ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2006
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Оптимальное управление

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

С.М. Хрящев

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Высшей математики

Аннотация.

Рассматриваются динамические системы управления, порожденные конечномерными гиперболическими отображениями. Для описания свойств систем этого класса используются понятия теории динамических систем, теории управления и теории случайных процессов. Существование плотных траекторий в пространстве состояний для систем рассматриваемого класса и локальная управляемость вдоль этих траекторий позволяют гарантировать полную управляемость таких систем. В работе предлагается метод оценивания времени управления динамическими системами, основанный на анализе свойств последовательности множеств достижимости и их объемов. Использование статистических методов позволяет получить более точные оценки времени управления, чем ранее полученные оценки для аналогичных систем.

1 Введение

Данная работа продолжает исследования, опубликованные в работах [3, 4, 5], где, в частности, рассматривались системы управления, порожденные конечномерными гиперболическими отображениям. Существование плотных в пространстве состояний траекторий для систем рассмотренных классов и локальная управляемость вдоль этих траекторий позволяют гарантировать полную управляемость таких систем. В связи с этим возникает задача оценивания времени управления. В предыдущих работах автора было показано, что время управления системой зависит от скорости роста объемов итерированных множеств достижимости системы управления. В свою очередь известно [1, 2], что скорость роста объемов итерированных множеств динамической системы определяется ее стохастическими свойствами. В работе [3] были получены асимптотические (при сколь угодно малых значениях управляющих воздействий) оценки времени, выраженные через равномерные по состояниям характеристики системы. В настоящей работе получены оценки времени управления того же типа, выраженные через средние по состояниям характеристики системы. В связи с этим для исследования систем используются статистические методы, в частности, предельные теоремы теории вероятностей (эргодическая теорема, центральная предельная теорема). В качестве вероятностных мер использовались подходящие инвариантные меры динамических систем. Применение статистических методов позволяет, во-первых, получить более точные оценки для тех же классов систем, во-вторых, они могут быть применены для более широких классов систем.

Статья организована следующим образом. В разделах 2, 3, 4 даются определения основных понятий. В разделе 5 получена оценка времени управления, зависящая от некоторой совокупности свободных параметров, зависящих от скоростей оценивания параметров системы. В разделе 6 показана, как при определенных предположениях о скоростях оценивания упомянутые параметры можно выбрать некоторым оптимальным способом. В разделе 7 показано, что статистические свойства системы действительно обеспечивают сделанные предположения о скоростях оценивания параметров системы. В разделе 8 получена окончательная оценка времени управления. В заключение 9 сделаны основные выводы.

Используемые в статье сведения по теории динамических систем, в основном, взяты из книг [6] и [7], а по теории случайных процессов — из книг [8, 9, 10, 11].

2 Определение динамической системы управления

Рассмотрим локальное семейство гладких обратимых отображений (диффеоморфизмов)

$$f(.,u) : X \to X, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{2.1}$$

зависящих от параметра u, где X — связное компактное гладкое риманово многообразие размерности d. Локальность семейства (2.1) означает, что множество U — некоторая окрестность точки $u^0 \in \mathbb{R}^m$. Далее мы считаем для простоты, что $m = 1$. Метрика риманова многообразия порождает меры объемов всех порядков $k = 1, \ldots, d$, в частности, меру объема Vol в пространство состояний (ПС) и функцию расстояния dist в ПС.

Пусть задано некоторое отображение $\mathbb{Z}^1_+ \to U$ с помощью соответствия $t \to u_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, которое задает последовательность управлений $\{u_t\}$. Это отображение и семейство отображений (2.1) определяют динамическую систему управления (ДСУ) следующего вида

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad t = 0, 1, 2. \ldots. \tag{2.2}$$

Отображение $f_0(.) = f(., u^0)$ при значении параметра $u = u^0$ мы будем называть основным. Оно определяет динамическую систему (ДС)

$$x^0_{t+1} = f_0(x^0_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.3}$$

При фиксированном значении параметра $u = u^0$ можно ввести новый (локальный) управляющий параметр $\Delta u = u - u^0$, новые (локальные вблизи состояний x_t) координаты $\Delta x_t = x_t - x^0_t$. Тогда с учетом формул (2.2) и (2.3) имеем уравнение в отклонениях

$$\Delta x_{t+1} = \Delta f(x^0_t, u^0, \Delta x_t, \Delta u_t), \quad t = 0, 1, 2. \ldots, \tag{2.4}$$

где

$$\Delta f(x^0, u^0, \Delta x, \Delta u) = f(x^0 + \Delta x, u^0 + \Delta u) - f(x^0, u^0). \tag{2.5}$$

Локальные управления Δu_t для системы управления (2.4) принадлежат множеству

$$\Delta U = \{\Delta u \,\big|\, \Delta u = u - u^0, \;\; u, u^0 \in U, \; |\Delta u| \le \overline{u}\},$$

где $\overline{u}$ — уровень локальных управлений. Если множества X и U не имеют линейной структуры, то вместо уравнения в отклонениях (2.4) можно рассматривать уравнение с состояниями и управлениями, принимающими значения в касательных пространствах:

$$\Delta x_{t+1} = A(x_t^0, u_t^0)\Delta x_t + B(x_t^0, u_t^0)\Delta u_t, \quad t = 0, 1, 2. \dots, \tag{2.6}$$

где $\Delta x_t \in T_{x_t^0}$, $\Delta u_t \in T_{u^0}$,

$$A(x^0, u^0) = \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta x}|_{\Delta x=0, \Delta u=0}, \quad B(x^0, u^0) = \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta u}|_{\Delta x=0, \Delta u=0}. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) будем называть линейным расширением для уравнения (2.3). Совокупная система (2.3, (2.6) имеет пространством состояний касательное расслоение TX, управляющие воздействия принимают значения в касательном расслоении TU.

Без ограничения общности будем считать, что $u^0 = 0$, и множество ΔU будем отождествлять с множеством U. Совместные свойства ДС (2.3) и локальной ДСУ (2.4) (или (2.6)) определяют свойства ДСУ (2.2). Ниже мы опишем эти свойства.

3 Свойства динамических систем (2.3), порожденных основными отображениями

Гладкие отображения могут обладать следующими свойствами: в одних направлениях пространства состояний они являются растягивающими (увеличивают объемы соответствующих множеств ПС), в других нейтральными (сохраняют объемы соответствующих множеств ПС)), в третьих — сжимающими (уменьшают объемы соответствующих множеств ПС). Кроме того, эти свойства могут проявляться в разных точках пространства состояний по разному, т.е. могут не являться однородными по ПС. Характер проявления свойства растяжения или сжатия влияет на свойство возвращаемости траекторий ДС.

3.1 Системы, задаваемые гиперболическими отображениями

Мы в этом разделе будем рассматривать так называемые гиперболические отображения, для которых свойства растяжения и сжатия вдоль определенных направлений проявляются (равномерно или в среднем) во всем пространстве состояний. Опишем эти отображения подробнее.

Пусть отображение $f_0 : X \to X$, задающее ДС (2.3), является гладким и обратимым, т.е. диффеоморфизмом. В каждой точке $x \in X$ дифференциал

$Df_0(x)$ задает линейное отображение $Df_0(x) : T_xX \to T_{f_0(x)}X$, где T_xX — касательное пространство в точке x к многообразию X, $T_{f_0(x)}X$ — касательное пространство в точке $f_0(x)$ к многообразию X. В некоторой системе координат дифференциал $Df_0(x)$ задается матрицей, которую мы также будем обозначать $Df_0(x)$.

Мы рассмотрим некоторый класс множеств $\Lambda \subset X$, известный как класс гиперболических множеств (см. [6], с. 268), на которых отображение f_0 обладает свойствами растяжения и сжатия. Рассмотрим случай, когда $\Lambda = X$. В этом случае отображение f_0 называется диффеоморфизмом Аносова. Более точно, это отображение удовлетворяет следующему определению.

Определение 1 *Для любого $x \in X$ имеется разложение касательного пространства T_xX в прямую сумму, т.е.*

$$T_xX = E^+(x) \oplus E^-(x), \tag{3.1}$$

где подпространства $E^+(x), E^-(x)$ изоморфны соответственно подпространствам $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ и $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-k}$ и число k не зависит от x. При этом для разложения (3.1) выполнены следующие условия.

1. Условия инвариантности

$$[Df_0(x)]E^+(x) = E^+(f_0(x)), \quad [Df_0(x)]E^-(x) = E^-(f_0(x)), \quad x \in \Lambda. \tag{3.2}$$

2. Существуют такие числа $\lambda^+, \lambda^- > 0$ и постоянная $C > 0$ (зависящая от выбора локальной системы координат), что для для любого $x \in \Lambda$ выполнены следующие неравенства для норм дифференциалов (матриц):

$$|D^- f_0(x)| \le Ce^{-\lambda^-}, \quad |[D^+ f_0(x)]^{-1}| \le Ce^{-\lambda^+}, \tag{3.3}$$

где $D^- f_0(x) = Df_0(x)|_{E^-(x)}$ — сужение дифференциала $Df_0(x)$ на подпространство $E^-(x)$, $D^+ f_0(x) = Df_0(x)|_{E^+(x)}$ — сужение дифференциала $Df_0(x)$ на подпространство $E^+(x)$.

Из неравенств (3.3) следует, что дифференциал $Df_0(x)$, суженный на подпространство $E^+(x)$, действует как растяжение, а суженный на подпространство $E^-(x)$ — как сжатие.

Для отображения f_0 вводятся (глобальные) устойчивые и неустойчивые многообразия в произвольной точке x соответственно по следующим формулам

$$W^s(x) = \{y \in X |\, \mathrm{dist}(f_0^n(x), f_0^n(y)) \to 0, n \to +\infty\},$$
$$W^u(x) = \{y \in X |\, \mathrm{dist}(f_0^n(x), f_0^n(y)) \to 0, n \to -\infty\}.$$

Для многообразий $W^s(x), W^u(x)$ выполнены условия касания

$$T_x W^u(x) = E^+(x), \quad T_x W^s(x) = E^-(x)$$

и условия инвариантности

$$\begin{aligned} f_0(W^s(x)) = W^s(f_0(x)), \quad Df_0(E^+(x)) = E^-(f_0(x)), \\ f_0(W^u(x)) = W^u(f_0(x)), \quad Df_0(E^+(x)) = E^+(f_0(x)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2 Свойства возвращаемости как топологические свойства

Введем некоторые понятия, характеризующие свойства возвращаемости траекторий.

