4 = 0$. Теперь соотношение между рассматриваемыми квазиполиномами показывает, что $\chi_A(z) = |zE - A - e^{-zh}B|$. В частности, у характеристического квазиполинома имеется только четыре корня. Следствие доказано.

Определение. Пусть $\{a, a+\omega i, a-\omega i\}$ — это спектр матрицы $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, пара (A, B), $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, не точечно полна, $c = \frac{\mathrm{tr}\,(A^2BAB^2)}{(\mathrm{tr}\,(A^2B^2))^2}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Последовательность вещественных точек α_k, занумерованных нечетными натуральными числами, назовем β-особой последовательностью пары (A, B), если

$$\alpha_k = a - \frac{|\beta|}{k\pi}\left(2\,\ln\left|\sec\frac{\omega\pi k}{2\beta}\right| + \ln\frac{\omega^2 c}{2}\right).$$

Следствие 3.2. *Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, пара (A, B) матриц третьего порядка не точечно полна, спектр матрицы A лежит на прямой, параллельной мнимой оси, и либо $\beta = 0$, либо α не принадлежит β-особой последовательности пары (A, B). Тогда пара $(\hat{A}, \hat{B})$ точечно полна, где*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11}-\alpha & \beta & a_{21} & 0 & a_{31} & 0 \\ -\beta & a_{11}-\alpha & 0 & a_{21} & 0 & a_{31} \\ a_{12} & 0 & a_{22}-\alpha & \beta & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{12} & -\beta & a_{22}-\alpha & 0 & a_{32} \\ a_{13} & 0 & a_{23} & 0 & a_{33}-\alpha & \beta \\ 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & -\beta & a_{33}-\alpha \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{21} & 0 & b_{31} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{21} & 0 & b_{31} \\ b_{12} & 0 & b_{22} & 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & b_{22} & 0 & b_{32} \\ b_{13} & 0 & b_{23} & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & b_{13} & 0 & b_{23} & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Предположим, что уравнение $\dot{y}(t) = \hat{A}y(t) + \hat{B}y(t-h)$ является точечно вырожденным. Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $C = A^* + \lambda_0 E$, $D = B^*$, $S(\lambda)$ — присоединенная матрица пары (C, D). Тогда тождество, выведенное при доказательстве следствия 3.1, принимает вид:

$$\chi_C(z)\chi_{S(z)}(\chi_C(z)e^{zh}) = (\chi_C(z))^3 e^{3zh}|zE - C - e^{zh}D|.$$

Поскольку $|zE - C - e^{zh}D| = |(z-\lambda_0)E - A - e^{zh}B|$ и пара (A, B) не точечно полна, то функция $|\lambda E - A - \mu B|$ не зависит от μ (см. [12], теорема 5.1), и поэтому $|zE-C-e^{zh}D| = \chi_C(z)$. Тогда из указанного тождества следует, что $\chi_{S(z)} = x^3$ для любого комплексного числа z, и, значит,матрица $S(z)$ нильпотентна. Присоединенная матрица $\hat{S}(z)$ пары $(\hat{A}, \hat{B})$ может быть построена следующим образом: $\hat{S}(z) = \hat{R}(z)\hat{B}$, где $\hat{R}(\lambda)$ — присоединенная λ-матрица к матрице $\hat{A}$.

Покажем, что $\hat{S}^3(r) = 0$ для любого вещественного числа r. Ввиду конечности корней уравнения $|\lambda E - \hat{A}| = 0$ достаточно доказать нильпотентность матрицы $\hat{S}(r)$ в предположении $|rE-\hat{A}| \neq 0$. Тогда $\hat{R}(r) = |rE-\hat{A}|(rE-\hat{A})^{-1}$ и достаточно проверить, что $((rE - \hat{A})^{-1}\hat{B})^3 = 0$.

