ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Управление колебаниями и хаосом

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

С.М. Хрящев

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Высшей математики,
e-mail: khrya@hotbox.ru

Аннотация.

Системы управления с хаотическим поведением траекторий существенно отличаются по своим свойствам от систем управления с регулярным поведением траекторий. Специфической чертой хаотических систем является наличие у них всюду плотных в пространстве состояний траекторий, что позволяет использовать для достижения цели управления сколь угодно малые по величине управляющие воздействия. В работе рассмотрены некоторые количественные характеристики степени хаотичности системы и дана классификация хаотических систем управления. Особое внимание уделено слабо хаотическим системам, которые могут возникать, например, при вырождении сильно хаотических систем. Получены асимптотические оценки времени управления системой при сколь угодно малых значениях управляющих воздействий. Способ получения оценок времени управления основан на учете роста объемов множеств достижимости. Полученные оценки выражены через характеристики системы управления.

1 Введение

Системы управления с хаотическим поведением траекторий существенно отличаются по своим свойствам от систем управления с регулярным поведением траекторий. Для более точного дальнейшего изложения отметим, что в рамках предлагаемой схемы исследования динамическая система управления описывается некоторой динамической системой (системой с нулевым управлением) и локальной системой управления вдоль траекторий этой динамической системы. В свою очередь динамическая система задается некоторым (глобальным) отображением пространства состояний в себя, которое мы называем основным, а локальная система управления — (локальным) семейством отображений пространства состояний в себя.

Специфической чертой хаотических систем является наличие у динамической системы всюду плотных в пространстве состояний траекторий, что позволяет использовать сколь угодно малые по величине управляющие воздействия. Схема управления при этом следующая. Пусть требуется перевести систему управления из некоторого начального состояния в некоторое конечное состояние. В силу хаотичности динамической системы имеется траектория (мы называем ее основной), соответствующая некоторому постоянному (обычно нулевому) управлению и проходящая сколь угодно близко от этих точек. С помощью локальных управлений мы переходим на эту основную траекторию, далее двигаемся по ней какое-то время до некоторой подходящей точки, а затем с помощью локальных управлений попадаем в целевую точку. Время управления такими системами, естественно, зависит от максимально допустимого уровня управляющих воздействий и от характеристик хаотичности системы.

Задачи управления хаотическими системами привели к появлению значительного числа работ, в которых исследовались системы различных классов. Современное состояние теории управления хаосом и история вопроса освещены в обзоре [1]. Мы перечислим здесь лишь некоторые из работ. Во-первых, отметим работу [2], в которой заложены основы так называемого OGY-метода, получившего развитие во многих последующих работах. В этой работе полученные оценки времени управления зависят степенным образом от уровня локальных управлений. Далее отметим работу [3], в которой исследовались необратимые одномерные систем на единичном отрезке и с помощью методов символической динамики получены оценки времени управления логарифмического типа. В работе [4] исследовалась управляемость гамильтоновых систем и отмечалось, что в области хаотического поведения траекторий время управления зависит логарифмически от размера областей локальной достижимости и, следовательно, от уровня локальных управлений. Имеется большое число работ, в которых время управления системой оценивалось численно. Для примера укажем на работы [5, 6].

Несмотря на большое количество работ на обозначенную тему, представляется недостаточно исследованным ряд вопросов. В связи с этим кажется важным выделение классов хаотических систем управления и нахождение оценок времени управления для систем этих классов.

В настоящей работе мы продолжаем изучение динамических систем управления с хаотическим поведением траекторий, начатое в работах [7, 8], где мы рассмотрели два класса систем управления. Для первого класса основные отображения являются отображениями гиперболического типа, для второго класса основные отображения являются нейтрального типа. Динамические системы (основные отображения) гиперболического типа имеют положительные энтропии. Для каждой системы этого типа имеется разбегание траекторий вдоль некоторых направлений, причем энтропия основного отображения характеризует экспоненциальную скорость этого разбегания. Разбегание траекторий приводит к их хаотическому поведению. Динамические системы (основные отображения) нейтрального типа имеют нулевые энтропии. Системы этого типа не имеют разбегания траекторий и их поведение можно считать нехаотическим. В работах [7, 8] показано, что характеристики систем управления, для которых основные отображения являются гиперболическими (хаотическими), отличаются от характеристик систем управления, для которых основные отображения являются нейтральными (нехаотическими). В частности, время управления системами гиперболического типа зависит от уровня локальных управлений по логарифмическому закону, а время управления системами нейтрального типа зависит от уровня локальных управлений по степенному закону.

Для развития этой темы отметим следующее. Представляют интерес процессы, которые являются промежуточными между процессами, описываемыми системами гиперболического и нейтрального типов. Для описания этих промежуточных процессов требуются соответствующие математические модели, которые можно назвать слабо хаотическими системами. Роль слабо хаотических систем для описания физических явлений отмечалась в книге [9]. В настоящей работе вводятся классы систем с разными степенями слабой хаотичности. Системы таких видов могут возникать, например, для описания процессов, у которых экспоненциальное разбегание траекторий по истечении некоторого промежутка времени сменяется более медленным разбеганием траекторий. Другими слова, системы могут вырождаться с течением времени. Поэтому системы рассмотренных классов являются нестационарными. Для полноты описания возможных видов процессов можно рассматривать сильно хаотичные системы. Таким образом, с формальной точки зрения оказывается возможным рассмотреть классы систем с разной степенью хаотичности. Поскольку хаотическое поведение систем обычно сосредоточено на некоторых ограниченных множествах, пространствами состояний систем этих классов являются компактные конечномерные многообразия.

Как и ранее, мы уделяем основное внимание оцениванию времени управления системами. Способ получения оценок времени управления для систем, введенных в этой работе классов, остается прежним, как и в работах [7, 8]. Он основан на следующих свойствах основных отображений и локальных управлений. Предполагая полную локальную управляемость системы, под действием локальных управлений мы можем перейти за один шаг из начальной точки в некоторое множество локальной достижимости. Далее мы следим за итерациями этого множества. Вдоль неустойчивых направлений начальное множество локальной достижимости растягивается, вдоль устойчивых направлений — сжимается. С помощью локальных управлений мы противодействуем сжатию, поэтому сжатие происходит лишь до некоторого отделенного от нуля значения. Вдоль неустойчивых направлений начальное множество растягивается неограниченно. Так как неустойчивые многообразия, касающиеся неустойчивых направлений основных отображений, всюду плотны в пространстве состояний, а пространство состояний компактно, то некоторая итерация начального множества покроет все пространство состояний. Номер этой итерации может быть взят в качестве оценки сверху времени управления. Отметим, что попутно мы конкретизировали способ управления системой, указанный ранее, а именно управляемое движение происходит вдоль плотных траекторий, расположенных в неустойчивых многообразиях. Величина растяжения вдоль неустойчивых направлений характеризует скорость роста объемов множеств достижимости вдоль этих направлений и, следовательно, время управления системой. Однако, в отличие от ранее рассмотренных классов основных отображений, основные отображения классов, рассматриваемых в настоящей работе, не обязательно являются обратимыми. Поэтому формально для них нельзя применять способ пересчета объемов множеств достижимости при переходе от предыдущего шага к последующему, который мы применяли для обратимых систем. Здесь мы эту трудность обходим следующим образом. Мы предполагаем, что системы рассматриваемых классов являются проекциями некоторых обратимых систем, для которых пересчет объемов последовательности множеств достижимости при переходе от предыдущего шага к последующему осуществить возможно. Если для системы-прообраза объем множества достижимости некоторой итерации начальной точки с соответствующим номером превысит определенное значение, то это будет означать, что для системы-образа итерация множества достижимости с тем же номером покроет все пространство состояний, т.е. любая точка пространства состояний является достижимой из начальной точки. Поэтому номер указанной итерации для системы-прообраза может быть принят за оценку времени управления системой-образом.

Таким образом, скорость вырождения системы, т.е. скорость уменьшения коэффициентов растяжения в неустойчивых направлениях, характеризует уменьшение хаотичности системы и определяет скорость роста объемов множеств достижимости вдоль неустойчивых направлений, которая, в свою очередь, определяет вид оценок времени управления системой. Эти оценки могут быть близки как к оценкам для систем нейтрального типа, так и к оценкам для систем гиперболического типа. В работе рассматриваются различные типы скорости вырождения систем, т.е. типы зависимостей коэффициентов растяжения от времени. Эти типы зависимостей определяет принадлежность конкретной системы соответствующему класса.

Связь скорости роста объемов и хаотичности системы отмечалась в работах [10, 11].

Основные теоретические положения, используемые в статье, имеются в [12].

2 Хаотические системы на торе, порожденные линейными нестационарными отображениями

Предварительно в следующем подразделе рассмотрим пример.

2.1 Пример семейства систем управления на двумерном торе

В этом разделе мы построим семейство систем управления на двумерном торе, порожденное семейством линейных отображений, возмущающим тождественное отображение.

Рассмотрим унимодулярную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Пусть λ^+, λ^- — собственные числа, e^+, e^- — собственные векторы матрицы A. Обозначим $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда

$$\lambda^+ = 1 + a,\ \lambda^- = \frac{1}{1+a}, \quad e^+ = (1, a)^T,\ e^- = (-a, 1)^T,$$

где знак T означает транспонирование.