Определение 2 *Множество A называется f_0-инвариантным, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ выполнено $A = f_0^n(A)$.*

Определение 3 *Точка x называется неблуждающей для отображения f_0, если для любого открытого множества $A \ni x$ существует такое число $N = N(A)$, что выполнено условие $f_0^N(A) \cap A \neq \emptyset$.*

Множество всех неблуждающих точек отображения f_0 на инвариантном множестве Λ $(f_0^{-1}(\Lambda) = \Lambda)$ обозначим $NW(f_0)|_\Lambda$. Отметим, что на множестве неблуждающих точек сосредоточены все виды возвратных траекторий. Другими словами, для хаотичности f_0-инвариантного множества Λ требование $\Lambda = NW(f_0|_\Lambda)$ является минимальным. Однако наличия лишь этого свойства, вообще говоря, может быть недостаточно для получения хороших оценок времени управления. Более сильными являются свойства, вводимые следующими определениями.

Определение 4 *Отображение f_0 является топологически транзитивным на множестве X, если для любых двух открытых множеств $A, B \subset X$ существует такое положительное число $N = N(A, B)$, что выполнено условие $f_0^N(A) \cap B \neq \emptyset$.*

Можно показать (см. [6]), что отображение f_0 транзитивно на множестве X тогда и только тогда, когда существует точка $x \in X$, что проходящая через эту точку траектория плотна в множестве X, т.е. замыкание $\overline{\{f_0^n(x)\}_{n=0}^{\infty}} = X$.

Определение 5 *Отображение f_0 называется топологически перемешивающим на множестве X ([6], с. 59.), если для любых двух открытых множеств $A, B \subset X$ существует такое положительное число $N = N(A, B)$, что для любого $n > N$ выполнено условие*

$$f_0^n(A) \cap B \neq \emptyset. \tag{3.5}$$

Отметим, что из свойства перемешивания следует свойство транзитивности, а из свойства транзитивности следует свойство неблуждаемости. Однако, для рассматриваемого ниже класса диффеоморфизмов f_0 Аносова, таких что $NW(f_0) = X$, из наличия свойства неблуждаемости следует свойство топологического перемешивания. Другими словами, для этого класса все три свойства эквивалентны, (см. [6], с. 576).

3.3 Свойства основных отображений (диффеоморфизмов), выраженных в терминах инвариантных мер

Согласно теореме Крылова — Боголюбова (см. [6], с. 145) любое отображение $f_0 : X \to X$, где X — компактное метрическое пространство, обладает некоторым набором $\mathcal{M}_{f_0}$ борелевских инвариантных вероятностных мер. Для меры μ ее f_0-инвариантность означает, что для любого измеримого множества $A \subset X$ выполнено соотношение $\mu(A) = \mu(f_0^{-1}(A))$.

Определение 6 *Сохраняющее меру μ отображение f_0 является метрически перемешивающим (см. [6], с. 161), т.е. для любого натурального n и для любых μ-измеримых множеств $A, B \subset X$*

$$\alpha_n(A, B) = \mu(f_0^{-n}(A) \cap B) - \mu(f_0^{-n}(A))\mu(B) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Из свойства метрического перемешивания следует, что мера μ является также эргодической, т.е. в качестве инвариантных множеств имеет лишь множества меры ноль или единица. Для диффеоморфизмов Аносова верно также обратное. Заметим, что из наличия соответствующих метрических свойств следует наличие их топологических аналогов. Однако, для диффеоморфизмов Аносова верно также обратное (см. [6], с. 152, 622).

3.3.1 Характеризация мер максимальной энтропии

Для отображения f_0 и некоторой меры μ может быть определена метрическая энтропия h_μ, (см. [6], с. 177). Рассмотрим один специальный класс f_0-инвариантных мер.

Определение 7 *Мера μ_0 является мерой максимальной энтропии, если она обладает свойством $\sup_{\mu \in \mathcal{M}} h_\mu = h_{\mu_0}$, где h_μ — метрическая энтропия меры μ.*

Мера максимальной энтропии может быть представлена как предельная мера некоторых последовательностей мер. Из условия $NW(f_0) = X$ следует, что для любой точки $x \in X$ неустойчивые многообразия $W^u(x)$ плотны в X. Это дает возможность определить меру μ_0 в форме Маргулиса (см. [6], с. 643). Мера μ_0 является мерой Маргулиса, если она является слабым пределом последовательности k-мерных мер $\tilde{\mu}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, полученных нормировкой мер k-мерных объемов Vol^+ в неустойчивых многообразиях $W^u(x_n)$. (Описание построения меры Маргулиса дано, например в [6], с. 643 — 651). В наших обозначениях ее можно определить следующим образом. Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in X$ и глобальное неустойчивое многообразие $W^u(x_1)$ размерности k, проходящее через эту точку. На этом многообразии задана мера Vol^+ k-мерного объема, индуцированная римановой метрикой. Рассмотрим произвольное множество $M_1^+ \subset W^u(x_1)$ и его итерации $M_n^+ = f_0^{n-1}(M_1^+) \subset W^u(f_0^{n-1}(x_1))$, $n = 1, 2, \ldots$. На множествах $W^u(f_0^{n-1}(x_1))$ определим последовательность вероятностных мер $\tilde{\mu}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (зависящих, вообще говоря, от точки x_1 и множества $\tilde{M}_1$), значения которых для произвольного Vol^+-измеримого множества $\tilde{M}_n \subset W^u(f_0^{n-1}(x_1))$ определяются по формуле

$$\tilde{\mu}_n(\tilde{M}_n) = \frac{\mathrm{Vol}^+(\tilde{M}_n \cap M_n^+)}{\mathrm{Vol}^+(M_n^+)}. \tag{3.7}$$

Имеется сходимость, [6],

$$\tilde{\mu}_n(\tilde{M}_n) \to \mu_0(M), \tag{3.8}$$

где $M \subset X$ — произвольное борелевское множество, $\tilde{M}_n = M \cap W^u(x_n)$. Значение в левой части формулы (3.8) на самом деле не зависит от x_1 в силу плотности каждого из множеств $W^u(f_0^{n-1}(x_1)), n = 1, 2, \ldots$ в ПС X, [6]. Зависимость от M_1^+ также отсутствует, так как при любом начальном множестве M_1^+ итерации $f_0^n(M_1^+), n = 1, 2, \ldots$ исчерпывают множества $W^u(f_0^n(x_1))$.

3.4 Средний коэффициент растяжения

В этом разделе мы будем предполагать, что основное отображение f_0 является диффеоморфизмом Аносова на многообразии X.

Рассмотрим линейное отображение $D^+f_0 : E^+(x) \to E^+(f_0(x))$, где оператор D^+f_0 определен в формуле (3.3), и логарифм модуля якобиана обратного отображения

$$\varphi_0^+(x) = -\ln|\det D^+f_0(x)|. \tag{3.9}$$

Значения этой функции являются коэффициентами растяжения в точке x в неустойчивом направлении. С физической точки зрения это функция характеризует распределение внутренней энергии, соответствующей основному отображению f_0. По некоторой f_0-инвариантной мере μ определим величину

$$\chi^+(f_0) := -\int\limits_X \varphi_0^+(x)d\mu(x), \tag{3.10}$$

которую назовем коэффициентом растяжения в среднем по мере μ в неустойчивом направлении. Справедливо неравенство Рюэля $\chi^+(f_0) \geq h_\mu(f_0)$, где $h_\mu(f_0)$ — энтропия по мере μ отображения f_0.

4 Свойства локальной ДСУ (2.6)

В этом разделе мы опишем свойства множеств локальной достижимости из некоторой точки x_0 за d шагов.

Определение 8 *Динамическая система управления (2.2) называется локально управляемой из точки x_0 вдоль траектории, порожденной нулевыми локальными управлениями, т.е. вдоль траектории ДС (2.3), если точка $f_0^d(x_0)$ является внутренней в множестве локальной достижимости $F(x_0,\vec{U})$, где $\vec{U} = U^d = U \times \cdots \times U$, $\vec{u} = (u_1,\ldots,u_d) \in \vec{U}$,*

$$F(x,\vec{u}) = f(x,u_1) \circ \cdots \circ f(x,u_d). \tag{4.1}$$

Точку $F_0(x) = f_0^d(x)$ будем называть центром множества $F(x,\vec{U})$.

Определим величину $s(x)$, которая характеризует объем множества локальной достижимости за один такт (d шагов), следующим образом

$$s(x) = \lim_{\overline{u}\to 0} \frac{\mathrm{Vol}(F(x,\vec{U}))}{\overline{u}^d} \tag{4.2}$$

в предположении, что предел существует. Таким образом, для множества достижимости $F(x, \vec{U})$ из точки x его объем $\mathrm{Vol}(F(x, \vec{U}) = s(x)\overline{u}^d + o(\overline{u}^d)$. Следовательно, условие $s(x) > 0$ является достаточным для полной локальной управляемости из точки x за один такт при любом уровне локальных управлений $\overline{u} > 0$.

Во многих случаях для обеспечения полной глобальной управляемости достаточно требовать выполнения частичной локальной управляемости, некоторые виды которой мы введем ниже. Обозначим $M(F_0(x)) = F(x, \vec{U})$. Пусть $M^+(F_0(x))$ — проекция множества $M(F_0(x))$ на неустойчивое многообразие $W^u(F_0(x))$, $M^\perp(F_0(x))$ —проекция множества $M(F_0(x))$ на ортогональное направление. Определим величины $s^+(x)$ и $s^\perp(x)$ соответственно следующими формулами

$$s^+(x) = \lim_{\overline{u}\to 0} \frac{\mathrm{Vol}^+(M^+(F_0(x)))}{\overline{u}^k}, \quad s^\perp(x) = \lim_{\overline{u}\to 0} \frac{\mathrm{Vol}^\perp(M^\perp(F_0(x)))}{\overline{u}^{d-k}}. \tag{4.3}$$

Геометрическое описание множеств локальной достижимости и их проекций из произвольной точки x, т.е. множеств $M(F_0(x))$, $M^+(F_0(x))$, $M^\perp(F_0(x))$, можно дать с помощью аппроксимации их более простыми множествами, а именно эллипсоидами (см. [3]). Обозначим

$$C(x) = \frac{\partial F(x, \vec{u})}{\partial \vec{u}}|_{\vec{u}=0}, \tag{4.4}$$

т.е. $C(x)$ является матрицей Якоби отображения $F(x, \vec{u})$. Матрица $C(x)$ может быть выражена через матрицы $A(x), B(x)$, которые определенны формулами (2.7). Эллипсоид

$$Ell(y) = \{h | h^*[C(x)C^*(x)]^{-1}h \le (\overline{u})^2 \le 1, h \in T_y, y = F_0(x)\}. \tag{4.5}$$

аппроксимирует множество $M(F_0(x))$. Объем эллипсоида $Ell(y) \subset T_y$ равен $v(y) = v(F_0(x)) = s(x)$. Эллипсоиды $Ell^+(y) \subset E^+(y)$, $Ell^\perp(y) \subset E^\perp(y)$, являющиеся проекциями эллипсоида $Ell(y)$, соответственно аппроксимируют множества $M^+(F_0(x))$ и $M^\perp(F_0(x))$, где $y = F_0(x)$. Объемы этих эллипсоидов соответственно следующие

$$v^+(y) = v^+(F_0(x)) = s^+(x), \quad v^\perp(y) = v^\perp(F_0(x)) = s^\perp(x). \tag{4.6}$$

Условие $s^+(x) > 0$ является достаточным для локальной управляемости из точки x на неустойчивое многообразие $W^u(F_0(x))$. Условие $s^\perp(x)$ является достаточным для локальной управляемости из точки x на многообразие, ортогональное неустойчивому многообразию $W^u(F_0(x))$.