Хорошо известно, что множество $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ является полем, изоморфным полю комплексных чисел. Изоморфизм, который обычно называют раздутием, задается правилом $a + \mathbf{i}b \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Раздутие индуцирует изоморфизм $\mathrm{M}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_3(F)$, применяя который к соотношению $(\chi_C(r)^{-1}S(r))^3 = 0$ получаем требуемое, поскольку линейная зависимость столбцов матрицы $rE - C$ приведет к линейной зависимости столбцов ее образа после раздутия.

Теперь по теореме 1 из [4] исследуемое уравнение является точечно вырожденным в момент $t = 2h$ в направлении $\hat{q}$. По лемме 1.1 найдется такой $v_{\hat{q}} \in \mathbb{R}^{12}$, что $v^*_{\hat{q}}(e^{h\hat{A}_2} - \hat{J}_2) = 0$, $v^*_{\hat{q}} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} = \hat{q}^*$ и циклический $\hat{A}_2$-модуль, порожденный вектором $v^*_{\hat{q}}$, лежит в ядре линейного отображения, которое состоит в умножении строки на матрицу $\hat{B}_2$. Здесь ту матрицу, которую мы в разделе 1 обозначали J_2, мы обозначали через $\hat{J}_2$.

На строку $\hat{q}^*$ будем смотреть как на строку из строк длины 2. Каждую строку длины 2 каноническим образом отобразим в поле $\mathbb{C}$ и применим раздутие. Тогда из строки $\hat{q}^*$ получится матрица, состоящая из двух строк, первая из которых совпадает с $\hat{q}^*$, а вторую мы обозначим через $\bar{q}^*$. Кроме того, матрица $(\hat{q}, \bar{q})$ есть результат раздутия некоторого вектора из $\mathbb{C}^3$, который мы обозначим через q. Аналогичным образом определяются столбцы $\bar{v}_{\hat{q}}$, v_q. Тогда блочная структура матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ гарантирует, что $\bar{v}^*_{\hat{q}}(e^{h\hat{A}_2} - \hat{J}_2) = 0$,

$\bar{v}^*_{\hat{q}} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} = \bar{q}^*$ и циклический $\hat{A}_2$-модуль, порожденный вектором $\bar{v}^*_{\hat{q}}$, лежит в ядре умножения строки на матрицу $\hat{B}_2$. Применяя изоморфизм, обратный раздутию, можно сделать следующее заключение: найдется такой вектор $v_q \in \mathbb{C}^6$, что $v^*_q(e^{hC_2} - J_2) = 0,\ \ v^*_q\tilde{E}_2 = q^*$ и циклический C_2-модуль размерности m, порожденный вектором v^*_q, лежит в ядре умножения строки на матрицу D_2. Пусть P — матрица, составленная из строк $v^*_q,\ \ v^*_qC_2, \ldots, v^*_qC_2^{m-1}$. Поскольку $v^*_qC_2^m$ есть линейная комбинация этих строк, то найдется матрица $V \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ такая, что $PC_2 = VP$. Рассмотрим m-вектор v: $v^* = (1, 0, \ldots, 0)$. Поскольку $v^*_q = v^*P$, то условия на вектор v_q принимают следующий вид: $v^*e^{hV}P_1 = 0,\ \ v^*e^{hV}P_2 = v^*P_1,\ \ v^*P_2 = q^*$.

Покажем, что пара (C, D) полностью управляема. В самом деле, рассмотрим систему линейных уравнений $w^*C^iD = 0,\ \ i = 0, 1, 2$. Так как $w^*D = 0$, $\operatorname{rang} D = 2,\ \ P_2C = VP_2$, то $w^* = \rho q^*e^{hC}$ для некоторого $\rho \in \mathbb{C}$. Из теоремы Гамильтона-Кэли получаем, что $w^*e^{-hC}C^iD = 0$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Значит, $\rho q^*C^iD = 0$. Пусть $\rho \neq 0$. Теперь индукцией по i, используя соотношения (3.7)–(3.12), легко доказывается утверждение: $v^*V^iP_1 = q^*e^{hC}C^i$. Подходящая линейная комбинация последних соотношений дает $v^*e^{hV}P_1 = q^*e^{2hC}$. Поскольку $v^*e^{hV}P_1 = 0$, то отсюда выводим, что $q = 0$, что противоречит определению вектора q.