Образуем одномерные проекторы P^+, P^- на собственные направления $e^+, e^- \in \mathbb{R}^2$ матрицы A. Они определяются формулами $P^+ = e^+(e^+)^T, P^- = e^-(e^-)^T)$ и их можно представить в следующем виде:

$$P^+ = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}, \quad P^- = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a^2 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Спектральное представление матрицы A следующее:

$$A = \lambda^+ P^+ + \lambda^- P^-.$$

Будем далее считать, что λ^+, λ^- — произвольные числа. Образуем матричное семейство, зависящее от вещественных параметров λ^+, λ^-, следующего вида

$$A(\lambda^+, \lambda^-) = \lambda^+ P^+ + \lambda^- P^-.$$

Отметим, что при $\lambda^+ = 1 + a,\ \lambda^- = \frac{1}{1+a}$ мы получаем матрицу A.

Будем считать, что собственные числа λ^+, λ^- зависят от параметра $w \in [0, \overline{w})$ следующим образом:

$$\lambda^+(w) = 1 + w, \quad \lambda^-(w) = \frac{1}{1+w}.$$

В том случае, если величина $\overline{w}$ мала, мы можем рассмотреть более простой вид зависимости

$$\lambda^+(w) = 1 + w, \quad \lambda^-(w) = 1 - w.$$

В этом случае матричное семейство можно представить в виде

$$A(w) = E + \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 - a^2 & 2a \\ 2a & a^2 - 1 \end{pmatrix} w \tag{2.3}$$

или в виде $A(w) = E + wJ(\varphi)$, где $\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\, a$,

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Таким образом, матричное семейство $A(w), w \in (0, \overline{w})$ возмущает единичную матрицу E.

Положим вектор $b = (1,0)^T$ и определим двупараметрическое семейство отображений $G(., u, w) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, где отображение $x \to G(x, u, w)$ определено по формуле

$$G(x, u, w) = A(w)x + bu. \tag{2.5}$$

Параметры u, w удовлетворяют ограничениям $|u| \le \overline{u}$, $0 \le w < \overline{w}$ для некоторых чисел $\overline{u}, \overline{w}$.

Рассмотрим динамическую систему управления (ДСУ), порожденную отображением (2.5), пространством состояний которой является пространство $\mathbb{R}^2$:

$$x_{n+1} = A(w)x_n + bu_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Управляющие воздействия u_n подчиним ограничениям $|u_n| \le \overline{u}$. Параметр w, $0 \le w < \overline{w}$ характеризует степень вырожденности системы. При $w = 0$ матрица $A(0) = E$. Далее рассмотрим ДСУ, пространством состояний которой является тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:

$$x_{n+1} = A(w)x_n + bu_n, \quad \mathrm{mod} 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

т.е. при отображении $G(x, u, w) = A(w)x + bu$ берутся дробные части координат двумерного вектора $A(w)x_n + bu_n$.

Выясним условия локальной управляемости ДСУ (2.7). Свойства локальной управляемости ДСУ (2.6) и (2.7) одинаковы. При фиксированном значении параметра w рассмотрим матрицу $C(w) = (b|A(w)b)$ локальной управляемости, которая имеет следующий вид:

$$C(w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + w\cos\varphi \\ 0 & w\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $C(w)$ невырождена при $w \ne 0$. Матрица $C(w)C^*(w)$ имеет следующий вид

$$C(w)C^*(w) = \begin{pmatrix} 1 + (1 + w\cos\varphi)^2 & w\sin\varphi(1 + w\cos\varphi) \\ w\sin\varphi(1 + w\cos\varphi) & w^2\sin^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Вычисления дают, что определитель $\det C(w)C^*(w) = w^2\sin^2\varphi$, след матрицы $\operatorname{tr} C(w)C^*(w) = 2(1 + w\cos\varphi) + w^2$. При малых значениях параметра w происходит вырождение матриц $C(w)C^*(w)$. Собственные числа $\underline{l}(w), \overline{l}(w)$ матрицы $[C(w)C^*(w)]^{\frac{1}{2}}$ имеют следующие асимптотики:

$$\underline{l}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} w\sin\varphi + O(w^2), \quad \overline{l}(w) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{w}{2}\cos\varphi\right) + O(w^2). \tag{2.8}$$

Собственные векторы матрицы $[C(w)C^*(w)]^{\frac{1}{2}}$ имеют следующие асимптотики:

$$\underline{d}(w) = \left(1, w\sin\varphi + O(w^2)\right)^T, \quad \overline{d}(w) = \left(-w\sin\varphi + O(w^2), 1\right)^T. \tag{2.9}$$

Матрица локальной управляемости $C(w)$ задает эллипсоид локальной управляемости

$$Ell(w) = \{h | h^*[C(w)C^*(w)]^{-1}h \le 1, h \in \mathbb{R}^d\}. \tag{2.10}$$

Полуоси этого эллипсоида совпадают со значениями $\underline{l}(w), \overline{l}(w)$, собственные векторы $\underline{d}(w), \overline{d}(w)$ определяют его положение его в пространстве состояний (ПС). Эллипсоид $(\overline{u})^d Ell(w)$ аппроксимирует в линейном приближении множество локальной достижимости из некоторой точки $x \in \mathbb{R}^2$ за d шагов, где d — размерность пространства состояний. В нашем случае $d = 2$. В силу линейности ДСУ форма эллипсоида локальной управляемости не зависит от точки x. Условия

$$\underline{l}(w) > 0, \quad \overline{l}(w) > 0 \tag{2.11}$$

являются достаточными для локальной управляемости ДСУ (2.7), см. [7]. Формула (2.8) показывает, что при вырождении матрицы $A(w)$ при $w \to 0$ ухудшаются свойства локальной управляемости ДСУ (2.7), так как объем эллипсоида локальной управляемости стремится к нулю.

Вместо характеристик локальной управляемости $\underline{l}(w)$ и $\overline{l}(w)$ можно рассматривать величины $l^+(w)$ и $l^\perp(w)$, которые являются соответственно длинами проекций эллипсоида локальной управляемости на неустойчивое направление e^+ и на перпендикулярное к нему направление $e^\perp$, в данном случае на устойчивое направление e^-. Пусть $\theta = \theta(w)$ — угол между векторами $e^\perp$ и $\overline{d}(w)$. Угол θ характеризует положение эллипсоида локальной управляемости в ПС. Очевидно,

$$\cos\theta = \frac{\langle \overline{d}(w), e^\perp \rangle}{|\overline{d}(w)| \cdot |e^\perp|},$$

где угольные скобки означают скалярное произведение. При малых значениях параметра w значение $\cos\theta(w) = \cos\frac{\varphi}{2} + O(w)$ и величины

$$l^{\perp}(w) = \bar{l}(w)\cos\theta(w) = \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} + O(w) = \frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} + O(w), \qquad (2.12)$$

$$l^{+}(w) = \bar{l}(w)\sin\theta(w) = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} + O(w) = \frac{2}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} + O(w). \qquad (2.13)$$

Следовательно, для любых достаточно малых значениях параметра w величины $l^{\perp}(w), l^{+}(w)$ отделены от нуля, так как выполнены неравенства

$$l^{\perp}(w) \geq s^{\perp}, \quad l^{+}(w) \geq s^{+}, \qquad (2.14)$$

где

$$s^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}, \quad s^{+} = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}.$$

Условие (2.14) является достаточным условием локальной управляемости семейства ДСУ вида (2.7). Это условие является следствием того, что эллипсоид локальной управляемости (2.10) находится в общем положении по отношению к собственным векторам e^{+}, e^{-} матрицы A, что, в свою очередь, является следствием того факта, что вектор b находится в общем положении по отношению к собственным векторам e^{+}, e^{-} матрицы A. Достаточное условие (2.14) является менее ограничительным, чем условие (2.11), так как в случае общего положения эллипсоида локальной управляемости величины $l^{\perp}(w), w \geq 0$ равномерно отделены от нуля, тогда как величины $\underline{l}(w)$ стремятся к нулю при $w \to 0$.

Оценки снизу для величин $l^{\perp}(w), l^{+}(w)$ вида (2.14) используются для получения оценок сверху времени управления. Аналогично можно ввести оценки сверху для величин $l^{\perp}(w), l^{+}(w)$, которые могут быть использованы для получения оценок снизу времени управления.

Рассмотрим теперь при нулевом управлении $u = 0$ динамическую систему (ДС) на торе вида

$$x_{n+1} = A(w)x_n, \quad \mathrm{mod} 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

которая не является обратимой. Однако, ее прообраз в пространстве $\mathbb{R}^2$. т.е. ДС

$$x_{n+1} = A(w)x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

является обратимой. Следовательно, для ДСУ (2.6) в $\mathbb{R}^2$, которая является прообразом ДСУ (2.7), легко пересчитываются объемы множеств достижимости при совершении итераций во времени.