Функции $s^+(.), s^\perp(.)$, определенные равенствами (4.3), являются непрерывными на множестве X. Свойства функций $s^+(.)$ и $s^\perp(.)$ определяют степень управляемости ДСУ, но, как мы увидим ниже, они по-разному влияют свойство управляемости системы на множестве X.

Определим множества

$$X_0^+ = \{x | s^+(x) = 0\}, \quad X_0^\perp = \{x | s^\perp(x) = 0\}. \tag{4.7}$$

Очевидно, множества $X_0^+, X_0^\perp$ замкнуты, а множества $X \setminus X_0^+, X \setminus X_0^\perp$ открыты. Следовательно, эти множества измеримы относительно любой борелевской меры.

Замечание 1 *Если функция $f(x, u)$, задающая ДСУ, является аналитической на множестве $X \times U$, то функции $s^+, s^\perp$ также являются аналитической на множестве X. Следовательно, в этом случае множества X^+ и $X_0^\perp$ являются некоторыми многообразиями размерности не более, чем $d-1$.*

Для функций $s^+(.)$ и $s^\perp(.)$, заданных на множестве X, рассмотрим виды достаточных условий локальной управляемости. Определим величины

$$\underline{s}^+ = \min\{s^+(x), x \in X\}, \quad \underline{s}^\perp = \min\{s^\perp(x), x \in X\}. \tag{4.8}$$

Определение 9 *Мы будем говорить, что на множестве X выполнены достаточные условия частичной равномерной локальной управляемости*

1) вдоль неустойчивых направлений, если выполнено соотношение

$$\underline{s}^+ > 0, \tag{4.9}$$

2) вдоль направлений, ортогональных неустойчивым направлениям, если выполнено соотношение

$$\underline{s}^\perp > 0. \tag{4.10}$$

Условия (4.9) и (4.10) означают, что значения функций $s^+(.)$ и $s^\perp(.)$, заданных на множестве X, отделены от нуля.

5 Оценка сверху времени управления

В этом разделе в качестве f_0-инвариантной меры будем рассматривать меру максимальной энтропии μ_0 (см. раздел 3.3.1). Справедлива

Теорема 1 *Пусть выполнены следующие условия.*

1. Отображение $f_0 : X \to X$ является диффеоморфизмом Аносова, причем $NW(f_0) = X$.

2. Система (2.2) является локальной управляемой, причем справедливы следующие условия локальной управляемости:

1) вдоль неустойчивого направления выполнено условие $s^+(x_0) > 0$, где $x_0 \in X$ — некоторая начальная точка, 2) вдоль направлений, ортогональных неустойчивым, выполнено условие $\underline{s}^\perp > 0$ (условие (4.10)), где $\underline{s}^\perp$ — наименьшее значение функции $s^\perp(.)$ на множестве X, которая определена формулой (4.3).

Тогда ДСУ (2.2) управляема из начальной точки x_0. Кроме того, существуют числа $\overline{u}_0 > 0$ и $\delta_1^0 > 0$, что для любых значений уровня управлений $\overline{u} \in (0, \overline{u}_0]$ и для любых значений параметров $\delta_1 \in (0, \delta_1^0]$ имеется следующая оценка сверху времени управления

$$T(x_0) \le n_0(x_0, \underline{c}\overline{u}, \underline{s}^\perp, \delta_1)d + N_1(x_0, \delta_1), \tag{5.1}$$

$$n_0(x_0, \underline{c}\overline{u}, \underline{s}^\perp, \delta_1) = \frac{1}{\chi_0^+(f_0)d - \delta_1} \ln\left(\frac{V}{((\underline{c}\overline{u})^d + o(\overline{u}^d))\underline{s}^\perp s^+(x_0)}\right), \tag{5.2}$$

где натуральное число $N_1(x_0, \delta_1)$определено при доказательстве теоремы 1 формулой (5.8), число $\chi_0^+(f_0)$ определено формулой (3.10) для меры μ_0, $\overline{u}$ — уровень локальных управлений, некоторая постоянная $\underline{c} \in (0, 1]$, $V = \mathrm{Vol}(X)$ — объем многообразия X.

$\bigtriangledown$ *Доказательство теоремы 1.* Для основного отображения f_0 рассмотрим множества локальной достижимости через каждые d шагов, т.е. вдоль траектории $x_n = F_0^n(x_0), n = 1, 2, \ldots,$ где $F_0 = f_0^d$. Эти множества образуются по следующим формулам: $M_1 = F(x_0, \vec{U})$, $M_{n+1} = F(M_n, \vec{U})$, $n = 1, 2, \ldots,$ где функция F определенна формулой (4.1). Точку $x_n = F_0^n(x_0)$ будем называть центром множества M_n. Множества M_n будем аппроксимировать с недостатком множествами более простой структуры для того, чтобы оценить снизу скорость роста объемов $v_n = \mathrm{Vol}(M_n)$ этих множеств.

Для множества M_1 с центром в точке $x_1 = F_0(x_0)$ рассмотрим его проекцию в неустойчивое многообразие $W^u(x_1)$, т.е. рассмотрим множество $M_1^+(x_1) = W^u(x_1) \cap M_1(x_1)$. Обозначим $v_1^+ = \mathrm{Vol}^+(M_1^+)$ — k-мерный объем этой проекции. Проекцию множества M_1^+ в неустойчивое многообразие $W^u(x_1)$ с недостатком аппроксимирует эллипсоид $Ell^+(x_1) \subset E^+(x_1)$, где $E^+(x_1) = T_{x_1}W^u(x_1)$. Поэтому существует число $\overline{u}_0 > 0$, что для $0 < \overline{u} < \overline{u}_0$

справедливо неравенство

$$v_1^+ = \overline{u}^k v^+(x_1) + o(\overline{u}^k) = \overline{u}^k s^+(x_0) + o(\overline{u}^k). \tag{5.3}$$

Далее при помощи отображения $y = F_0^n(z)$ образуем множества $M_{n+1}^+ = F_0^n(M_1^+)$, расположенные соответственно в неустойчивых многообразиях $W^u(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ и имеющие k-мерные объемы $v_n^+ = \mathrm{Vol}^+(M_n^+)$. Введем в каждом из этих неустойчивых многообразиях свои локальные координаты $y \in \mathbb{R}^k$, так что произвольная точка $x \in W^u(x_n)$ представима в виде $x = \tilde{x}_n(y)$, причем $x_n = \tilde{x}_n(0)$. Объемы v_{n+1}^+ итерированных множеств M_{n+1}^+ связаны с объемом v_1^+ начального множества M_1^+ с помощью следующих соотношений

$$v_{n+1}^+ = \int\limits_{M_{n+1}^+} \mathrm{Vol}^+(dy) = \int\limits_{M_1^+} |\det D^+ F_0^n(z)|\, \mathrm{Vol}^+(dz) =$$

$$|\det D^+ F_0^n(c_1)| v_1^+ = \prod_{i=1}^{n} |\det D^+ F_0(c_i)| v_1^+, \tag{5.4}$$

где $\mathrm{Vol}^+(.)$ — форма k-мерного объема, $c_i = F_0^{i-1}(c_1)$ для некоторой точки c_1, (зависящей от n). Точка c_1 определяется по теореме о среднем значении для модуля якобиана $|\det D^+ F_0^n(z)| = \sqrt{\det[(D^+ F_0^n(z))(D^+ F_0^n(z))^*]}$, который является непрерывной функцией параметра z. Произведение модулей якобианов можно представить в виде

$$\prod_{i=1}^{n} |\det D^+ F_0(c_i)| = \exp(n\chi_n^+),$$

где

$$\chi_n^+ = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln |\det D^+ F_0(c_i)|}{n}. \tag{5.5}$$

Так как преобразование F_0 является перемешивающим относительно меры μ_0, то мера μ_0 является эргодической на множестве X. Поэтому по эргодической теореме Биркгофа последовательность

$$\chi_n^+ \to \chi_0^+(F_0), \quad n \to \infty \tag{5.6}$$

для почти всех по мере μ_0 точек $c_1 \in X$, где число $\chi_0^+(F_0) > 0$ определено формулой типа (3.10), причем $\chi_0^+(F_0) = \chi_0^+(f_0)d$. Следовательно, существует число $\delta_1^0 > 0$, что для любого $\delta_1 \in (0, \delta_1^0)$ существует натуральное число $N_1 = N_1(x_0, \delta_1)$, что для $n > N_1$ выполнено неравенство

$$|\chi_n^+ - \chi_0^+(F_0)| < \delta_1, \qquad n > N_1(x_0, \delta_1), \tag{5.7}$$

которое влечет выполнение условия

$$\prod_{i=1}^{n} |\det D^{+}F_0(c_i)| > \exp(n(\chi_0^{+}(F_0) - \delta_1)) > 0. \tag{5.8}$$

Заметим, что выражение в правой части формулы (5.8) не зависит от точки c_1. Число N_1 зависит, вообще говоря, от точки c_1 и, следовательно, от начальной точки x_0.

Если точка c_1 принадлежит исключительному подмножеству μ_0-меры ноль множества M_1^{+}, то в сколь угодно малой ее окрестности существует некоторая неисключительная точка. Действительно, так как для любого n функция $\det D^{+}F_0^{n}(x)$ (якобиан) непрерывна в окрестности точки $x_1 \in M_1$, то существует точка $x_1' \in M_1$, сколь угодно близкая к точке x_1, что на слое $M_1^{+}(x_1')$ существует неисключительная точка c_1', для которой выполнено соотношение вида (5.8). Существование неисключительной точки c_1' следует из того, что слои $M_1^{+}(x) = W^{u}(x) \cap M_1(x), x \in M_1$ заполняют все множество M_1 и по свойству $\operatorname{supp} \mu_0 = X$ такая точка c_1' существует. Таким образом, будем считать, что неравенство (5.8) справедливо.