Итак, $\rho = 0,\ \ w = 0$, и полная управляемость пары (C, D) установлена. Теперь покажем, что система линейных уравнений $w^*P_2 = 0$ имеет единственное решение. В самом деле, из $w^*P_2 = 0$ и (3.9) следует, что $w^*V^iP_2 = 0$, $i = 0, 1, \ldots$. Тогда из (3.8) индукцией по i легко доказывается утверждение: $w^*P_1C^i = w^*V^iP_1$. Так как $P_1D = 0$, то $(w^*P_1)C^iD = 0$. Так как пара (C, D) полностью управляема, то $w^*P_1 = 0,\ \ w^*P = 0$. По построению строки матрицы P линейно независимы, поэтому $w = 0$.

Теперь покажем, что векторы $v^*,\ \ v^*e^{Vh},\ \ v^*e^{Vh}V$ линейно независимы. В самом деле, поскольку $P_1D = 0,\ \ v^*e^{Vh}P_2D = 0$, то $P_1 = pv^*e^{Vh}P_2$, где $v^*p = 1,\ \ v^*e^{Vh}p = 0,\ \ v^*e^{Vh}Vp = 0$.

Пусть $\alpha v^* + \beta v^*e^{Vh} + \gamma v^*e^{Vh}V = 0,\ \ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$. Умножение обеих частей этого равенства на p дает $\alpha = 0$. Можно считать, что $\gamma \neq 0$. Тогда v^* — собственный вектор матрицы V, что не совместимо с соотношениями $v^*p = 1$, $v^*e^{hV}p = 0$.

Итак, в пространстве $\mathbb{C}^m$ нашлись три линейно независимых вектора, поэтому $m \geq 3$. Тогда единственность решения однородной системы линейных уравнений с матрицей P_2 означает, что $m = 3$ и P_2 — невырожденная матрица.

Теперь полагаем $Z = P_2^{-1} P_1$. Ввиду $ZD = 0$ снова заключаем, что $Z = rq^* e^{hC}$, где $q^* r = 1$, $q^* e^{hC} r = 0$, $q^* e^{hC} C r = 0$. Поскольку пара матриц (A, B) не является точечно полной, то для нее выполнены условия а)—в) теоремы 3.3. Легко видеть, что тогда для пары (C, D) выполнены условия а), б) этой теоремы. Покажем, что условие в) той же теоремы для пары (C, D) тоже выполнено.

Можно считать, что D — жорданова клетка и верхняя нильтреугольная матрица. Выполнение условий а), б) для пары (C, D) дает $-c_{21}^2 = \operatorname{tr}(C^2 D^2) \neq 0$ и $CD^2 - D^2 C = c_{21} D$. Теперь справедливость условия в) для пары (C, D) устанавливается так же как в доказательстве теоремы 3.3. Итак, старший коэффициент c_0 экспоненты e^{-hC} равен $(\operatorname{tr}(C^2 DCD^2))(\operatorname{tr}(C^2 D^2))^{-2}$. Покажем, что $\operatorname{tr}(D^2 CDC^2) = \operatorname{tr}(B^2 ABA^2)$. Для этого достаточно проверить, что $\operatorname{tr}(ABAB^2) = 0$. Поскольку для пары (A, B) выполнены условия а)—в) теоремы 3.3, то найдется такая нильпотентная матрица Z_0, что $B = AZ_0 - Z_0 A$, $Z_0 A Z_0 = 0$. Теперь то же рассуждение, которое мы применили при установлении точечной вырожденности уравнения в теореме 3.3, матрицы которого удовлетворяют условиям а)—в), показывает, что $B^2 = \gamma Z_0$. Поэтому $\operatorname{tr}(ABAB^2) = \gamma \operatorname{tr}(A(AZ_0 - Z_0 A)AZ_0) = -\gamma \operatorname{tr}(AZ_0 A^2 Z_0) = -\gamma \operatorname{tr}(Z_0 A Z_0 A^2) = 0$