Далее мы будем вычислять объемы итерированных множеств достижимости для ДСУ (2.6). Тактом будем называть число итераций, равное размерности d пространства состояний, в данном случае $d = 2$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^2$ — некоторая начальная точка. Рассмотрим множество M_1 локальной достижимости из этой точки за один такт и его проекцию M_1^+ на неустойчивое направление. Пусть эту проекцию ограничивают две точки $x_1', x_1'' \in \mathbb{R}^2$, расположенные на некоторой прямой, параллельной неустойчивому собственному направлению e^+. Пусть

$$x_2'' - x_2' = A^d(w)[x_1'' - x_1'],$$

т.е. отрезок $[x_1', x_1'']$ переводится матрицей $A^d(w)$ в отрезок $[x_2', x_2'']$, также лежащей на некоторой прямой, параллельной неустойчивому собственному направлению e^+. На шаге с номером n

$$x_n'' - x_n' = A^{d(n-1)}(w)[x_1'' - x_1'].$$

Обозначим $v_1^+ = |x_1'' - x_1'|$ — одномерный объем (длину) множества M_1^+. В силу локальной управляемости вдоль неустойчивого направления величина $v_1^+ \geq s^+\overline{u}$. Определим величину $\kappa^+(w) = (\lambda^+(w))^2$, которая характеризует растяжение за два шага. Тогда на такте с номером n для отрезка $[x_n', x_n'']$ его длина

$$v_n^+ = (\kappa^+(w))^{n-1} v_1^+, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

За счет локальных управлений будем проводить окаймление каждого отрезка $[x_n', x_n'']$, $n = 1, 2, \ldots$ в направлении устойчивого направления. В результате этой операции на шаге с номером n мы получим множество достижимости, содержащее прямоугольник длины v_n^+ и ширины $v^\perp$, где $v^\perp \geq s^\perp\overline{u}$. Двумерные объемы (площади) этих прямоугольников равны

$$v_n = v_n^+ v^\perp \geq (\kappa^+(w))^{n-1} s^+ s^\perp (\overline{u})^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, что существует значение $\overline{n}$ параметра n, при котором число $v_{\overline{n}-1} < V$, $v_{\overline{n}} \geq V$, где $V = 1$ — площадь единичного квадрата, равная объему тора. Отрезок $[x_n', x_n''] \subset \mathbb{R}^2$ проектируется в тор $\mathbb{T}^2$ так, что точки этого отрезка расположены в торе равномерно и при $n \to \infty$ образуют всюду плотное в нем множество, так как координаты вектора e^+ рационально несоизмеримы. Множества достижимости на торе $\mathbb{T}^2$ для системы (2.7) являются проекциями множеств достижимости системы (2.6) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Поэтому при том же значении $\overline{n}$ параметра n множество достижимости системы (2.7) покроет тор $\mathbb{T}^2$. Если ввести обозначения

$$\rho^+(w) = \ln \lambda^+(w) = \ln(1 + w), \quad \rho^-(w) = -\ln \lambda^-(w) = -\ln(1 - w),$$

то значение $\overline{n}$ равно

$$\overline{n} = \frac{1}{2\rho^+(w)} \ln \frac{V}{s^+ s^\perp (\overline{u})^2} + 1 = \frac{1}{\ln(1+w)} \ln \frac{R}{\underline{l}\overline{u}} + 1, \tag{2.15}$$

где $\underline{l} = [s^+ s^\perp]^{1/2}$, $R = V^{1/2} = 1$. Значение $\underline{l}$ ограничивает снизу радиус эллипсоида локальной управляемости.

Значение $\overline{n}$ может быть принято в качестве оценки сверху $T_w(\overline{u})$ времени управления системой. Аналогично может быть получена оценка снизу для времени управления, для которой нужно будет использовать величину $\rho^-(w)$.

Числа $\rho^+(w), \rho^-(w)$ имеют следующие асимптотики: $\rho^+(w) = \ln \lambda^+(w) = \ln(1+w) \sim w$, $\rho^-(w) = -\ln \lambda^-(w) = -\ln(1-w) \sim w$. В силу формул (2.12), (2.13) отношение $\frac{R}{\underline{l}} = \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi + O(w)}}$. Оценка сверху на время управления в соответствии с формулой (2.15) при малых значения $\overline{u}, w$ имеет вид

$$\overline{T}_w(\overline{u}) \stackrel{<}{\sim} \frac{1}{w} \ln \left[\frac{1}{\overline{u}\sqrt{\sin\varphi}} \right] + 1. \tag{2.16}$$

Обозначение $a(u) \stackrel{<}{\sim} b(u)$ означает, что $\lim \frac{a(u)}{b(u)} \leq 1$.

Рассмотренный пример системы на двумерном торе может быть обобщен на случай тора произвольной размерности d.

2.2 Примеры нестационарных систем на торе

В этом разделе мы построим последовательность линейных отображений $x \to A_n x$, где $n = 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^d$, следующим образом. Выберем в $\mathbb{R}^d$ два ортогональных подпространства E^+, E^-, причем $\dim E^+ = k, \dim E^- = d - k$. Пусть далее P^+, P^- — соответственно проекторы на эти подпространства. Очевидно, $P^+ + P^- = I$, где I — единичная матрица. Далее, как в предыдущем разделе, мы построим некоторое матричное семейство $A(w)$, выберем некоторую последовательность $w_n \to 0$ при $n \to 0$ и положим $A_n = A(w_n)$.

Пусть $\xi^+(n) > 0$, $\xi^-(n) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ — две числовые последовательности, которым соответствуют последовательности $1 + \xi^+(n), 1 - \xi^-(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Образуем последовательность матриц

$$A_n = [1 + \xi^+(n)]P^+ + [1 - \xi^-(n)]P^- = I + \xi^+(n)P^+ - \xi^-(n)P^-. \tag{2.17}$$

Очевидно, при выборе тождественно нулевых последовательностей, т.е. при $\xi^+(n) = 0$, $\xi^-(n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, матрица $A_n = I$, другими словами, последовательность $w_n = W(\xi^+(n), \xi^-(n))$ возмущает единичную матрицу, где $W(\xi^+, \xi^-)$ — некоторая функция переменных ξ^+, ξ^-. В дальнейшем мы вместо последовательности w_n часто будем рассматривать непосредственно пару последовательностей $\xi^+(n), \xi^-(n)$.

Рассмотрим далее последовательность отображений

$$f_n : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d, \quad x \to A_n x, \quad \mathrm{mod} 1, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{2.18}$$

Заметим, что отображения f_n являются, вообще говоря, необратимыми.

Последовательности отображений (2.17) и (2.18) соответственно порождают системы управления

$$x_{n+1} = A_n x_n + b u_n, \quad x_n \in \mathbb{R}^d, \quad u_n \in U \subset \mathbb{R}^1 \tag{2.19}$$

и

$$x_{n+1} = A_n x_n + b u_n, \quad \mathrm{mod} 1, \quad x_n \in \mathbb{T}^d, \quad u_n \in U \subset \mathbb{R}^1. \tag{2.20}$$

Нестационарная динамическая система (ДС), порожденная отображением f_n по формуле (2.18), в зависимости от вида последовательностей $\xi^+(n)$, $\xi^-(n)$ демонстрирует в пространстве состояний (ПС) $\mathbb{T}^d$ различные виды хаотического поведения. Мы будем рассматривать различные типы последовательностей $\xi^+(n)$, $\xi^-(n)$.

Пример 1. Пусть $d = 2$. Выберем в начале координат два ортогональных направления, задающихся векторами e^+, e^-. Пусть длина $|e^+| = |e^-| = 1$. Тогда проекторы вычисляются по формулам: $P^+ = (e^+)^T e^+, P^- = (e^-)^T e^-$. В некоторой системе координат векторы имеет представления: $e^+ = (\alpha, \beta)$, $e^- = (-\beta, \alpha)$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Выберем координаты α, β вектора e^+ так, чтобы числа α и β были между собой рационально несоизмеримы (см. пример из раздела 2.1). Рассмотрим две числовые последовательности $\xi^+(n) > 0, \xi^-(n) > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Построим матрицу A_n по формуле (2.17) и отображение f_n по формуле (2.18). Очевидно, $1 + \xi^+(n), 1 - \xi^-(n)$ — собственные числа, e^+, e^- — собственные векторы матрицы A_n. Последние не зависят от номера n.

Рассмотрим некоторый специальный случай выбора последовательностей $\xi^+(n), \xi^-(n)$, а именно пусть $\xi^+(n) = \frac{3}{2} + \sin n$, $\xi^-(n) = \frac{1}{2} + \sin n$, $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, временные средние величин $\xi^+(n), \xi^-(n)$ следующие

$$\hat{\xi}^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi^+(k) = \frac{3}{2}, \quad \hat{\xi}^- = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi^-(k) = \frac{1}{2}. \tag{2.21}$$

Величина $\hat{\xi}^+ > 1$, хотя при некоторых значениях параметра n величины $\xi^+(n)$ могут быть меньше единицы. Аналогично, величина $\hat{\xi}^- < 1$, хотя при некоторых значениях параметра n величины $\xi^-(n)$ могут быть больше единицы. Динамические системы, порожденные такими матрицами, естественно назвать нестационарными гиперболическими в среднем динамическими системами. Для ДСУ вида (2.20) с последовательностями $\xi^+(n)$, $\xi^-(n)$ со свойством (2.21) оценки времени управления могут быть получены незначительной модификацией рассуждений, проведенных в разделе 2.1. Оценка сверху времени управления дается формулой типа (2.16), где величина $w = \hat{\xi}^+$. Рассмотренный пример может быть обобщен на случай произвольной размерности так, чтобы ДС имела всюду плотные траектории в ПС.