Для объемов множеств в неустойчивых многообразиях с учетом формулы (5.4) получаем неравенство

$$v_{n+1}^{+} \geq \exp\{n(\chi^{+}(F_0) - \delta_1)\} v_1^{+}, \quad n > N_1. \tag{5.9}$$

Пусть множества $\breve{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ получаются окаймлением множеств M_n^{+} с помощью применения локальных управлений, т.е. $\breve{M}_{n+1} = F(M_n^{+}, \vec{U})$. Каждое из множеств $\breve{M}_n$ расположено в окрестности неустойчивых многообразий $W^{u}(x_n)$ и аппроксимирует множество M_n с недостатком. Пусть $x = \tilde{x}_n(y)$ — некоторая параметризация (зависящая от номера n) многообразия $W^{u}(x_n) \supset M_n^{+}$. Обозначим d-мерные объемы множеств $\breve{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ через $\breve{v}_n$ и оценим объемы этих множеств. Очевидно, при $n = 1, 2, \ldots$ для малых значениях параметра $\overline{u}$ с точностью до величин более высокого порядка малости по $\underline{u}$ имеем приближенное неравенство

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} \geq \breve{v}_{n+1} = \int\limits_{M_{n+1}^+} v^{\perp}(\tilde{x}_{n+1}(y))\,\mathrm{Vol}^+(dy)(\overline{u}^{d-k} + o(\overline{u}^{d-k})) &\overset{(4.6,4.8)}{\geq} \\
\underline{s}^{\perp}(\overline{u}^{d-k} + o(\overline{u}^{d-k})) \int\limits_{M_{n+1}^+} \mathrm{Vol}^+(dy) &\overset{(5.4)}{=} \\
\underline{s}^{\perp}(\overline{u}^{d-k} + o(\overline{u}^{d-k}))v_{n+1}^+ &\overset{(5.9)}{\geq} \\
\underline{s}^{\perp}(\overline{u}^{d-k} + o(\overline{u}^{d-k}))\exp\{n(\chi^+(F_0) - \delta_1)\}v_1 &\overset{(5.3)}{=} \\
\underline{s}^{\perp}(\overline{u}^{d-k} + o(\overline{u}^{d-k}))\exp\{n(\chi^+(F_0) - \delta_1)\}(\overline{u}^{k} + o(\overline{u}^{k}))s^+(x_0) &= \\
s^+(x_0)\underline{s}^{\perp}(\overline{u}^{d} + o(\overline{u}^{d}))\exp\{n(\chi^+(F_0) - \delta_1)\}&.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Для простоты вычислений мы не будем учитывать приращение объемов при итерациях с номерами $0, 1, 2, \ldots, N_1$. Другими словами, будем считать, что неравенства (5.10) выполняются, начиная с первого шага, т.е. считаем, что $N_1 = 0$. Случай, когда $N_1 > 1$ легко учесть в окончательной формуле, прибавляя это значение.

Таким образом, существует номер $n_0(x_0, \overline{u}, \underline{s}^{\perp}, \delta_1)$, что последнее выражение $s^+(x_0)\underline{s}^{\perp}\overline{u}^d\exp\{n(\chi^+(F_0) - \delta_1)\} + o(\overline{u}^d)$, из неравенства (5.10) превысит значение $V = \mathrm{Vol}(X)$. Тогда этот номер

$$
n_0(x_0, \overline{u}, \underline{s}^{\perp}, \delta_1) = \frac{1}{\chi^+(F_0) - \delta_1} \ln \frac{V}{(\overline{u}^d + o(\overline{u}^d))\underline{s}^{\perp}s^+(x_0)}. \tag{5.11}
$$

Выясним, покроет ли множество M_{n_0} многообразие X при значении n_0, даваемом формулой (5.11). Рассмотрим ниже возможные случаи.

1. Рассмотрим сначала случай, когда инвариантной мерой μ_0 отображения f_0 является мера нормированного объема $\mathrm{vol} = \frac{1}{V}\mathrm{Vol}$, где $V = \mathrm{Vol}(X)$. В этом случае точки множества $M_{n_0}^+$, являющиеся образами начального множества M_1^+ при отображении $F_0 = f_0^d$, расположены в множестве X равномерно, следовательно, множество M_{n_0} покроет многообразие X. Таким образом, в этом случае в формуле (5.2) величина $\underline{c} = 1$.

2. Рассмотрим теперь случай произвольной меры. В этом случае точки множеств M_n^+ располагаются в одних частях пространства состояний более густо, чем в других частях. Однако, так как каждое неустойчивое многообразие, в том числе и содержащее множество M_n^+, всюду плотно в X, то точки множества M_n^+ не могут быть расположены слишком редко. Поэтому нужно

увеличить время итерирования n так, чтобы величина $\mathrm{Vol}^+(M_n^+)$ превысила величину $V = \mathrm{Vol}(X)$ в некоторое число раз. Приравняем последнее выражение из неравенства (5.10) величине AV, где $A > 1$, и из этого соотношения найдем значение n_1. В этом случае множество M_{n_1} покроет многообразие X при $n_1(x_0, \overline{u}, \underline{s}^\perp, \delta_1) = n_0(x_0, \underline{c}\overline{u}, \underline{s}^\perp, \delta_1)$, где $\underline{c} = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{d}}$. Другими словами, нужно увеличить число n_0 из формулы (5.11), а именно взять его таким, как если бы уровень локальных управлений был $\underline{c}\overline{u}$ при значении $\underline{c} \in (0, 1]$.

Теорема 1 доказана. $\triangle$

Замечание 2 *Оценим значение величины A в случае, когда f_0-инвариантная мера μ абсолютно непрерывна относительно меры нормированного объема* vol *с плотностью, ограниченной снизу, т.е.*

$$p(x) = \frac{d\mu}{d\,\mathrm{vol}}(x) \geq \underline{c}^d.$$

Рассмотрим для множества X некоторое конечное достаточно мелкое разбиение $\{\Delta X_1^N, \ldots, \Delta X_N^N\}$. Множества ΔX_i^N будем для простоты считать параллелепипедами. Пусть $\mu(\Delta X_i^N)$ — мера множеств ΔX_i^N. Тогда для некоторой точки $\xi_i^N \in \Delta X_i^N$ мера $\mu(\Delta X_i^N) = p(\xi_i^N)\,\mathrm{vol}(\Delta X_i^N)$, где vol *— мера нормированного d-мерного объема. Пусть $v_n^+ = \mathrm{Vol}^+(M_n^+)$ — объем множества M_n^+. Тогда $\Delta v_n^+(i, N) = \mu(\Delta X_i^N)v_n^+ = p(\xi_i^N)\,\mathrm{vol}(\Delta X_i^N)v_n^+$ — величина k-мерного объема множества $\Delta X_i^N \cap M_n^+$. Рассмотрим элемент покрытия, на котором плотность $p(x)$ достигает своего наименьшего значения $\underline{c}$. Пусть для определенности это множество ΔX_1^N. В множестве ΔX_1^N точки множества M_n^+ расположены почти равномерно. Величина*

$$\varepsilon_{1,N}^\perp = \frac{\mathrm{vol}(\Delta X_1^N)}{\Delta v_n^+(1, N)} = \frac{\mathrm{vol}(\Delta X_1^N)}{p(\xi_1^N)\,\mathrm{vol}(\Delta X_1^N)v_n^+} = \frac{1}{p(\xi_1^N)v_n^+}$$

является $d - k$-мерным объемом проекции окрестности связной компоненты множества $\Delta X_i^N \cap M_n^+$ на ортогональное к множеству M_n^+ дополнение. Тогда число

$$\varepsilon_{1,N}^\perp v_n^+ = \frac{1}{p(\xi_1^N)}$$

показывает, во сколько раз величина объема окрестности множества M_n^+, имеющей ортогональное сечение объема $\varepsilon_1^\perp$, превышает объем V множества X. Устремим число $N \to \infty$ так, чтобы ранг разбиения стремился к нулю. Тогда величина $p(\xi_1^N) \to \underline{c}^d$, т.е. $A = \frac{1}{\underline{c}^d}$.

5.1 Сравнение оценок времени управления, использующих равномерный коэффициент растяжения и коэффициент растяжения в среднем

Если имеется некоторая совокупность оценок, то между ними можно установить отношения порядка и эквивалентности. Среди этой совокупности оценок обычно выбираются наиболее простые.

Оценку вида (5.1) — (5.2) можно рассматривать при некоторых значениях уровня локальных управлений $\overline{u}$ и параметров δ_1. Для любого $K > 1$ существует $\delta_+ > 0$, что для $\delta_1 \in (0, \delta_+)$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{\chi^+(f_0)d - \delta_1} < \frac{K}{\chi^+(f_0)d}. \tag{5.12}$$

Обозначая $R = (V)^{\frac{1}{d}}$, получаем для любого $x \in X$ следующую асимптотику при $\overline{u} \to 0$ оценки (5.1)

$$T(x_0) \lesssim \frac{K}{\chi^+(f_0)d} \ln\left(\frac{V}{c^d\overline{u}^d s^+(x_0)\underline{s}^\perp}\right) = \frac{K}{\chi^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}(x_0)}\right), \tag{5.13}$$

где

$$\underline{l}(x_0) = (s^+(x_0)\underline{s}^\perp)^{\frac{1}{d}}. \tag{5.14}$$

Заметим, что отношение $\frac{N_1(x_0,\delta_1)}{L(\overline{u},x_0)} \to 0$ стремится при $\overline{u}$ не обязательно равномерно относительно параметров x_0, δ_1. Здесь для краткости обозначено

$$L(x_0, \overline{u}_0) = \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}(x_0)}\right). \tag{5.15}$$

Определим равномерный коэффициент растяжения

$$\underline{\rho}^+(f_0) := \min_{x\in X} \ln|\det D^+ f_0(x)| \tag{5.16}$$

и рассмотрим полученную ранее в [3] оценку сверху времени управления

$$T(x_0) \lesssim \frac{1}{\underline{\rho}^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}(x_0)}\right). \tag{5.17}$$

Очевидно, $\chi^+(f_0) \geq \underline{\rho}^+(f_0)$, где коэффициент $\chi^+(f_0)$ определен формулой (3.10). Оценка (5.13) предпочтительнее оценки (5.17), если матрица Якоби в неустойчивом направлении $D^+ f_0(x)$ имеет при некоторых значениях параметра x собственное число, значительно меньшее по модулю других собственных чисел. Кроме того, оценка вида (5.13) может существовать, когда оценка вида

(5.17) не существует, например, если величина $\underline{\rho}^+(f_0) = 0$. Это может быть тогда, когда отображение f_0 не является гиперболическим в смысле определения 1, т.е. равномерно гиперболическим, но является гиперболическим в среднем. Класс таких отображений построен в [6] в разделе Дополнение.

В заключение отметим, что величина K в формуле (5.13) может быть выбрана сколь угодно близкой к единице. Зададимся вопросом: можно ли число K взять равным единице. Ответ на этот вопрос будет дан далее в разделе 8.