Итак, по теореме 3.3 $c_0 = -(\operatorname{tr}(A^2 BAB^2))(\operatorname{tr}(A^2 B^2))^{-2}$. При $a = 0$ старший коэффициент экспоненты e^{-hA} очевидно равен $(1 - \cos h\omega)\omega^{-2}$, а в общем случае старший коэффициент экспоненты e^{-hC} равен

$$2e^{-(a+\alpha)h} \left(\sin^2 \frac{h\omega}{2}\right) \omega^{-2} e^{-\mathbf{i}\beta h}.$$

Поскольку, с другой стороны, последнее число является отрицательным, то $h\beta = (2l+1)\pi$, где $l \in \mathbb{Z}$, и $2\omega^{-2} e^{-(a+\alpha)h} \sin^2 \frac{h\omega}{2} = c$, где $c = -c_0$. Поскольку $h > 0$, то последнии два соотношения означают, что α — элемент β-особой последовательности пары (A, B). Полученное противоречие с условием завершает доказательство следствия.

Замечание. В п. 5 статьи [11] сообщается без доказательства полное описание точечно вырожденных систем четвертого порядка, для которых обе пары (A, B) и (B, A) полностью управляемы. Из него следует конечность спектра точечно вырожденной системы четвертого порядка. Однако, мы сейчас приведем пример, который покажет, что приведенное в статье [11] описание указанных систем не является полным.

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 6 & 9 & 6 & \frac{5}{2} \\ -6 & -12 & -9 & -4 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что система (1.1) с такими матрицами A и B при $h = 1$ является точечно вырожденной в направлении $q = (1, 0, 0, 0)^*$ в момент $t = 2$.

Для этого полагаем $r^* = (1, -3, 6, -6)$ и непосредственно проверяем, что $q^*r = 1$, $q^*e^Ar = 0$, $q^*e^AAr = 0$, $q^*e^AA^2r = 0$, $B = AZ - ZA$, где $Z = rq^*e^A$. Следовательно, по лемме 3.1 пара (A, r) полностью управляема. Применяя теорему 3.4, убеждаемся, что система (1.1) с матрицами A и B из примера 2 обладает требуемым свойством.

Теперь уместно отметить, что в статье [14] теорема 2 сформулирована некорректно. Для системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1)$ заключение этой теоремы неверно, если первый момент времени t_1 встречи с любым множеством Ω импульсного воздействия, не содержащим точек координатной гиперплоскости $x_1 = 0$, больше 2.

Отметим, наконец, что система (1.1) с $h = 1$ и с матрицами A и B из рассмотренного примера не укладывается в рамки описания точечно вырожденных систем четвертого порядка, у которых обе пары (A, B) и (B, A) полностью управляемы, приведенного в п. 5 статьи [11]. Поскольку пары (A, B) и (B, A) полностью управляемы и $B^2 = 0$, то каноническая форма этой системы не подпадает ни под случай а), ни под случай б), которые там указаны.

4. Пространство вырождения дифференциально-разностного уравнения

Теорема 4.1. *Пространство вырождения системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h)$ порядка n имеет размерность, не превосходящую $n-2$.*

Доказательство. Можно считать, что указанная система точечно вырождена. Тогда в ней можно выделить точечно вырожденную подсистему с конечным спектром (см. [12], теорема 5.1). То есть можно считать, что $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$. Следуя [10], свяжем с этим уравнением сильно непрерывную полугруппу ограниченных линейных преобразований и рассмотрим инфинитезимальный производящий оператор $\mathcal{A}$ этой полугруппы. Пусть V_λ — это корневое подпространство этого оператора, отвечающее собственному значению $\lambda \in \Lambda$, где Λ — спектр этого оператора. На основании теоремы 2.4 из [10] достаточно доказать, что $\dim \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda(0) \geq 2$.