Особый интерес представляет случаи, когда $w_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\xi^+(n) \to 0$, $\xi^-(n) \to 0$ при $n \to \infty$. При этом встает вопрос об оценивании времени управления системой, так как в этом случае формула вида (2.16) становится неприменимой в связи с малостью величины w, стоящей в знаменателе. Поэтому возникает задача оценивания времени управления в зависимости от характера стремления последовательности w_n к нулю. В ниже следующих разделах получены оценки времени управления для различных типов поведения последовательности w_n. В частности, последовательности $\xi^+(n)$, $\xi^-(n)$ могут иметь степенной тип поведения, т.е. $\xi^+(n) \sim \frac{C^+}{n^\gamma}, \xi^-(n) \sim \frac{C^-}{n^\gamma}$, $\gamma > 0, C^\pm > 0$. В этом случае полученные ниже оценки зависят от параметров $\gamma, C^\pm$.

3 Описание класса нестационарных систем управления

В этом разделе мы определим класс нестационарных систем управления на произвольном пространстве состояний, обобщающий класс систем на торе, описанный в разделе 2.

Пусть имеется гладкое компактное многообразие Y и гладкое риманово многообразие X, являющееся накрытием для Y, т.е. существует непрерывное отображение $p : X \to Y$, что для любого $y \in Y$ множество $\{p^{-1}(y)\}$ дискретно в X.

Предположим, что для заданного двупараметрического семейства отображений

$$g(.,u,w) : Y \to Y, \quad u \in [-\overline{u}, \overline{u}] = U, \quad w \in [0, \overline{w}] \tag{3.1}$$

существует двупараметрическое отображение

$$G(.,u,w): X \to X, \quad u \in [-\overline{u},\overline{u}] = U, \quad w \in [0,\overline{w}], \tag{3.2}$$

являющееся накрывающим для семейства отображений $g(.,u,w)$, т.е. выполнено соотношение $g(.,u,w)\circ p = p \circ G(.,u,w)$.

Ниже мы наложим на функции $G(x,u,w)$ вида (3.2) некоторые дополнительные условия. Эти условия обобщают свойства функции $G(x,u,w) = A(w)x + bu$, где $A(w) = E + wJ$, рассмотренной в разделе 2.1, (см. формулы (2.3), (2.4), (2.5)), на некоторый класс функций, которые мы будем называть квазилинейными. Таким образом, будем считать, что для семейства отображений $G(.,u,w)$ выполнено следующее

Предположение G_{uw}.

1. Для функции $G(.,u,w), x \in X$ справедливо представление

$$G(x,u,w) = F_{00}(x) + uF_{01}(x) + wF_{10}(x) + o_x(u,w), \tag{3.3}$$

где $F_{00}(x), F_{01}(x), F_{10}(x)$ — некоторые гладкие функции, заданные на множестве X. Очевидно

$$F_{00}(x) = G(x,0,0), \quad F_{01}(x) = \underset{.}{G}u(x,0,0), \quad F_{10}(x) = \underset{.}{G}w(x,0,0).$$

Значения параметров u и w предполагаются находящимися в следующих пределах: $|u| \le \overline{u}$, $0 \le w \le \overline{w}$.

2. Для любых $w \neq 0$ отображение $\hat{G}(.,w) = G(.,0,w)$ является гиперболическим, а для $w = 0$ — нейтральным, см. [7, 8].

Пусть имеется некоторая последовательность $w_n \to 0$ при $n \to \infty$, где для любого n выполнено неравенство $0 < w_n < \overline{w}$. При фиксированном значении параметра u образуем нестационарные однопараметрические семейства

$$g(.,u,w_n): Y \to Y, \quad u \in U, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{3.4}$$

и

$$G(.,u,w_n): X \to X, \quad u \in U, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{3.5}$$

Первое семейство отображений определяет нестационарную динамическую систему управления (ДСУ) в ПС Y

$$y_{n+1} = g(y_n,u_n,w_n), \quad y_n \in Y, \quad u_n \in U, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{3.6}$$

где y_n — состояние системы в момент времени n, u_n — значения, управляющие движением, w_n — значения, характеризующие степень вырождения системы управления. Второе семейство отображений определяет нестационарную ДСУ в ПС X.

$$x_{n+1} = G(x_n, u_n, w_n), \quad x_n \in X, \quad u_n \in U, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.7}$$

где x_n — состояние системы в момент времени n, остальные параметры — те же.

Положим значение $u = 0$ и обозначим

$$\begin{gathered} \hat{g}(., w) := g(., 0, w) : Y \to Y, \\ \hat{G}_{(}., w) := G(., 0, w) : X \to X. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Функции $\hat{G}(x, w)$ обобщают свойства функции $A(w)x$, где $A(w)$ — гиперболическая матрица (2.3), рассмотренная в разделе 2.1. Поэтому отображения $\hat{G}(, w) : X \to X$ будем называть квазилинейными гиперболическими отображениями.

Отображения $\hat{g}(., w_n) : Y \to Y$ и $\hat{G}_{(}., w_n) : X \to X$, $n = 1, 2, \ldots$ назовем последовательностями основных отображений соответственно для исходной и поднятой систем. Отображениям $\hat{g}(., w)$ и $\hat{G}(., w)$ соответствуют нестационарные динамические системы

$$y_{n+1} = \hat{g}(y_n, w_n), \quad y_n \in Y, \quad u_n \in U, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.9}$$

и

$$x_{n+1} = \hat{G}(x_n, w_n), \quad x_n \in X, \quad u_n \in U, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

Будем считать, что для последовательности поднятых основных отображений $\hat{G}(., w_n) : X \to X$, $n = 1, 2, \ldots$ выполнено

Предположение $\hat{G}_w$.

Для семейства поднятых основных отображений $\hat{G}(., w)$, $w > 0$ выполнены следующие условия.

1. Существует независящее от параметра $w > 0$ разложение семейства касательных пространств в прямую сумму, т.е.

$$T_x X = E_x^+ \oplus E_x^-, \quad x \in X, \tag{3.11}$$

где $\dim E_x^+ = d$, $\dim E_x^- = d - k$, и для последовательности $w_n > 0$, задающей ДСУ (3.7), справедливы условия инвариантности

$$D\hat{G}(x_n, w_n) E_{x_n}^{\pm} = E_{x_{n+1}}^{\pm}, \quad x_{n+1} = \hat{G}(x_n, w_n). \tag{3.12}$$

2. Для любого x сужение $D^+\hat{G}(x, w_n)$ отображения $D\hat{G}(x, w_n)$ на подпространство E_x^+ действует как растяжение, сужение $D^-\hat{G}(x, w_n)$ отображения $D\hat{G}(x, w_n)$ на подпространство E_x^- действует как сжатие. Более точно, существуют последовательности $\lambda_n^+ > 0, \lambda_n^- > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (коэффициенты нестационарной гиперболичности), зависящие от последовательности w_n, и число $c > 0$, что

$$\begin{aligned} |D^+\hat{G}^{-1}(x_n, w_n)a| &\le ce^{-\lambda_n^+}|a|, \quad a \in E_{x_n}^+, \\ |D^-\hat{G}(x_n, w_n)b| &\le ce^{-\lambda_n^-}|b|, \quad b \in E_{x_n}^-. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3. Пусть $W^u(x_0)$ — неустойчивое многообразие отображения $\hat{G}(., w) : X \to X$, проходящее через произвольную точку $x_0 \in X$. Проекция этого неустойчивого многообразия всюду плотна в пространстве $Y = p(X)$.

Замечание 1 *Из предположения $\hat{G}_w$.3 вытекает, что существует число $V > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in X$ и любого множества достижимости $M \subset X$ из этой точки, такого что $\mathrm{Vol}(M) \ge V$, следует, что $p(M) = Y$.*

Замечание 2 *В том случае, если последовательность исходных основных отображений $\hat{g}(., w_n)$ является последовательностью гиперболических отображений, строить поднятую последовательность $\hat{G}(., w_n)$ нет необходимости, так как пересчет объемов множеств достижимости легко осуществить в исходном пространстве состояний.*

Замечание 3 *В формуле (3.11) разложение касательных пространств не зависит от последовательности w_n. Это обстоятельство накладывает определенные условия на семейство функций $\hat{G}(., w_n)$. В силу гиперболичности отображений $\hat{G}(., w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ существуют два семейства многообразий $W_x^+(n)$, $W_x^-(n)$, $x \in X$, что $T_xW_x^+(n) = E_x^+$, $T_xW_x^-(n) = E_x^-$ для любого $x \in X$. Следовательно, семейства $\{W_x^+(n)\}_{x\in X}$ и $\{W_x^-(n)_{x\in X}$ на самом деле не зависят от n.*

При малых значениях параметра $\overline{u}$ (уровня локальных управлений) семейства отображений (3.4) и (3.5) являются локальными семействами отображений. Системы (3.6) и (3.7) можно интерпретировать как локальные системы управления вдоль траекторий систем (3.9) и (3.9). Локальные свойства систем (3.6) и (3.7) одинаковы. В частности, величины, участвующие в определении локальной управляемости, можно считать одинаковыми для этих систем.