6 О выборе параметров в оценках для времени управления

Оценка для времени управления, которая была получена в теореме 1 (формулы (5.1) — (5.2)), зависит от параметра δ_1 и от начального состояния x_0, однако вид этих зависимостей не был полностью определен при доказательстве теоремы 1. Значения параметра δ_1 могут быть выбраны определенным образом с целью улучшения оценок времени управления. Этот выбор может быть сделан при некоторых предположениях о свойствах последовательностей χ_n, $\hat{s}_n^\perp$, $s^+(x_n)$, введенных при доказательстве теоремы 1, которые характеризуют вид величины $N_1(x_0, \delta_1)$, также определенной при доказательстве теоремы 1. Мы будем предполагать, что эти величина представимы в форме $N_1(x_0, \delta_i) = N_1'(x_0) + N_1''(\delta_i)$, которая, как будет показано в ниже следующих разделах, действительно имеет место.

6.1 Выбор оптимального значения параметра δ_1

Рассмотрим оценку времени управления вида (5.1). Эту оценку перепишем в следующем виде

$$T(x_0) \le \overline{n}_0(x_0, \overline{u}, \delta_1) + N_1(x_0, \delta_1), \tag{6.1}$$

где

$$\overline{n}_0(x_0, \overline{u}, \delta_1) := n_0(x_0, c\overline{u}, \underline{s}^\perp, \delta_1) = \frac{1}{\chi^+(f_0) - \delta_1/d}(L(\overline{u}, x_0) - o(\overline{u}^0)), \tag{6.2}$$

величина $L(\overline{u}, x_0)$ определена формулой (5.15).

Формула (6.1) содержит два слагаемых $\overline{n}_0(x_0, \overline{u}, \delta_1)$ и $N_1(x_0, \delta_1)$, где число $N_1(x_0, \delta_1)$ характеризует время переходного процесса при оценивании коэффициента растяжения в среднем $\chi^+(f_0)$, определенного по формуле (3.10), а число $\overline{n}_0(\overline{u}, \delta_1)$ — время управления после переходного процесса. Вид зависимости числа $N_1(x_0, \delta_1)$ от параметра δ_1 определяется скоростью сходимости последовательности χ_n^+ из формулы (5.5). Сейчас мы рассмотрим некоторый возможный вид зависимости величины $N_1(x_0, \delta_1)$ от параметров x_0 и δ_1.

Предположим, что функция $N_1(x_0, \delta_1)$ из формулы (5.7) как функция переменных x_0 и δ_1 и некоторого параметра σ представима в виде

$$N_1(x_0, \delta_1) = N'_{1,\sigma}(x_0) + N''_{1,\sigma}(\delta_1) =: N_{1,\sigma}(x_0, \delta_1), \tag{6.3}$$

где величина $N''_{1,\sigma}(\delta_1)$ зависит от параметра δ_1 по степенному закону, т.е.

$$N''_{1,\sigma}(\delta_1) = \left(\frac{\sigma}{\delta_1}\right)^{\beta}, \quad \sigma, \beta > 0. \tag{6.4}$$

Зависимость величины $N'_{1,\sigma}(x_0)$ от величины σ пока конкретизировать не будем.

Для получения оценок времени управления мы примем в расчет следующие соображения. Очевидно, что для фиксированного значения $\overline{u}$ в оценке (6.2) при малых значениях параметра δ_1 доминирует слагаемое $N''_{1,\sigma}(\delta_1)$, а при значениях параметра δ_1, близких к $\chi^+(f_0)d$, доминирует слагаемое $\overline{n}_0(\overline{u}, \delta_1)$, а именно

$$\lim_{\delta_1 \to 0} N''_{1,\sigma}(\delta_1) = \infty, \quad \lim_{\delta_1 \to \chi^+(f_0)d} \overline{n}_0(\overline{u}, \delta_1) = \infty.$$

Таким образом, функция $\overline{n}_0(\overline{u}, \delta_1) + N_1(x_0, \delta_1)$, входящая в правую часть неравенства (6.1), имеет V-образный по параметру δ_1 вид. Поэтому можно говорить о некотором оптимальном значении δ_1^* параметра δ_1, зависящем от малого фиксированного значения параметра $\overline{u}$ и параметра σ, т.е. $\delta_1^* = \delta_1^*(\overline{u}, \sigma)$, при котором оценка будет наилучшей. Другими словами, мы подчинили величины δ_1 и $\overline{u}$ некоторому уравнению связи. Из вида функции $\overline{n}_0(\overline{u}, \delta_1) + N_1(x_0, \delta_1)$, видно, что аргумент ее минимального значения $\delta_1^*(\overline{u}, \sigma) \to 0$ при $\overline{u} \to 0$.

Справедлива

Теорема 2 *Пусть задана ДСУ вида (2.2), для которой основная динамическая система вида (2.3) имеет коэффициент растяжения в среднем $\chi^+(f_0)$, определенный формулой (3.10). Предположим, что время $N_1(x_0, \delta_1)$ переходного процесса (введено при доказательстве теоремы 1), требующееся для оценивания величины $\chi^+(f_0)$ с заданной точностью δ_1, удовлетворяет условиям (6.3) — (6.4) с некоторыми параметрами σ, β.*

Тогда существует значение $\delta_1^*(\overline{u},\sigma)$ параметра δ_1, при котором оценка сверху вида (6.1) для времени управления $T(x_0)$ из начальной точки $x_0 \in X$ будет минимальной среди оценок данного типа. Это время управления удовлетворяет следующему неравенству

$$T(x_0) \le \overline{T}_1(x_0,\overline{u}) + O_{\overline{u}}(\overline{T}_1^{\frac{\beta}{\beta+1}}(\overline{u})) + N'_{1,\sigma}(x_0), \tag{6.5}$$

где величина

$$\overline{T}_1(x_0,\overline{u}) = \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}(x_0)}\right), \tag{6.6}$$

величина $L(x_0,\overline{u})$ определена формулой (5.15), величина $N'_{1,\sigma}(x_0)$ входит в формулу (6.3), значение $\delta_1^*(\overline{u},\sigma)$ определено при доказательстве теоремы 2 формулой (6.8).

Замечание 3 *Величина $\overline{T}_1(\overline{u})$ является главным слагаемым в оценке (6.5) и может рассматриваться как некоторая характеристика системы управления. Таким образом, при сделанных в теореме 2 предположениях о времени переходных процессов имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка времени управления:*

$$T(x_0) \lesssim \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}(x_0)}\right). \tag{6.7}$$

$\bigtriangledown$ *Доказательство теоремы 2.* Обозначим для краткости $\chi^+ = \chi^+(f_0)$. Так как мы будем рассматривать зависимость выражений лишь от параметра $\overline{u}$, то для краткости зависимость выражений лишь от параметра x_0 отражать не будем. Найдем минимум выражения $\overline{n}_0(\overline{u},\delta_1) + N''_{1,\sigma}(\delta_1)$ по параметру $\delta_1 \in (0,\chi^+ d)$, где выражение $\overline{n}_0$ определено в формуле (6.2), а выражение $N''_{1,\sigma}(\delta_1)$ — в формуле (6.4). Поскольку при малых значениях параметра $\overline{u}$ минимум функции $\overline{n}_0(\overline{u},\delta_1) + N''_{1,\sigma}(\delta_1)$ достигается при малых значениях параметра δ_1, мы для упрощения формул выделим в выражении для $\overline{n}_0(\overline{u},\delta_1)$ линейную часть по параметру δ_1, т.е. представим это выражение в следующем виде

$$\overline{n}_0(\overline{u},\delta_1) = \frac{1}{\chi^+ - \delta_1/d}(L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)) =$$

$$\frac{L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)}{\chi^+} + \frac{\delta_1}{d(\chi^+)^2}(L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)) + o(\delta_1).$$

Обозначим

$$\overline{n}_0''(\overline{u}, \delta_1) := \frac{\delta_1}{d(\chi^+)^2}(L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0))$$

и составим выражение

$$T_{0,\sigma}''(\overline{u}, \delta_1) := \overline{n}_0''(\overline{u}, \delta_1) + N_{1,\sigma}''(\delta_1) = \frac{L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)}{d(\chi^+)^2}\delta_1 + \left(\frac{\sigma}{\delta_1}\right)^\beta.$$

Для нахождения минимума этого выражения найдем его производную по параметру δ_1:

$$\frac{\partial T_{0,\sigma}''(\overline{u}, \delta_1)}{\partial \delta_1} = \frac{L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)}{d(\chi^+)^2} - \beta\frac{\sigma^\beta}{\delta_1^{\beta+1}}.$$

Приравнивая производную нулю, получим уравнение, из которого следует, что оптимальное значение

$$\delta_1^*(\overline{u}, \sigma) = \left(\frac{\beta\sigma^\beta d(\chi^+)^2}{L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}, \tag{6.8}$$

причем при достаточно малом $\overline{u}$ величина $\delta_1^*(\overline{u}, \sigma) < \delta_1^0$, где число δ_1^0 определено при доказательстве теоремы 1. При значении параметра $\delta_1 = \delta_1^*(\overline{u}, \sigma)$ значение функции $\overline{n}_{0,\sigma}''(\overline{u}, \delta_1)$ следующее:

$$\hat{n}_{0,\sigma}''(\overline{u}) := \overline{n}_0''(\overline{u}, \delta_1^*(\overline{u}, \sigma)) =$$

$$\frac{L(\overline{u})}{d(\chi^+)^2}\left(\frac{\beta\sigma^\beta d(\chi^+)^2}{L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} = \beta\left(\frac{\sigma(L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0))}{\beta d(\chi^+)^2}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \tag{6.9}$$

и значение функции $N_{1,\sigma}''(\delta_1)$ следующее:

$$\hat{N}_1''(\overline{u}) = N_{1,\sigma}''(\delta_1^*(\overline{u}, \sigma)) = \sigma^\beta\left(\frac{L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0)}{\beta\sigma^\beta d(\chi^+)^2}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} =$$

$$\left(\frac{\sigma(L(\overline{u}) - o(\overline{u}^0))}{\beta d(\chi^+)^2}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}. \tag{6.10}$$

Таким образом для времени управления $T(x_0)$ получаем следующую оценку сверху

$$T(x_0) \le \overline{T}_1(x_0, \overline{u}) + o(\overline{u}^0) + \hat{n}_{0,\sigma}''(\overline{u}) + \hat{N}_{1,\sigma}''(\overline{u}) + N_{1,\sigma}'(x_0) + o\left(\overline{T}_1^{\frac{\beta}{\beta+1}}(\overline{u})\right),$$

где

$$\hat{n}_{0,\sigma}''(\overline{u}) = O(\overline{T}_1^{\frac{\beta}{\beta+1}}(\overline{u})), \tag{6.11}$$

$$\hat{N}_{1,\sigma}''(\overline{u}) = O(\overline{T}_1^{\frac{\beta}{\beta+1}}(\overline{u})), \tag{6.12}$$

Эта оценка имеет вид (6.5). Теорема 2 доказана. △

7 Оценивание времени переходных процессов с помощью статистических методов

Оценка сверху времени управления вида (6.5) — (6.6) из теоремы 2, улучшающая оценку (6.1) — (6.2), которая эквивалентна оценке (5.1) — (5.2) из теоремы 1, была получена при некотором предположении о скорости сходимости последовательности χ_n^+, определенной формулой (5.5), которая сходится к величине $\chi^+(f_0)$, определенной формулой (3.10). Эта скорость сходимости определяет время переходного процесса, в течение которого коэффициент растяжения в среднем $\chi^+(f_0)$ оценивается величиной χ_n^+ с заданной точностью δ_1. Время этого переходного процесса характеризуется числом $N_1(x_0, \delta_1)$, введенным при доказательстве теоремы 1, где x_0 — начальная точка. В разделе 6.1 при доказательстве теоремы 2 мы предположили, что число $N_1(x_0, \delta_1)$ удовлетворяет условиям (6.3), (6.4), а именно $N_1(x_0, \delta) = N'_{1,\sigma}(x_0) + N''_{1,\sigma}(\delta)$, где $N''_{1,\sigma}(\delta_1) = \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{\beta}$.