Пусть сначала $m > 1$, где m — порядок матрицы A_1. Поскольку любое корневое подпространство инфинитезимального производящего оператора сильно непрерывной полугруппы, связанной с уравнением $\dot{y}(t) = A_1 y(t) + B_1 y(t-h)$, стандартным образом продолжается до подпространства подходящего пространства V_λ так, что значение его размерности в нуле равно размерности в нуле указанного продолжения, то можно считать, что $A = A_1$, $B = B_1$. В этом случае, исходная система — точечно полное уравнение порядка m. Поэтому $\dim \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda(0) = m \geq 2$.

Пусть теперь порядок матриц A_2 и B_2 равен $n-1$. Можно считать, что эти матрицы не имеют общего собственного вектора. Если $\dim \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda(0) \geq 2$, то утверждение очевидно. Покажем, что случай $\dim \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda(0) < 2$ невозможен.

В самом деле, с одной стороны, по условию найдется $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_0\theta} \in V_{\lambda_0}$. С другой стороны, естественно предположить, что $|\Lambda| \geq 2$. Тогда найдется такое $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda \neq a_{11} - \frac{1}{h}$. Кроме того, непосредственно проверяется, что для любого корневого вектора $\theta e^{\lambda\theta} u + e^{\lambda\theta} v$ высоты 2 оператора $\mathcal{A}$ при условии $\dim V_\lambda(0) = 1$ имеем $e_i^* u = e_i^* v = 0$, $i = 2, \ldots, n$, что приводит к несовместной системе транцендентных уравнений: $\lambda - a_{11} - e^{-\lambda h} b_{11} = 0$, $1 + h b_{11}\, e^{-\lambda h} = 0$.

Итак, при $\lambda \in \Lambda \setminus \{a_{11} - \frac{1}{h}\}$ любой отвечающий λ корневой вектор оператора $\mathcal{A}$ является собственным. Теперь покажем, что каждому собственному значению оператора $\mathcal{A}$ отвечает единственный собственный вектор.

Пусть, напротив, нашлись два линейно независимых решения u_1, u_2 системы $(\mu E - A - e^{-\mu h} B)x = 0$. Очевидно функции $\varphi_i = u_i e^{\mu\theta}$, $i = 1, 2,$ — это элементы из V_μ. Тогда $u_1, u_2 \in V_\mu(0)$ (см. [10], лемма 2.1), что противоречит предположению $\dim V_\mu(0) \leq 1$.

Поскольку $\dim V_\lambda$ — алгебраическая кратность собственного значения λ как корня характеристического квазиполинома $|\lambda E - A - e^{-\lambda h} B|$ (см. [13], лемма 7.3.5), то кратным его корнем может быть только $\lambda = a_{11} - \frac{1}{h}$. В частности, $\lambda - a_{11} - e^{-\lambda h} b_{11} \neq 0$ для любого корня $\lambda \neq a_{11} - \frac{1}{h}$ характеристического квазиполинома $|\lambda E - A_2 - e^{-\lambda h} B_2|$. Поэтому любое ненулевое решение системы $(\lambda E - A_2 - e^{\lambda h} B_2)u_2 = 0$ определяет элемент $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{\lambda\theta} \in V_\lambda$ при подходящем $u_1 \in \mathbb{C}$. Поскольку векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ линейно независимы, то мы приходим к противоречию с условием $\dim(V_{\lambda_0}(0) + V_\lambda(0)) \le 1$.

Наконец, случай $|\Lambda| = 1$ накладывает очень жесткое ограничение на характеристический квазиполином, поскольку характеристический квазиполином, имеющий единственный корень, является многочленом. В частности, $\Lambda = \{a_{11}\}$. Поскольку любой отвечающий a_{11} корневой вектор оператора $\mathcal{A}$ является собственным и единственным, то степень многочлена $|\lambda E - A - e^{-\lambda h} B|$ равна единице, что невозможно.

Итак, можно считать, что исходная система — это точечно вырожденное уравнение с конечным спектром и матрицы A и B не имеют общего собственного вектора. Пусть, сначала, найдутся такие $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \Lambda$, что $\lambda_1 \ne \lambda_2$. Покажем, что система $(\lambda_i E - A - e^{-\lambda_i h} B)x = 0,\ i = 1, 2$, имеет только нулевое решение.