Теперь рассмотрим достаточные условия локальной управляемости для ДСУ (3.7), которые обобщают достаточные условия локальной управляемости (2.14), данные для линейной ДСУ (2.7), на случай произвольных ДСУ из рассматриваемого класса. Пусть $C(w, x)$ — матрица локальной управляемости (введена в работе [7] формулой вида (4.3)). Она построена по функции $G(x, u, w)$ и ее производным по параметрам x и u. Рассмотрим эллипсоид локальной управляемости $Ell_x(w)$ (обобщает формулу (2.10))

$$Ell_x(w) = \{h | h^*[C(x, w)C^*(x, w)]^{-1}h \leq 1, h \in \mathbb{R}^d\}, \tag{3.14}$$

который аппроксимирует в линейном приближении множество локальной достижимости из точки $x \in X$. Пусть $Ell_x^+(w)$ — проекция эллипсоида $Ell_x(w)$ на неустойчивое направление E_x^+, $Ell^\perp(w)$ — проекцию эллипсоида $Ell_x(w)$ на перпендикулярное направление $E_x^\perp$. Обозначим

$$s_x^+(w) = \mathrm{Vol}^k(Ell_x^+(w)), \quad s_x^\perp(w) = \mathrm{Vol}^{d-k}(Ell_x^\perp(w)) \tag{3.15}$$

соответственно k-мерный объем проекции эллипсоида локальной управляемости и $d-k$-мерный объем проекции эллипсоида локальной управляемости. Относительно локальной управляемости принято предположение, что выполнены достаточные условия равномерной по параметру w локальной управляемости.

Предположение L**.** *Существуют постоянные* $\underline{s}^+ > 0, \underline{s}^\perp > 0$*, что при любых* $x \in X$*,* $w \in [0, \overline{w}]$ *для объемов* $s_x^+(w)$*,* $s_x^\perp(w)$ *выполнены неравенства*

$$s_x^+(w) \geq \underline{s}^+, \quad s_x^\perp(w) \geq \underline{s}^\perp. \tag{3.16}$$

Существуют постоянные $\overline{s}^+ > 0, \overline{s}^\perp > 0$*, что при любых* $x \in X$*,* $w \in [0, \overline{w}]$ *для объемов* $s_x^+(w)$*,* $s_x^\perp(w)$ *выполнены неравенства*

$$s_x^+(w) \leq \overline{s}^+, \quad s_x^\perp(w) \leq \overline{s}^\perp. \tag{3.17}$$

Из предположения L следует, что для любой последовательности $w_n \to 0$ выполнены неравенства

$$\underline{s}^\perp \leq s_x^\perp(w_n) \leq \overline{s}^\perp, \quad \underline{s}^+ \leq s_x^\perp(w_n) \leq \overline{s}^+.$$

Далее мы будем рассматривать ДСУ (3.6), заданную в ПС Y, для которой существует поднятая система (3.7), заданная в ПС X. В следующих разделах будут получены оценки времени управления системой при различных предположениях о скорости сходимости последовательностей w_n. Условия (3.16) используются для получения оценок сверху, условия (3.17) используются для получения оценок снизу.

4 Характеризация хаоса с помощью коэффициентов нестационарной гиперболичности

Мы будем рассматривать различные виды последовательностей λ_n^+, λ_n^-, введенных в формуле (3.13). Им соответствуют различные виды хаоса. Для образования хаоса существенны лишь коэффициенты λ_n^+.

4.1 Виды хаоса

1. Суперхаос
$$\lambda_n^+ \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{4.1}$$

   Замечание 4 *Можно рассматривать некоторые ослабления условия (4.1). Например, пусть для любого n выполнено неравенство $0 < \underline{C}^+ \leq \lambda_n^+$ и существует подпоследовательность $\lambda_{n_k}^+ \to \infty$ при $k \to \infty$.*

2. Обычный хаос
$$0 < \underline{C}^+ \leq \lambda_n^+ \leq \overline{C}^+ < \infty, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{4.2}$$

   В частности, для гиперболических систем для любых n $\lambda_n^+ = const$. Этот вид хаоса был исследован в работах [7, 8].

3. Умеренный хаос.
$$\frac{\underline{C}^+}{n^\gamma} \leq \lambda_n^+ \leq \frac{\overline{C}^+}{n^\gamma}, \quad n > N, \tag{4.3}$$

   для некоторого $N > 0$, где постоянная $\gamma \in (0, 1)$, постоянные $\underline{C}^+ > 0, \overline{C}^+ > 0$.

4. Слабый хаос.
$$\frac{\underline{\alpha} \ln n + \underline{c}}{n} \leq \lambda_n^+, \quad n > N > 0, \tag{4.4}$$

   где $\underline{\alpha} > 0$, $\underline{c} > 0$.

5. Очень слабый хаос.
$$\frac{\underline{\alpha} \ln(\ln n)}{n} \leq \lambda_n^+, \quad n > N > 0, \tag{4.5}$$

   где $\underline{\alpha} > 0$.

6. Отсутствие хаоса.

$$\frac{\underline{C}^+}{n} \leq \lambda_n^+, \quad n > N > 0. \tag{4.6}$$

Условие (4.6) является предельным случаем условия (4.3) при $\gamma = 1$.

5 Характеризация хаоса с помощью коэффициентов разбегания траекторий

Виды последовательностей $\lambda_n^+ > 0, \lambda_n^- > 0$ из формулы (3.13), веденные в разделе 4, могут характеризовать виды хаоса, возникающего в системе управления. В этом разделе мы рассмотрим характеризацию хаоса с помощью некоторых других последовательностей, а именно коэффициентов разбегания траекторий.

Свойство разбегания траекторий мы сформулируем с терминах дифференциалов $D\hat{G}(x_n, w_n)$ последовательности основных поднятых отображений $\hat{G}(., w_n)$, введенных по формулам (3.8). Так как в силу первого предположения G_{uw} основное отображение $\hat{G}(., 0)$ является нейтральным, то собственные числа матрицы $D\hat{G}(x_n, w_n)$ стремятся по модулю к единице при $n \to \infty$.

Для получения оценок сверху для времени управления введем следующие обозначения. Пусть

$$\underline{\rho}^+(n) = \inf_{x \in X} \ln|\det D^+\hat{G}(x, w_n)|, \quad \underline{\rho}^-(n) = -\inf_{x \in X} \ln|\det D^-\hat{G}(x, w_n)|, \tag{5.1}$$

где $D^{\pm}\hat{G}(x_n, w_n) = D\hat{G}(x_n, w_n)|_{E^{\pm}_{x_n}}$. Величину $\underline{\rho}^+(n)$ будем называть нижним коэффициентом разбегания траекторий. Величина $e^{\underline{\rho}^+(n)}$ является оценкой снизу коэффициента растяжения в неустойчивом направлении. Аналогично, величину $\underline{\rho}^-(n)$ будем называть нижним коэффициентом сбегания траекторий. Величина $e^{-\underline{\rho}^-(n)}$ является оценкой снизу коэффициента сжатия в устойчивом направлении.

Для получения оценок снизу для времени управления введем следующие обозначения. Пусть

$$\overline{\rho}^+(n) = \sup_{x \in X} \ln|\det D^+\hat{G}(x, w_n)|, \quad \overline{\rho}^-(n) = -\sup_{x \in X} \ln|\det D^-\hat{G}(x, w_n)|. \tag{5.2}$$

Величину $\overline{\rho}^+(n)$ будем называть верхним коэффициентом разбегания траекторий. Величина $e^{\overline{\rho}^+(n)}$ является оценкой сверху коэффициента растяжения в неустойчивом направлении. Аналогично, величину $\overline{\rho}^-(n)$ будем называть верхним коэффициентом сбегания траекторий. величина $e^{-\overline{\rho}^-(n)}$ является оценкой сверху коэффициента сжатия в устойчивом направлении.

Из дальнейшего будет видно, что характеристики системы в основном зависят от вида последовательностей $\underline{\rho}^+(n), \overline{\rho}^+(n)$ и мало зависят от последовательностей $\underline{\rho}^-(n), \overline{\rho}^-(n)$. Поэтому ниже мы введем характеристики хаотичности системы лишь в зависимости от первой пары последовательностей.

Замечание 5 *Далее мы будем рассматривать, в основном, лишь малые коэффициенты растяжения и сжатия, т.е. будем считать, что выполнены условия:* $\underline{\rho}^+(n) \to 0$, $\underline{\rho}^-(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где для любых* n $\underline{\rho}^+(n) > 0, \underline{\rho}^-(n) > 0$. *При выполнении этого предположения выполнены соотношения:* $e^{\underline{\rho}^+(n)} \sim 1 + \underline{\rho}^+(n)$, $e^{-\underline{\rho}^-(n)} \sim 1 - \underline{\rho}^+(n)$.

Аналогично пусть выполнены условия: $\overline{\rho}^+(n) \to 0$, $\overline{\rho}^-(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где для любых* n $\overline{\rho}^+(n) > 0, \overline{\rho}^-(n) > 0$. *При выполнении этого предположения выполнены соотношения:* $e^{\overline{\rho}^+(n)} \sim 1 + \overline{\rho}^+(n)$, $e^{-\overline{\rho}^-(n)} \sim 1 - \overline{\rho}^+(n)$.

Замечание 6 *Для величин* $\xi^\pm(n) \to 0$ *из раздела 2.2 выполнены соотношения* $\xi^\pm(n) \sim \underline{\rho}^\pm(n)$, $\xi^\pm(n) \sim \overline{\rho}^\pm(n)$.