В этом разделе мы покажем, что зависимость величины $N_1(x_0, \delta_1)$, от параметров x_0, δ_1 определяется статистическими свойствами основного отображения f_0, задающего динамическую систему (2.3), и логарифма якобиана в неустойчивом направлении (функции вида (3.9)). Мы покажем также, что в определенных случаях статистические свойства упомянутых функций таковы, что действительно выполняются предположения о времени переходных процессов, сделанные в разделе 6.1.

В разделе 7.1 мы изложим некоторые сведения из теории вероятностей и теории стационарных последовательностей. Используя результаты раздела 7.2, полученные с помощью применения центральной предельной теоремы (ЦПТ), мы увидим, что число $N_1(x_0, \delta)$ действительно удовлетворяет условиям (6.3), (6.4), если некоторая f_0-инвариантная мера μ_* удовлетворяет условию сильного перемешивания Это будет выполнено, если мера μ_* является равновесным состоянием для некоторой гельдеровой функции φ и $NW(f_0) = X$. В частности, при $\varphi = 0$ для отображения f_0 существует мера, относительно которой отображение f_0 является сильно перемешивающим. А именно, мера μ_0 является мерой максимальной энтропии. Если считать выполненным некоторое предположение о существовании нормировки для динамического процесса вида (7.1) (условие (7.17) из раздела 7.3), то мы получаем, что величина $N'_{1,\sigma}(x_0)$, а вместе с ней и величина $N_1(x_0, \delta)$, ограничена по начальным данным $x_0 \in X$ (см. формулу (7.18)).

7.1 Некоторые сведения из теории стационарных последовательностей

Пусть имеется обратимое отображение $f : X \to X$, где X — компактное многообразие с нормированной f-инвариантной мерой μ и пусть $\varphi : C(X \to \mathbb{R})$ — произвольная непрерывная функция на множестве X. При нахождении различных характеристик управляемых процессов рассматриваются последовательности вида

$$\varphi_n(x) = \{\varphi(f^n(x)), n \in \mathbb{Z}\}. \tag{7.1}$$

Этим последовательностям можно дать вероятностную трактовку и рассматривать их как случайные процессы с дискретным временем n, где в качестве вероятностного пространства выбрано ПС X, в качестве σ-алгебры — борелевская σ-алгебра на многообразии X, в качестве вероятностной меры — некоторая f-инвариантная нормированная мера μ. Для функций $\varphi_n(.)$ можно определить средние по мере μ значения, которые не зависят от времени. Действительно, для любого натурального n

$$\mathsf{M}\varphi_n = \int\limits_X \varphi(f^n(x))\mu(dx) = \int\limits_Y \varphi(y)\mu(f^{-n}(dy)) = \int\limits_Y \varphi(y)\mu(dy) = \mathsf{M}\varphi_0 = \mathsf{M}\varphi, \tag{7.2}$$

где $Y = f_0^n(X) = X$.

Образуем последовательность частичных сумм по формуле

$$S_n(f, \varphi, x) = \varphi(x) + \varphi(f(x)) + \cdots + \varphi(f^{n-1}(x)). \tag{7.3}$$

Если функция f фиксирована или функция φ фиксирована, то зависимость от них отражать не будем.

Определение 10 *Последовательность $\varphi_n(x)$ вида (7.1) удовлетворяет закону больших чисел (ЗБЧ), если*

$$\mu\left(x \left| \frac{S_n(\varphi, x)}{n} - \mathsf{M}\varphi \to 0\right.\right) = 1. \tag{7.4}$$

Если мера μ эргодична, то по эргодической теореме последовательность $\varphi_n(x)$ удовлетворяет ЗБЧ.

Дисперсия суммы вида (7.3) определяется по формуле

$$\mathsf{D}S_n(\varphi, x) = \mathsf{M}[S_n(\varphi, x) - \mathsf{M}S_n(\varphi, x)]^2.$$

Определение 11 *Последовательность $\varphi_n(x)$ вида (7.1) удовлетворяет центральной предельной теореме (ЦПТ), если существует предел*

$$F_n(z) \to \Phi(z), \quad n \to \infty, \tag{7.5}$$

где

$$F_n(z) = \mu\left(x \,\middle|\, \frac{S_n(\varphi, x) - \mathsf{M}S_n(\varphi, x)}{\sqrt{\mathsf{D}S_n(\varphi, x)}} < z\right), \tag{7.6}$$

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ *— функция Лапласа.*

Имеет место следующее

Утверждение 1 *Пусть $f_0 : X \to X$ является диффеоморфизмом Аносова, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — некоторая гельдеровская функция, μ_* — нормированная борелевская мера, являющаяся равновесным состоянием для некоторой гельдеровской функций φ_*.*

Тогда последовательность $\varphi_n, n \in \mathbb{R}$, определенная по формуле (7.1), удовлетворяет центральной предельной теореме.

Формулировка ЦПТ для топологических цепей Маркова (ТЦМ) дана в [7], с. 36, если в качестве меры рассматривается некоторая специальная мера (мера Перри), которая является мерой максимальной энтропии. Так как имеется почти метрический изоморфизм между диффеоморфизмом Аносова и соответствующей ему ТЦП, то ЦПТ верна также для диффеоморфизмов Аносова f_0 по отношению к мере максимальной энтропии μ_0.

В дальнейшем мы будем применять ЦПТ для стационарных последовательностей, порожденных функцией $\varphi_0^+(x) := \ln|\det D^+ f_0(x)|$ для того, получить оценку скорости сходимости в ЗБЧ для меры максимальной энтропии μ_0 (формула (7.4)).

7.1.1 Условие сильного перемешивания

ЦПТ может быть доказана для стационарных последовательностей непосредственно в ситуации более общей, чем для диффеоморфизмов Аносова (см. [8]). Основным условием применимости ЦПТ к некоторой последовательности является условие слабой зависимости членов этой последовательности Для этого требуется ввести некоторые понятия.

Для обеспечения справедливости ЦПТ требуется, чтобы преобразование f удовлетворяло условию, в некотором смысле более сильному, чем условие перемешивания (3.6). Для определения этого условия введем некоторые понятия. Рассмотрим σ-алгебру $\Sigma_{m,n}$, порожденную вектор-функцией $\vec{\varphi}_{mn} = (\varphi_m, \ldots, \varphi_n)$, т.е. σ-алгебру, порожденную множествами вида $\vec{\varphi}_{mn}^{-1}(C)$, где $C = (a_m, b_m) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$ — отрезок, $m \le k \le n$. Если $n \to +\infty$, то $\Sigma_{m,+\infty}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая σ-алгебры $\Sigma_{m,n}$, $n = m, m+1, \ldots$. Аналогично определятся σ-алгебра $\Sigma_{-\infty,n}$. Очевидно, для любых m, n σ-алгебры $\Sigma_{m,n}$ являются подалгебрами σ-алгебры, на которой определена мера μ.

Определение 12 *Преобразование f по отношению к мере μ и функции φ удовлетворяет условию сильного перемешивания, [8], если выполнено условие*

$$\alpha(n) = \sup_{A,B}[\mu(A \cap B) - \mu A \mu B] \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{7.7}$$

где $A \subset \Sigma_{-\infty,m}$, $B \subset \Sigma_{m+n,+\infty}$.

Очевидно, в силу стационарности последовательности φ_n коэффициент $\alpha(n)$ не зависит от m.

Определение 13 *Преобразование f по отношению к мере μ и функции φ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания, [8], если выполнено условие*

$$\beta(n) = \sup_{A,B}[\mu(B|A) - \mu B] \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{7.8}$$

где $A \subset \Sigma_{-\infty,m}$, $B \subset \Sigma_{m+n,+\infty}$, $\mu(B|A) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}$ — условная мера множества B при условии A.

7.2 Оценки для скорости сходимости в ЗБЧ

Рассмотрим последовательность сумм вида (7.3)

Для достаточно широкого класса отображений, в частности для диффеоморфизмов Аносова, дисперсия величины S_n оценивается по формуле

$$\sigma^2(n) := \mathsf{D}S_n = \sigma_\varphi^2 n + o(n), \tag{7.9}$$

где $\sigma_\varphi > 0$ — некоторая постоянная (см. [8], с. 409, 419).

Справедлива следующая лемма (см., например, [10], с. 386).

Лемма 1 *Предположим, что последовательность $\varphi_n(x)$ вида (7.1) удовлетворяет удовлетворяет ЦПТ. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\mu\left\{x|S_n(x)-\mathsf{M}S_n>a(n)\right\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma(n)}{a(n)}e^{-\frac{a^2(n)}{2\sigma^2(n)}}, \tag{7.10}$$

где $S_n(x)$ — сумма вида (7.3), $\sigma(n)=\sqrt{\mathsf{D}S_n}\to+\infty$ при $n\to\infty$, $a(n)$ — некоторая последовательность, такая что $\frac{a(n)}{\sigma(n)}\to+\infty$ при $n\to\infty$.