В самом деле, в противном случае нашелся бы ненулевой вектор $u \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$e^{\lambda_1 h}(\lambda_1 E - A)u = e^{\lambda_2 h}(\lambda_2 E - A)u\,.$$

Тогда $Au = \mu u$, где $\mu = (\lambda_1 e^{\lambda_1 h} - \lambda_2 e^{\lambda_2 h})(e^{\lambda_1 h} - e^{\lambda_2 h})^{-1}$. В частности, u — общий собственный вектор матриц A и B.

Полученное противоречие показывает, что векторы u_1 и u_2 линейно независимы, где

$$(\lambda_i E - A - e^{-\lambda_i h} B)u_i = 0, \quad u_i \ne 0, \quad i = 1, 2\,.$$

Очевидно функция $\varphi_i = u_i e^{\lambda_i \theta}$ — это элемент из V_{λ_i}, $\ i = 1, 2$. Тогда $\dim\left(V_{\lambda_1}(0) + V_{\lambda_2}(0)\right) \ge 2$.

Итак, можно считать, что $\Lambda = \{\lambda_0\}$. Хорошо известно, что пространство вырождения исходной системы содержится в линейной оболочке столбцов матрицы $\lambda_0 E - A^* - e^{-\lambda_0 h} B^*$ (см. [10], лемма 2.2). Поэтому, если $\mathrm{rang}\,(\lambda_0 E - A - e^{-\lambda_0 h} B) < n - 1$, то утверждение очевидно.

Итак, можно считать, что $\mathrm{rang}\,(\lambda_0 E - A - e^{-\lambda_0 h} B) = n - 1$. Хорошо известно, что

$$\dim\,\mathrm{Ker}((\mathcal{A} - \lambda_0\,\mathrm{id})^n) = n$$

(см. [13], лемма 7.3.5). Пусть U — подпространство корневых векторов высоты ≤ 2 сужения $\mathcal{A}_0$ оператора $\mathcal{A}$ на это n-мерное подпространство. Поскольку оператор $\mathcal{A}_0$ имеет единственный собственный вектор, то из теоремы Жордана следует, что $\dim \operatorname{Ker}((\mathcal{A}_0 - \lambda_0 \operatorname{id})^i) = i, \quad i = 1, \ldots, n$. В частности, $\dim U = 2$.

Хорошо известно, что функция $\varphi_{u_1,u_2} = u_1 e^{\lambda_0 \theta} + u_2 e^{\lambda_0 \theta}\theta$ принадлежит U тогда и только тогда, когда $(\lambda_0 E - A - e^{-\lambda_0 h} B)u_1 + (E + he^{-\lambda_0 h} B)u_2 = 0$ и $(\lambda_0 E - A - e^{-\lambda_0 h} B)u_2 = 0$. Так как $\operatorname{rang}(\lambda_0 E - A - e^{-\lambda_0 h} B) = n - 1$, то функции вида $\varphi_{u_1,0}$ линейно зависимы. Поскольку $\dim U = 2$, то $\varphi_{u_1,u_2} \in U$ для некоторого $u_2 \neq 0$. Предположим, что u_1, u_2 линейно зависимы. Тогда $(E + e^{-\lambda_0 h} B)u_2 = 0$ и u_2 — общий собственный вектор матриц A и B. Полученное противоречие показывает, что в пространстве $V_{\lambda_0}(0)$ нашлось двумерное подпространство — линейная оболочка векторов u_1, u_2 (см. [10], лемма 2.1). Теорема полностью доказана.