Замечание 7 *Очевидно, в силу формулы (3.13) при* $c = 1$ *для любого* x *выполнено неравенство* $|\det D^+\hat{G}(x, w_n)| \le e^{-\lambda_n^-(d-k)}$. *Поэтому выполнены неравенства* $\lambda_n^-(d-k) \le \overline{\rho}^-(n) \le \underline{\rho}^-(n)$. *Аналогично можно получить, что* $|\det D^-\hat{G}(x, w_n)|^{-1} \le e^{-\lambda_n^+(d-k)}$, *откуда следует, что* $\lambda_n^+ k \le \underline{\rho}^+(n) \le \overline{\rho}^+(n)$.

5.1 Виды хаоса

Мы будем рассматривать различные виды последовательностей $\underline{\rho}_n^+$, $\overline{\rho}_n^+$ которые соответствуют различным видам хаоса.

1. Суперхаос
$$\underline{\rho}^+(n) \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{5.3}$$
Следовательно, $\overline{\rho}^+(n) \to \infty$.

2. Обычный хаос
$$0 < \underline{C}^+ \le \underline{\rho}^+(n) \le \overline{\rho}^+(n) \le \overline{C}^+ < \infty, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{5.4}$$
В частности, для гиперболических систем для любых n $\underline{\rho}^-(n) = const$, $\overline{\rho}^+(n) = const$. Этот вид хаоса был исследован в работах [7, 8].

3. Умеренный хаос.

$$\frac{\underline{C}^+}{n^\gamma} \le \underline{\rho}^+(n) \le \overline{\rho}^+(n) \le \frac{\overline{C}^+}{n^\gamma}, \quad n > N \tag{5.5}$$

для некоторого $N > 0$, где постоянная $\gamma \in (0,1)$, постоянные $\underline{C}^+ > 0, \overline{C}^+ > 0$. Таким образом, последовательности $\underline{\rho}^+(n)$, $\underline{\rho}^-(n)$ сходятся к нулю со степенной скоростью.

Для получения более точных оценок могут быть использованы условия вида

$$\frac{\underline{C}^-}{n^\gamma} \le \underline{\rho}^-(n) \le \overline{\rho}^-(n) \le \frac{\overline{C}^-}{n^\gamma}, \quad n > N. \tag{5.6}$$

4. Слабый хаос.

$$\frac{\underline{\alpha} \ln n + \underline{c}}{n} \le \underline{\rho}^+(n) \le \overline{\rho}^+(n) \le \frac{\overline{\alpha} \ln n + \overline{c}}{n}, \quad n > N, \tag{5.7}$$

где $\underline{\alpha} > 0, \overline{\alpha} > 0$, $\underline{c} > 0, \overline{c} > 0$.

5. Очень слабый хаос.

$$\frac{\underline{\alpha} \ln(\ln n)}{n} \le \underline{\rho}^+(n) \le \overline{\rho}^+(n) \le \frac{\overline{\alpha} \ln(\ln n)}{n}, \quad n > N, \tag{5.8}$$

где $\underline{\alpha} > 0, \overline{\alpha} > 0$.

6. Отсутствие хаоса.

$$\frac{\underline{C}^+}{n} \le \underline{\rho}^+(n) \le \overline{\rho}^+(n) \le \frac{\overline{C}^+}{n}, \quad n > N. \tag{5.9}$$

Условие (5.9) является предельным случаем условия (5.5) при $\gamma = 1$.

6 Оценки сверху времени управления с помощью коэффициентов разбегания траекторий

В этом разделе мы получим оценки сверху времени управления системами, имеющими различные виды хаоса.

Определение 1 *Динамическая система управления (3.9) называется управляемой из точки $x_0 \in X$ в точку $x_* \in X$, если существует число $T = T(x_0, x_*)$ (время управления) и последовательность управлений $u_0, u_1, \ldots, u_T$, что в силу системы (3.9) $x_* = x_T$.*

Динамическая система управления (3.9) называется полностью глобально управляемой на множестве X, если свойство управляемости выполнено для любой пары точек $x_0, x_* \in X$.

Определение 2 *Число $\overline{T}(\overline{u})$ будем называть оценкой сверху времени управления системой при уровне локальных управлений $\overline{u}$, если для любой пары точек $x_0, x_* \in X$ выполнено условие $T(x_0, x_*) \leq \overline{T}(\overline{u})$, где число $T(x_0, x_*)$ указано в определении 1.*

Оценки будут доказаны для случая умеренного хаоса. Оценки в остальных случаях доказываются аналогично.

6.1 Вспомогательное утверждение

В этом разделе мы сформулируем утверждение об асимптотической эквивалентности сумм и интегралов от монотонных функций. Мы далее воспользуемся тем, что интегралы проще вычислить.

Лемма 1 *Пусть при $0 < x < \infty$ задана монотонно убывающая функция f. Обозначим для любых натуральных m, n, $m < n$*

$$A_m^n = \sum_{j=m}^{n} f(j), \quad I_m^n = \int_m^n f(x)dx.$$

Тогда справедливы неравенства

$$A_m^n + f(n+1) - f(m) \leq I_m^{n+1} \leq A_m^n. \tag{6.1}$$

Доказательство. Для интеграла I_m^{n+1} справедлива оценка сверху

$$I_m^{n+1} = \int_m^{n+1} f(x)dx = \sum_{j=m}^{n} \int_j^{j+1} f(x)dx \leq \sum_{j=m}^{n} f(j) = A_m^n.$$

Аналогично справедлива оценка снизу

$$I_m^{n+1} = \int_m^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{j=m+1}^{n+1} f(j) = A_m^n + f(n+1) - f(m).$$

Лемма 1 доказана.

6.2 Оценки сверху времени управления (умеренный хаос)

Справедлива

Теорема 1 *Пусть для системы (3.6) выполнены следующие условия.*

1. Существует поднятая система (3.7), которая задается функцией G, удовлетворяющей предположениям G_{uw}, $\hat{G}_w$ и L.

2. Дифференциал семейства основных отображений удовлетворяет левой части неравенству (5.5) , т.е. для достаточно больших значений n для нижнего коэффициента $\underline{\rho}^+(n)$ разбегания траекторий выполнено условие

$$\frac{\underline{C}^+}{n^\gamma} \leq \underline{\rho}^+(n), \quad 0 < \gamma < 1, \quad n > N.$$

Тогда имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка сверху на время управления

$$\overline{T}(\overline{u}) = \left[\frac{1-\gamma}{\underline{C}^+} \ln \frac{R}{\underline{l}\overline{u}^d}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1, \tag{6.2}$$

где $R = V^{1/d}$, величина V характеризует объем пространства состояний системы (3.9) и вводится в замечании 1 к предположению $\hat{G}_w$ (условие 3), $\overline{u}$ — уровень значений допустимых локальных управлений, $\underline{l} = (\underline{s})^{1/d}$, величина $\underline{s}$ (с точностью до нормировочного множителя) дает оценку снизу объема эллипсоида локальной управляемости.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим итерации множеств достижимости поднятой системы (3.7), заданной функцией $G(x, u, w)$ вида (3.2), где $x \in X$, $u \in U = [-\overline{u}, \overline{u}]$, $w \in (0, \overline{w})$. Нестационарность поднятой системы определяется последовательностью $w_n, n = 1, 2, \ldots$. Под действием управлений, принимающих значения из множества U, будем рассматривать рекуррентную последовательность множеств достижимости, где каждое последующее множество получаются из предыдущего в силу системы (3.7) за один такт, состоящий из d шагов. Пусть x_0 — некоторая начальная точка и M_1 — начальное множество достижимости из этой точки за один такт (d шагов). Пусть далее M_1^+ — проекция начального множества M_1 в неустойчивое многообразие $W^u(x_1)$, где $x_1 = G^d(x_0, 0, 0)$. Обозначим для множества M_1^+ его k-мерный объем v_1^+. Очевидно, $v_1^+ \geq \underline{s}^+\overline{u}^k$.

Оценим снизу k-мерные объемы v_n^+ множеств $M_{n+1}^+ = \hat{G}^d(M_n^+, w_n)$ при нулевых локальных управлениях, где функция $\hat{G}^d(., w) = G^d(., 0, w)$, значение $G^d(x, 0, w)$ — образ точки x за d шагов. Обозначим $\underline{\kappa}^+(n) = e^{\underline{\rho}^+(n)d}$, где величина $\underline{\rho}^+(n)$ определена формулой (5.1). Вдоль положительных (растягивающих) направлений справедлива следующая оценка приращений объемов:

$$v_{n+1}^+ \geq [\underline{\kappa}^+(n)]v_n^+, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6.3}$$

Поэтому

$$v_{n+1}^+ \geq \left[\underline{\kappa}^+(1) \cdots \underline{\kappa}^+(n)\right] v_1^+.$$

В последней формуле при $1 \leq i \leq N$ сомножители $\underline{\kappa}^+(i) \geq 1$ заменим на единицу, при этом последнее неравенство усилится, а именно при $n > N$ будем иметь

$$v_{n+1}^+ \geq \left[\underline{\kappa}^+(N+1) \cdots \underline{\kappa}^+(n)\right] v_1^+.$$

Для выражения в скобках имеется представление

$$\underline{\kappa}^+(N+1) \cdots \underline{\kappa}^+(n) = \exp(\underline{\rho}^+(N+1)d + \cdots + \underline{\rho}^+(n)d).$$