$\bigtriangledown$ *Доказательство леммы 1.* Для левой части равенства (7.10) справедливо соотношение

$$\mu\left\{x|S_n(x)-\mathsf{M}S_n>a(n)\right\}=\mu\left\{x\left|\frac{S_n(x)-\mathsf{M}S_n}{\sigma(n)}>\frac{a(n)}{\sigma(n)}\right.\right\}.$$

К левой части последнего равенства применяем при $t\to+\infty$ асимптотическую формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_t^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

при $t=\frac{a(n)}{\sigma(n)}$. Эта формула может быть получена применением стандартной техники для нахождения асимптотик интегралов типа Лапласа. Справедливость ее может быть проверена применением правила Лопиталя. Лемма 1 доказана. $\bigtriangleup$

Лемма 2 *В условиях леммы 1 последовательность $\varphi_n(x)$ вида (7.1) удовлетворяет ЗБЧ и для скорости сходимости справедлива оценка*

$$\left|\frac{S_n(x)-\mathsf{M}S_n}{n}\right|<\frac{\sigma}{n^\gamma},\quad n>N'_{1,\sigma}(x),\quad \mathrm{mod}\mu, \tag{7.11}$$

где $x\in X$, σ — произвольное положительное число, $\gamma\in(0,\frac{1}{2})$ — произвольное число, $N'_{1,\sigma}(x)$ — некоторое число, существование которого следует из доказательства леммы. Заметим, что $N'_{1,\sigma}(x)\to\infty$ при $\sigma\to0$.

$\bigtriangledown$ *Доказательство леммы 2.* По формуле (7.9) $\sigma^2(n)=\mathsf{D}S_n=\sigma_\varphi^2 n+o(n)$. Выберем $a(n)=A\sigma_\varphi n^{1-\gamma}$, где $A>0$ — некоторое произвольное число. Тогда

$$\frac{a(n)}{\sigma(n)}=An^{1/2-\gamma}\to\infty.$$

Следовательно, формула (7.10) примет вид

$$\mu\left\{x|S_n(x)-\mathsf{M}S_n>\sigma_\varphi An^{1-\gamma}\right\}=\mu\left(x\left|\frac{S_n(x)-\mathsf{M}S_n}{\sigma_\varphi n^{1-\gamma}}>A\right.\right)$$
$$\sim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}An^{1-\gamma}}e^{-\frac{A^2n^{2(1-\gamma)}}{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}An^{1/2-\gamma}}e^{-\frac{A^2n^{2(1/2-\gamma)}}{2}}. \qquad (7.12)$$

Введем параметр $\varepsilon=\frac{1}{2}-\gamma\in(0,\frac{1}{2})$, тогда условие (7.12) можно переписать в следующем виде

$$\mu\left(x\left|\frac{S_n(x)-\mathsf{M}S_n}{\sigma_\varphi n^{1/2+\varepsilon}}>A\right.\right)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{An^\varepsilon}e^{-\frac{1}{2}A^2n^{2\varepsilon}}:=c(n).$$

Ряд $\sum_{n=1}^\infty c(n)<\infty$, следовательно $c(n)\to 0$ достаточно быстро. Поэтому имеется сходимость для почти всякого $x\in X$ (см. [11], с. 186):

$$\xi_n(x):=\frac{S_n(x)-\mathsf{M}S_n}{\sigma_\varphi n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\to 0,\quad \mathrm{mod}\mu, \qquad (7.13)$$

т.е. для любого σ существует $N'_{1,\sigma}(x)$, что выполнено $|\xi_n(x)|<\sigma$ для $n>N'_{1,\sigma}(x)$. Так как

$$\frac{S_n(x)-\mathsf{M}S_n}{n}=\sigma_\varphi\frac{\xi_n(x)}{n^{1/2-\varepsilon}}=\sigma_\varphi\frac{\xi_n(x)}{n^\gamma}, \qquad (7.14)$$

то отсюда следует, что выполнено условие (7.11). Лемма 2 доказана.

Следствие 1 *Для любого числа $\delta_1>0$ существует число*

$$N_{1,\sigma}(x,\delta_1)=N'_{1,\sigma}(x)+N''_{1,\sigma}(\delta_1), \qquad (7.15)$$

что почти для всех x по мере μ выполнено неравенство

$$\frac{|S_n(x)-\mathsf{M}S_n|}{n}<\delta_1,\quad n>N_{1,\sigma}(x,\delta_1),\quad \mathrm{mod}\mu, \qquad (7.16)$$

где существование числа $N'_{1,\sigma}(x)$ указано в лемме 2, число $N''_{1,\sigma}(\delta_1)=\left(\frac{\sigma_\varphi\sigma}{\delta_1}\right)^{1/\gamma}$.

Действительно, из неравенства $|\xi_n(x)|<\sigma$ для $n>N'_{1,\sigma}(x)$ и из формулы (7.14) следует, что

$$\frac{|S_n(x)-\mathsf{M}S_n|}{n}\leq\sigma_\varphi\frac{\sigma}{n^\gamma}$$

Число $N''_{1,\sigma}(\delta_1)$ является минимальных для тех номеров n, для которых справедливо неравенство $\frac{\sigma\sigma_\varphi}{n^\gamma}<\delta_1$, где $\sigma>0$ — произвольное число.

7.3 Равномерные относительно начального состояния оценки для времени переходного процесса

Исходя из формулы (7.13), предположим, что существует нормирующая последовательность $\eta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, что выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|S_n(x) - \mathsf{M}S_n|}{\sigma_\varphi \sqrt{n}\eta(n)} = 1, \quad \mathrm{mod}\mu, \tag{7.17}$$

т.е. для почти для всех x по мере μ.

Если φ_n — последовательность независимых величин, то величина $\eta(n) = \sqrt{2\ln\ln n}$ и формула (7.17) выражает закон повторного логарифма (см. [10], с. 385). Из формулы (7.17) следует, что для любого достаточно малого $B > 0$ существует число $N(B)$, что при $n > N(B)$ выполнено неравенство $\frac{|S_n(x)-\mathsf{M}S_n|}{n} \le \sigma_\varphi(1+B)\frac{\eta(n)}{\sqrt{n}}$ для почти всех относительно меры μ точек $x \in X$. Относительно последовательности $\eta(n)$ предполагается выполненным условие: для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n > 1$ выполнено неравенство $1 < \eta(n) < n^\varepsilon$.

Неравенство

$$\frac{|S_n(x) - \mathsf{M}S_n|}{n} < \delta_1, \quad n > N_1(x_0, \delta_1).$$

следует из неравенства

$$\sigma_\varphi(1+B)\frac{\eta(n)}{\sqrt{n}} < \delta_1, \quad n > N_1(x_0, \delta_1),$$

которое в свою очередь следует из неравенства

$$\sigma_\varphi(1+B)\frac{n^\varepsilon}{\sqrt{n}} < \delta_1. \quad n > N_1(x_0, \delta_1).$$

Поэтому в качестве числа $N_1(x_0, \delta_1)$ в формуле (5.7) можно взять число

$$N_1(x_0, \delta_1) = N''_{1,\sigma_\varphi}(\delta_1) = \left(\frac{\sigma_\varphi(1+B)}{\delta_1}\right)^{\frac{2}{1-\varepsilon}}, \tag{7.18}$$

при этом число $N'_1(x_0) = 0$, т.е. число $N_{1,\sigma_\varphi}(x_0, \delta_1)$ не зависит на самом деле от начальной точки $x_0 \in X$. Таким образом, выполнение предположения (7.17) позволит получить равномерно асимптотические оценки времени управления.

8 Асимптотичекие оценки сверху времени управления

Применим ЦПТ для того, чтобы оценить скорость сходимости $\chi_n^+ \to \chi^+(F_0)$ в формуле (5.6) из теореме 1, где величина χ_n^+ определена формулой (5.5), величина $\chi^+(F_0)$ определена формулой типа (3.10). Другими словами, определим зависимость числа $N_1(x_0, \delta_1)$ от параметра δ_1 в формуле (5.7). Представим величины $\chi^+(F_0)$ и χ_n^+ в статистической форме, т.е. в виде пространственных и временных средних.

Пусть отображение $f_0 : X \to X$ является основным отображением вида (2.3) для ДСУ (2.2). Предположим, что f_0 — диффеоморфизм Аносова. Для отображения $F_0 = f_0^d$ рассмотрим функцию

$$\psi_0^+(x) := -\ln|\det D^+ F_0(x)|, \tag{8.1}$$

Для функции ψ_0^+ определим стационарную последовательность вида (7.1), а именно $\psi_0^+(F_0^n(x))$.

В качестве f_0-инвариантной меры μ будем рассматривать меру максимальной энтропии μ_0 или некоторую другую меру μ_*, являющуюся равновесным состоянием для некоторой гельдеровской функции φ_*, причем для абсолютно непрерывной составляющей этой меры μ_* выполнено условие $\operatorname{supp} \mu_*^a = X$.

В соответствии с формулой типа (3.10)

$$\chi^+(F_0) = -\mathsf{M}\psi_0^+ = -\int\limits_X \psi_0^+(x) d\mu(x)$$

— среднее значение функции $\psi_0^+(.)$.

Определим статистическую сумму

$$S_n(\psi_0^+, x) = \psi_0^+(x) + \psi_0^+(F_0(x)) + \cdots + \psi_0^+(F_0^{n-1}(x)). \tag{8.2}$$

Очевидно, мы имеем следующие соотношения

$$\frac{S_n(\psi_0^+, x)}{n} = -\chi_n^+, \quad \frac{\mathsf{M}S_n(\psi_0^+, x)}{n} = -\mathsf{M}\psi_0^+ = -\chi^+(F_0). \tag{8.3}$$

Используя следствие 1, мы заключаем, что число $N_1(x_0, \delta_1)$, входящее в формулу (5.1) и определенное формулой (5.7), действительно представимо в форме (7.15). Поэтому предположение теоремы 2 выполнено, т.е. выполнено условие (6.3) — (6.4) при $\beta = \frac{1}{\gamma}$. Следовательно, выводы теоремы 2 и замечания 3 справедливы для произвольных диффеоморфизмов Аносова и имеет место асимптотическая оценка (6.7).

Если предположить, что выполнено условие нормировки статистических сумм вида (7.17), то оценка (6.7) является равномерно асимптотической по параметру x_0.

Замечание 4 *Оценка (6.7) получается также из оценки (5.13) при значениях $K = 1$. Таким образом, ответ на поставленный в разделе 5.1 вопрос оказывается положительным.*

Замечание 5 *Если для некоторого отображения $f_0 : X \to X$ (необязательно диффеоморфизма Аносова) предположить, что существует некоторая f_0-инвариантная мера μ, для абсолютно непрерывной составляющей μ^a которой выполнено условие $\operatorname{supp} \mu^a = X$ и условие (7.7) сильного перемешивания с достаточно быстро убывающим коэффициентом перемешивания, то оценка (6.7) остается справедливой.*

Замечание 6 *Если выполнено условие (4.9) локальной управляемости вдоль неустойчивых направлений во всем пространстве состояний X (функция $s^+(.)$ отделена от нуля: $s^+(x) \geq \underline{s}^+ > 0$ для любого x), то из оценки (6.7) следует оценка*

$$T(x_0) \lesssim \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l})}\right), \tag{8.4}$$

где

$$\underline{l} = (\underline{s}^+ \underline{s}^\perp)^{\frac{1}{d}}. \tag{8.5}$$

В противном случае (функция $s^+(.)$ не отделена от нуля) может быть оценено среднее время управления, которое осуществлено в разделе 8.1.