Пусть

$$\mathbb{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{D})$. Тогда пара (A, B) точечно полна.*

Доказательство. Пусть, напротив, система $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h)$ точечно вырождена. Хорошо известно, что это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} C_1 & * \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} y(t-h)\,,$$

где подсистема $\dot{z}(t) = C_2 z(t) + D_2 z(t-h)$ точечно вырождена и ее характеристический квазиполином совпадает с характеристическим многочленом матрицы C_2 (см. [12], теорема 5.1). Поскольку $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{D})$, то можно рассмотреть линейное преобразование φ векторного пространства $\mathbb{D}^2$ (над телом $\mathbb{D}$), состоящее в умножении столбца на эту матрицы. Поскольку исходная система точечно вырождена, то линейное преобразование φ имеет ненулевое ядро и, поэтому, ранг матрицы B равен четырем. Так как ранг матрицы D_2 положителен, то ранг матрицы D_1 меньше четырех.

Рассмотрим характеристический квазиполином системы $\dot{z}(t) = C_1 z(t) + D_1 z(t-h)$ как многочлен от μ, где $\mu = e^{-\lambda h}$. Матрица D_1 – это матрица некоторого линейного преобразования ψ вещественного векторного пространства в подходящем базисе. Заменяя в выражении для этого квазиполинома матрицу D_1 на каноническую форму матрицы линейного преобразования ψ в паре базисов, видим, что степень рассматриваемого полинома по μ меньше четырех.

Итак, степень характеристического квазиполинома по μ исходного уравнения меньше четырех. С другой стороны, линейное преобразование φ имеет ненулевое ядро. Поэтому можно считать, что $B - 2 \times 2$ – матрица над $\mathbb{D}$, у которой левый столбец нулевой. Тогда вычисляя четвертую производную по μ характеристического квазиполинома исходного уравнения по правилу дифференцирования определителя, получим, что определитель определенной 2×2 матрицы M над $\mathbb{D}[\lambda]$ равен нулю. Тогда нижний диагональный блок матрицы M равен нулю. Вычисление определителя матрицы M по теореме Лапласа показывает, что вся нижняя строка матрицы M нулевая.

Поэтому найдется матрица $T \in \mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ такая, что

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{D}), \quad T^{-1}BT = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{D})\,.$$

Так как $B_i \in \mathbb{D}$, то пара (A_i, B_i) точечно полна, $i = 1, 2$. Тогда пара (A, B) точечно полна по теореме 2.2. Полученное противоречие с точечной вырожденностью исходной системы завершает доказательство теоремы.

Литература

1. Weiss L. On the controllability of delay differential system // SIAM J. Control, 1967. V. 5. № 4. P. 575–587.

2. Brooks R.M., Schmitt K. Pointwise completeness of differential-difference equations // Rocky Mountain J. Math. 1973. V. 3. № 3. P. 11–14.

3. Зверкин А.М. Точечная полнота дифференциальных систем с запаздыванием // Тр. конф. Ун-та Дружбы народов. 1971.

4. Popov V.M. Pointwise degeneracy of linear, time-invariant, delay-differential equations // J. Differential Eqns. 1972. V. 11. № 3. P. 541–561.

5. Zmood R.B., McClamroch N.H. On the pointwise completeness of differential-difference equations // J. Differential Eqns. 1972. V. 12. № 3. P. 474–486.

6. Зверкин А.М. О точечной полноте систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 3. С. 430–436.

7. Kappel F. On degeneracy of functional-differential equations // J. Differential Eqns. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.

8. Asner B.A., Halanay A. Algebraic theory of pointwise degenerate of delay-differential systems // J. Differential Eqns. 1973. V. 14. № 2. P. 293–306.

9. Карпук В.В. К проблеме точечной вырожденности // Проблемы оптимального управления. Минск: Наука и техника. 1981. С. 208–224.

10. Метельский А.В. Проблемы точечной полноты в теории управления дифференциально-разностными системами // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, вып. 2(296). С. 103–140.

11. Минюк С.А., Ломакина Л.В. О точечно вырожденных системах с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 11. С. 1507–1515.

12. Kappel F. Degenerate difference-differential equations. Algebraic theory // J. Differential Eqns. 1977. V. 24. № 1. P. 99–126.

13. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

14. Елгондыев К.К. Дифференциальные уравнения с запаздыванием и с импульсным воздействием // Докл. АН РУз. 2005. № 1. С. 11–14.

15. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.