Далее для получения оценок мы будем использовать, что величины $\underline{\rho}^+(n)$ удовлетворяют первому неравенству (5.5) при $n > N$. На основании формулы (6.1) имеем, что

$$\underline{\rho}^+(N+1) + \cdots + \underline{\rho}^+(n) \geq \underline{C}^+ \sum_{j=N+1}^{n} \frac{1}{j^\gamma} \geq \underline{C}^+ \int_{N+1}^{n+1} \frac{1}{x^\gamma} dx =$$
$$\frac{\underline{C}^+}{1-\gamma}\left((n+1)^{1-\gamma} - (N+1)^{1-\gamma}\right). \tag{6.4}$$

Следовательно,

$$\exp(\underline{\rho}^+(N+1)d + \cdots + \underline{\rho}^+(n)d) \geq$$
$$\exp\left(\frac{\underline{C}^+ d}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right) \exp\left(-\frac{\underline{C}^+ d}{1-\gamma}(N+1)^{1-\gamma}\right).$$

Таким образом, имеем асимптотическое неравенство

$$v_{n+1}^{+} \gtrsim \exp\left(\frac{\underline{C}^{+}d}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(-\frac{\underline{C}^{+}d}{1-\gamma}(N+1)^{1-\gamma}\right)v_1^{+}, \quad v_1^{+} \geq \underline{s}^{+}u^{k}. \tag{6.5}$$

Пусть M_{n+1} — множество локальной достижимости на шаге с номером $n+1$. Оно может быть аппроксимировано изнутри окаймлением множества M_{n+1}^{+}, т.е. применением к точкам множества M_n^{+} локальных управлений. Обозначим $v_n = \mathrm{Vol}(M_n)$ d-мерный объем множества M_n. Тогда $v_n \geq v_n^{+}v^{\perp}$, где $v^{\perp} = \underline{s}^{\perp}u^{d-k}$. Следовательно,

$$v_{n+1} \gtrsim \exp\left(\frac{\underline{C}^{+}d}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(-\frac{\underline{C}^{+}d}{1-\gamma}(N+1)^{1-\gamma}\right)\underline{s}^{+}\underline{s}^{\perp}\overline{u}^{d}. \tag{6.6}$$

Очевидно, существует значение $\overline{n}$ параметра n, при котором правая часть последнего неравенства превысит любое значение V. Наименьшее значение $\overline{n}$ дается формулой

$$\overline{n} = \left[\frac{1-\gamma}{\underline{C}^{+}d}\ln\frac{V}{\underline{s}\overline{u}^{d}} + (N+1)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1,$$

где $\underline{s} = \underline{s}^{+}\underline{s}^{\perp}$, величины $\underline{s}^{+}, \underline{s}^{\perp}$ характеризуются формулой (3.16) и дают оценки снизу объемов проекций эллипсоида локальной управляемости соответственно на неустойчивое и перпендикулярное к нему направления. При $\overline{u} \to 0$ величина $\overline{n}$ асимптотически совпадает с величиной $\overline{T}(\overline{u})$ из формулы (6.2) и может быть принята в качестве оценки сверху времени управления. Теорема 1 доказана.

Замечание 8 *Незначительной модификацией доказательства теоремы 1 можно доказать ее для случая нестационарных гиперболических в среднем систем, рассмотренных в примере 1 из раздела (2.2). Из неравенства (6.4) следует, что*

$$\hat{\xi}^{+}(n) := \frac{1}{n}(\xi^{+}(1) + \cdots + \xi^{+}(n)) \geq \frac{\underline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{n^{\gamma}}. \tag{6.7}$$

Условие (6.7) может быть принято как условие умеренного хаоса для нестационарных гиперболических в среднем систем. Введем обозначение

$$\underline{\chi}_n^{+} = \frac{\underline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{n^{\gamma}}. \tag{6.8}$$

Тогда для объемов в неустойчивом направлении справедлив следующий вариант формулы (6.5)

$$v_{n+1}^{+} \gtrsim A(\gamma, \underline{C}^{+}, N) \exp\left(n\underline{\chi}_{n}^{+}\right) v_{1}^{+}, \tag{6.9}$$

где $A(\gamma, \underline{C}^{+}, N) = \exp\left(-N\underline{\chi}_{N}^{+}\right)$. *Величина* $\underline{\chi}_{n}^{+}$ *характеризует экспоненциальную скорость роста объемов в неустойчивом направлении для нестационарных отображений и она имеет тот же порядок, что величина* $\underline{\rho}^{+}(n)$ *из формулы (5.5), которая характеризует скорость вырождения коэффициента растяжения. Мы будем говорить, что величина* $\underline{\chi}_{n}^{+}$ *имеет степенной тип* $(\underline{C}^{+}, \gamma)$. *Величина* $\underline{\chi}_{n}^{+}$ *играет ту же роль для систем рассматриваемого класса, что величина* $\underline{\chi}^{+} = \min_{x \in X} \ln|\det D^{+}F(x)|$ *для гиперболического отображения* F ($\det D^{+}F(x)$ *— якобиан в неустойчивом направлении), которая характеризует снизу экспоненциальную скорость роста объемов в неустойчивом направлении для гиперболического отображения* F.

Замечание 9 *Для получения оценок мы не использовали правое неравенство (5.5). При использовании этого неравенства можно получить незначительное улучшение оценки сверху, при этом доказательства становятся более громоздкими.*

7 Характеризация хаоса как степень роста объемов в неустойчивом направлении

В этом разделе мы дадим еще одну характеризацию хаоса.

Как известно, скорость роста относительного объема в неустойчивом направлении является одной из характеристик степени хаотичности системы. Например, в работах [11, 10] рассматривалась экспоненциальная скорость роста относительного объема. Обычно рассматривают постоянную экспоненциальную скорость роста. Такой хаос можно назвать обычным.

Рассмотрим ДСУ (3.6), заданную в ПС Y, для которой существует поднятая система (3.7), заданная в ПС X. Снова рассмотрим итерации $M_{n+1}^{+} = \hat{G}(M_{n}^{+}, w_{n})$, где M_{1}^{+} — проекция некоторого начального множества M_1 на неустойчивое направ- ление. Пусть $v_{n}^{+} = \mathrm{Vol}^{+}(M_{n}^{+})$ — k-мерные объемы множеств M_{n}^{+}.

Принимая во внимание формулу (6.9), определим величины, характеризующие экспоненциальные скорости роста относительного объема. Будем считать, что величины $\underline{\chi}_n^+$ и $\overline{\chi}_n^+$ определяется соотношениями

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\underline{\chi}_n^+}\frac{\ln\frac{v_n^+}{v_1^+}}{n}=1,\quad \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\overline{\chi}_n^+}\frac{\ln\frac{v_n^+}{v_1^+}}{n}=1. \tag{7.1}$$

Из формулы (7.1) следует, что для любого n

$$e^{n\underline{\chi}_n^+}v_1^+\le v_n^+\le e^{n\overline{\chi}_n^+}v_1^+. \tag{7.2}$$

Далее мы будем рассматривать различные виды последовательностей $\underline{\chi}_n^+$, $\overline{\chi}_n^+$ которые соответствуют различным видам хаоса.

1. Суперхаос
$$\underline{\chi}_n^+\to\infty,\quad \overline{\chi}_n^+\to\infty,\quad n\to\infty. \tag{7.3}$$

2. Обычный хаос
$$0<\underline{D}_1^+\le\underline{\chi}_n^+\le\underline{D}_2^+<\infty,\quad 0<\overline{D}_1^+\le\overline{\chi}_n^+\le\overline{D}_2^+<\infty. \tag{7.4}$$
В частности, для гиперболических систем для любых n $\underline{\chi}_n^+=\overline{\chi}_n^+=const$. Этот вид хаоса был исследован в работах [7, 8].

3. Умеренный хаос.
$$\frac{\underline{D}^+}{n^\gamma}\le\underline{\chi}^+(n)\le\overline{\chi}^+(n)\le\frac{\overline{D}^+}{n^\gamma}, \tag{7.5}$$
где постоянная $\gamma\in(0,1)$, постоянные $\underline{D}^+>0,\overline{D}^+>0$. Таким образом, последовательности $\underline{\chi}^+(n)$, $\underline{\chi}^-(n)$ сходятся к нулю со степенной скоростью.

   Для получения более точных оценок могут быть использованы условия вида
$$\frac{\underline{D}^-}{n^\gamma}\le\underline{\chi}^-(n)\le\overline{\chi}^-(n)\le\frac{\overline{D}^-}{n^\gamma}. \tag{7.6}$$

4. Слабый хаос.
$$\frac{\underline{\alpha}\ln n+\underline{c}}{n}\le\underline{\chi}_n^+\le\overline{\chi}_n^+\le\frac{\overline{\alpha}\ln n+\overline{c}}{n}, \tag{7.7}$$
где $\underline{\alpha}>0,\overline{\alpha}>0$, $\underline{c}>0,\overline{c}>0$.

5. Очень слабый хаос.
$$\frac{\underline{\alpha}\ln(\ln n)}{n} \le \underline{\chi}_n^+ \le \overline{\chi}_n^+ \le \frac{\overline{\alpha}\ln(\ln n)}{n}, \tag{7.8}$$
где $\underline{\alpha} > 0, \overline{\alpha} > 0$.

6. Отсутствие хаоса.
$$\frac{\underline{D}^+}{n} \le \underline{\chi}_n^+ \le \overline{\chi}_n^+ \le \frac{\overline{D}^+}{n}. \tag{7.9}$$
Условие (7.9) является предельным случаем условия (7.5) при $\gamma = 1$.