8.1 Оценки сверху для среднего времени управления, использующие распределения коэффициентов управляемости вдоль неустойчивых направлений

Пусть μ — некоторая нормированная мера на множестве X. Для описания частичной управляемости вдоль неустойчивых направлений введем функцию распределения $F_{s^+}(s) = \mu(x|s^+(x) < s)$ значений величин $s^+(x)$ на множестве X для $s > 0$. Пусть $F_{s^+}(0) = \mu(X_0^+)$, где $X_0^+ = \{x|s^+(x) = 0\}$. Обозначим $\overline{s}^+ = \max\{s^+(x), x \in X\}$. Очевидно, $F_{s^+}(s) \to 0$ при $s \to 0$ и $F_{s^+}(s) \to 1$ при $s \to \overline{s}^+$. Далее через функцию распределения $F_{s^+}(s)$ будут выражены некоторые величины, зависящие от функций $s^+(.)$.

Функция $s^+(.)$ может не быть отделена от нуля на множестве X. Обозначим

$$X_+^+ = \{x|s^+(x) > 0\} = X \setminus X_0^+.$$

Рассмотрим асимптотическую оценку вида (6.7):

$$T(x_0) \lesssim \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}(x_0)}\right).$$

Обозначим $\overline{[s^+]} = e^a$, где $a = \int\limits_{0<s\leq\overline{s}^+} \ln s dF_{s^+}(s)$. Тогда при выборе начальных состояний $x_0 \in X_+^+$ для среднего времени управления справедлива оценка

$$\mathsf{M}[T(.)] \lesssim \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\tilde{\underline{l}}}\right), \tag{8.6}$$

где

$$\tilde{\underline{l}} = ([s^+])\underline{s}^{\perp})^{1/d}. \tag{8.7}$$

При случайном выборе начального состояния $x_0 \in X$ величина $s^+(x_0)$ с вероятностью $p = \mu(X_+^+)$ положительна. Если $s^+(x_0) = 0$, то в качестве начального значения можно взять состояние $x_1 = f_0(x_0)$ при условии, что $s^+(x_1) > 0$, и далее применить указанную ранее схему управления. Оценка сверху времени управления увеличивается при этом на один такт. Если $s^+(x_1) = 0$, то в качестве начального значения можно взять состояние $x_2 = f_0(x_1)$ при условии, что $s^+(x_2) > 0$, и далее снова применить указанную ранее схему управления. Оценка сверху времени управления увеличивается при этом на два такта и т.д.

Если множество X_0^+ не является инвариантным для отображения f_0, то при некотором значении $N_3(x_0)$ величины $s^+(x_n) = 0$ при $n = 1, \dots, N_3(x_0)-1$ и $s^+(x_{N_3(x_0)}) > 0$. Будем рассматривать $N_3(x)$, $x \in X$, как случайную величину, принимающую значения $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ с некоторыми вероятностями $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$. Тогда можно оценить среднее значение величины $N_3(.)$ на множестве X.

Лемма 3 *Пусть μ — некоторая f_0-инвариантная мера и значения $x_n = f_0^n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ независимы между собой, т.е.*

$$\mu\{f_0(x) \in B_0, \dots, f_0^n(x) \in B_n\} = \mu\{f_0(x) \in B_0\} \cdots \mu\{f_0^n(x) \in B_n\} \tag{8.8}$$

для любых $n \geq 0$ и любых борелевских множеств $B_0, \dots, B_n$. Тогда вероятности $p_n = q^{n-1}p$ для $n = 1, 2, \dots$, где $q = 1 - p$, и математическое ожидание

$$\mathsf{M}[N_3(.)] = 1p + 2qp + 3q^2p + \dots = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}. \tag{8.9}$$

Лемма 3 доказывается прямым вычислением.

Лемма 4 *Предположим кроме того, что отображение f_0 является равномерно перемешивающим (см. формулу 7.8) относительно меры μ. Пусть коэффициент перемешивания $\beta(m)$ является экспоненциально затухающим, т.е.*

$$\beta(m) \leq Ce^{-\gamma m}, \tag{8.10}$$

где $\gamma > 0$, $C > 0$ — некоторые числа. Тогда совокупное среднее число шагов оценивается по некоторой асимптотической при $m \to \infty$ формуле

$$\frac{1}{p}\left[\frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{Cp} + 1\right] + O(\beta(m)). \tag{8.11}$$

$\bigtriangledown$ *Доказательство леммы 4.* В общем случае для достаточного большого положительного числа m будем рассматривать значения состояний через m тактов, т.е. рассмотрим последовательность $x_{n+1} = f_0^m(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ для достаточно большого значения числа m. Значения последовательности $x_{n+1} = f_0^m(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ будут почти независимы.

Рассмотрим меру события, которое заключается в первом попадании величины x_{n+1} в множество X_+^+:

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mu(x_{n+1} \in X_+^+, x_n \in X_0^+, \ldots, x_2 \in X_0^+, x_1 \in X_0^+) = \\ \mu(x_{n+1} \in X_+^+ | x_n \in X_0^+)\mu(x_n \in X_0^+ | x_{n-1} \in X_0^+) \cdots \\ \mu(x_2 \in X_0^+ | x_n \in X_0^+)\mu(x_1 \in X_0^+). \end{aligned}$$

В силу равномерного перемешивания

$$\begin{aligned} p_{n+1} = [\mu(x_{n+1} \in X_+^+) + \beta_{n+1}^p(m)] \cdot [\mu(x_n \in X_0^+) + \beta_n^q(m)] \cdots \\ \left[\mu(x_2 \in X_0^+) + \beta_2^q(m)\right] \mu(x_1 \in X_0^+) = \\ \left[p + \beta_{n+1}^p(m)\right] \cdot [q + \beta_n^q(m)] \cdots [q + \beta_2^q(m)] \cdot [q + \beta_1^q(m)] \leq \\ [p + \beta(m)] \cdot [q + \beta(m)] \cdots [q + \beta(m)] \cdot [q + \beta(m)]\,, \end{aligned} \tag{8.12}$$

где величины $\beta_k^p(m), \beta_k^q(m)$ (невязки) удовлетворяют неравенствам $|\beta_k^p(m)| \leq \beta(m), |\beta_k^q(m)| \leq \beta(m), k = 1, 2, \ldots$. Коэффициент равномерного перемешивания $\beta(m)$ взят из формулы (7.8). Далее число m выберем так, чтобы $p + \beta(m) < 1$, $\quad q + \beta(m) < 1$, т.е. $\beta(m) < \min\{p, q\}$. Пусть для определенности $p < q$. Тогда число m удовлетворяет неравенству

$$m > \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{Cp}. \tag{8.13}$$

Выберем число $m = m_0$, где

$$m_0 = \left[\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{Cp} + 1 \right].$$

Для вычисления среднего значения используем формулу (8.9), откуда имеем

$$\mathsf{M}[N_3(.)] = \frac{p + \beta(m)}{(1 - q - \beta(m))^2} = \frac{1}{p} \frac{1 + \frac{\beta(m)}{p}}{(1 - \frac{\beta(m)}{p})^2} \sim \frac{1}{p} \left(1 + O\left(\frac{\beta(m)}{p} \right) \right). \quad (8.14)$$

Так как на каждом такте мы проходим m_0 шагов, то совокупное среднее число шагов оценивается по следующей формуле $m_0 \mathsf{M}[N_3(.)]$, которая совпадает с формулой (8.11). Лемма 4 доказана. $\triangle$

Заметим, что при $\gamma = \infty$ величина $m_0 = 0$ и формула (8.11) переходит в формулу (8.9).

С учетом формул (8.6) и (8.11) справедлива

Теорема 3 *Среднее время управления при произвольном выборе начальных данных $x_0 \in X$ оценивается величиной*

$$\mathsf{M}[T(.)] \lesssim \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln \left(\frac{R}{\underline{c}\overline{u}\underline{\tilde{l}}} \right) + \frac{1}{p} \left[\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{Cp} + 1 \right], \quad (8.15)$$

где величина $\underline{\tilde{l}}$ определена формулой (8.7), параметры C, γ определены в формуле (8.10), $p = \mu(X \setminus X_0^+)$, множество X_0^+ определено формулой (4.7), остальные параметры те же, что в теореме 1.

9 Заключение

Для диффеоморфизмов Аносова, имеющих некоторые специальные инвариантные меры, получены оценки сверху времени управления вида (5.1) — (5.2). Получен также ряд асимптотических оценок, основная из которых имеет вид (6.7). Оценку (6.7) удалось получить с помощью сочетания методов, применяемых для исследования гладких динамических систем (оценивание скорости роста объемов множеств достижимости) и методов теории вероятностей для оценивания времени переходных процессов. Оценка (6.7) является более точной, чем полученная ранее в [3] оценка (5.17). Кроме того, оценка (6.7) может существовать при менее ограничительных условиях, чем оценка (5.17). Оценка времени управления (6.7) зависит от набора начального состояния. Оценка (8.15) дает среднее время управления.

Для систем гиперболического типа оценки времени управления зависит от уровня управляющих воздействий по логарифмическому закону. Из формулы (6.7) следует, что при уменьшении уровня локальных управлений в k раз максимальное время управления увеличиться в $\ln k$ раз. Время управления T зависит обратно пропорционально энтропии $h_\mu(f_0)$. Этот коэффициент характеризуют степень хаотичности системы. Поэтому увеличение хаотичности уменьшает время управления. Для систем гиперболического типа общий израсходованный энергетический ресурс за все время оказывается величиной порядка $\overline{u}|\ln(\overline{u})|$.

Список литературы

[1] Yomdin Y. Volume growth and entropy // Israel J.math. — 1987.— v.57, p.285 – 300.

[2] Newhouse Sh. Entropy and Volume // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 1988. v. 8* (Conley Memoria Issue) — p. 283 – 300.

[3] *Хрящев С.М.* Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. I. // АиТ. №10. 2004. С. 51 — 67.

[4] *Хрящев С.М.* Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. II. // АиТ. №11. 2004. С.

[5] Хрящев С.М. Оценки времени управления для нестационарных систем, порожденных квазилинейными гиперболическими отображениями. Дифференциальные уравнения и процессы управления. — электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления http://www.neva.ru/journal — 2004, N 4, с. 77 — 115.

[6] Каток А.Б, Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999, 768 с.

[7] Боуэн Р. Методы символической динамики. — М.: Мир, 1979, 245 с.

[8] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины — М.: Наука, 1965, 524 с.

[9] Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы, М.:ФМ, 1963, 284 с.

[10] Ширяев А.Н. Вероятность. Наука, 1980, 574 с..

[11] Лоэв М. Теория вероятностей. М.: Иностранная литература, 1962, 720 с.