8 Оценки сверху времени управления на основе скорости роста объемов

Пусть x_0 — некоторая начальная точка и M_1 — множество достижимости из этой точки за один такт. Пусть M_1^+ — проекция множества M_1 на неустойчивое многообразие и $M_{n+1}^+ = \hat{G}^d(M_n^+, w_n)$ — итерации множества M_1^+. Пусть $v_n^+ = \mathrm{Vol}^+(M_n^+)$ — k-мерные объемы. Множества M_n как и ранее аппроксимируются с недостатком окаймлением множеств M_n^+ под действием локальных управлений.

Оценки сверху мы будем получать, используя левую часть условия (7.2), т.е. неравенство $e^{n\underline{\chi}_n^+}v_1^+ \le v_n^+$, из которого в результате окаймления получаем неравенство
$$e^{nd\underline{\chi}_n^+}v_1 \le v_n. \tag{8.1}$$

Объем v_1 начального множества M_1 локальной достижимости больше величины $\underline{s}\overline{u}^d$, где $\underline{s}$ — оценка снизу объема эллипсоида локальной управляемости (нормировочный множитель принимаем равным единице).

8.1 Оценки сверху времени управления (суперхаос)

Рассмотрим для примера один частный случай для величины $\underline{\chi}_n$.

Теорема 2 *Пусть $\underline{\chi}_n^+ = D^+n^\gamma$, $\gamma > 0$. Тогда имеется следующая оценка сверху на время управления*
$$\overline{T}(\overline{u}) = \left(\frac{1}{D^+}\ln\frac{R}{\underline{l}\overline{u}}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \tag{8.2}$$
где $R = V^{1/d}$, $\underline{l} = (\underline{s})^{1/d}$, $\underline{u}$ — уровень локальных управлений.

Доказательство теоремы 2. Так как $v_1 = \underline{s}\overline{u}^d$, то используя неравенство (8.1), получим, что $v_n \geq e^{dD^+ n^{1+\gamma}} v_1$. Из равенства $v_n = V$ получим, что $n \leq \overline{T}(\overline{u}) := \left(\frac{1}{D^+ d} \ln \frac{V}{\underline{s}\overline{u}^d}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$. Теорема 2 доказана.

8.2 Оценки сверху времени управления (обычный хаос)

Теорема 3 *Пусть $\underline{\chi}_n^+ \geq \underline{D}^+$. Тогда имеется следующая оценка сверху на время управления*

$$\overline{T}(\overline{u}) = \frac{1}{\underline{D}^+} \ln \frac{R}{\underline{l}\overline{u}}, \tag{8.3}$$

где значения всех параметров прежние.

Доказательство теоремы 3. Так как $v_1 = \underline{s}\overline{u}^d$, то используя неравенство (8.1), получим, что $v_n \geq e^{n\underline{D}^+ d} v_1$. Из равенства $v_n = V$ получим, что $n \leq \overline{T}(\overline{u}) := \frac{1}{\underline{D}^+ d} \ln \frac{V}{\underline{s}\overline{u}^d}$. Теорема 3 доказана.

8.3 Оценки сверху времени управления (умеренный хаос)

Теорема 4 *Пусть $\underline{\chi}_n^+ \geq \underline{D}^+ \frac{1}{n^\gamma}$. Тогда имеется следующая оценка сверху на время управления*

$$\overline{T}(\overline{u}) = \left(\frac{1}{\underline{D}^+} \ln \frac{R}{\underline{l}\overline{u}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \tag{8.4}$$

где значения всех параметров прежние.

Доказательство теоремы 4. Так как $v_1 = \underline{s}\overline{u}^d$, то используя неравенство (8.1), получим, что

$$v_n \geq e^{dn\underline{D}^+ \frac{1}{n^\gamma}} v_1 = e^{\underline{D}^+ n^{1-\gamma}} v_1.$$

Из равенства $v_n = V$ получим, что $n \leq \overline{T}(\overline{u}) := \left(\frac{1}{\underline{D}^+ d} \ln \frac{V}{\underline{s}\overline{u}^d}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$. Теорема 4 доказана.

Замечание 10 *Формулы (8.2), (8.3), (8.4) дают однотипные оценки времени управления логарифмического типа. В этом смысле суперхаос и умеренный хаос похожи на обычный хаос.*

8.4 Оценки сверху времени управления (слабый хаос)

Оценка, полученная в следующей теореме, относится к промежуточному случаю при переходе от умеренного хаоса к слабому.

Теорема 5 *Пусть* $\underline{\chi}_n^+ \geq \frac{\alpha(\ln n)^p}{n}, p > 1$. *Тогда имеется следующая оценка сверху на время управления*

$$\overline{T}(\overline{u}) = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{R}{\underline{l}\overline{u}}\right)^{1/p}, \tag{8.5}$$

где значения всех параметров прежние.

Доказательство теоремы 5. Так как $v_1 = \underline{s}\overline{u}^d$, то используя неравенство (8.1), получим, что

$$v_n \geq e^{nd\underline{\chi}_n^+}v_1 = e^{\alpha d(\ln n)^p}v_1.$$

Из условия $v_n = V$ получим, что

$$n \leq \overline{T}(\overline{u}) := \exp\left(\frac{1}{\alpha d}\ln\frac{V}{v_1}\right)^{1/p}.$$

Эта оценка может быть преобразована к виду (8.5). Теорема 5 доказана.

Теорема 6 *Пусть* $\underline{\chi}_n^+ \geq \frac{\alpha \ln n}{n}$. *Тогда имеется следующая оценка сверху на время управления*

$$\overline{T}(\overline{u}) = \left(\frac{R}{\underline{l}\overline{u}}\right)^{\frac{d}{\alpha}}, \tag{8.6}$$

где значения всех параметров прежние.

Доказательство теоремы 6. Так как $v_1 = \underline{s}\overline{u}^d$, то используя неравенство (8.1), получим, что

$$v_n \geq e^{n\underline{\chi}_n^+}v_1 = e^{\alpha\ln n}v_1 = n^\alpha v_1.$$

Из условия $v_n = V$ получим, что $n \leq \overline{T}(\overline{u}) := \left(\frac{V}{v_1}\right)^{1/\alpha}$. Теорема 6 доказана.

Замечание 11 *Оценка времени управления (8.6) такого же типа, как оценка для нейтральных систем, [8]. Другими словами, учет слабого разбегания траекторий (со скоростью вида (7.7)) не дает уменьшения времени управления.*

8.5 Оценки сверху времени управления (очень слабый хаос)

Теорема 7 *Пусть* $\underline{\chi}_n^+ \geq \frac{\underline{\alpha}\ln(\ln n)}{n}$. *Тогда имеется следующая оценка сверху на время управления*

$$\overline{T}(\overline{u}) = \exp\left(\frac{R}{\underline{l}\overline{u}}\right)^{\frac{d}{\alpha}}, \tag{8.7}$$

где значения всех параметров прежние.

Доказательство теоремы 7. Так как $v_1 = \underline{s}\overline{u}^d$, то используя неравенство (8.1), получим, что

$$v_n \geq e^{n\underline{\chi}_n^+} v_1 = e^{\frac{\underline{\alpha}\ln(\ln n)}{n}} v_1.$$

Из условия $v_n = V$ найдем, что

$$n \leq \exp\left(\frac{V}{v_1}\right)^{1/\alpha}.$$

Теорема 7 доказана.

Замечание 12 *Оценка времени управления (8.7) является оценкой экспоненциального типа, которая значительно хуже оценки для нейтральных систем вида, [8]. Другими словами, в условиях очень слабого хаоса (разбегание траекторий происходит со скоростью вида (7.7)) мы должны применять локальные управления вдоль любых направлений, в том числе и в направлениях разбегания траекторий. Такой способ управления позволяет получить оценки времени управления такие же, как для систем нейтрального типа, т.е. вида (8.6).*

8.6 Оценки сверху времени управления (отсутствие хаоса)

Теорема 8 *Пусть* $\overline{\chi}_n^+ \leq \frac{\overline{D}^+}{n}$. *Тогда последовательность объемов* v_n *множеств достижимости* M_n *ограничена.*

Доказательство теоремы 8. Из неравенств (7.2), (7.9) и условия теоремы следует, что

$$v_n \leq e^{n\overline{\chi}_n^+} v_1 \leq e^{\overline{D}^+} v_1, \tag{8.8}$$

откуда следует, что в этом случае нет роста объемов v_n множеств достижимости M_n, $n > 1$.

Замечание 13 *Так как последовательность объемов v_n множеств достижимости M_n ограничена в силу формулы (8.8), то нельзя гарантировать управляемость ДСУ при данной схеме управления. При еще более быстрой скорости сходимости последовательности χ_n^+ также нет роста объемов. Такие случаи мы не будем относить к хаотическим, хотя могут иметься всюду плотные траектории у неуправляемого движения. В том случае, если ни в коком направлении нет сбегания траекторий, этот случай близок к случаю, когда для любого $x \in X$ якобиан основного отображения тождественно равен единице, т.е. к системам нейтрального типа. Для управления системами этого типа следует применять локальные управления вдоль любых направлений. Это позволяет получить оценки времени управления степенного типа, т.е. вида (8.6).*

9 Оценки снизу времени управления

Определение 3 *Число $\underline{T}(x_0)$ называется оценкой снизу для времени управления из точки $x_0 \in X$, если существует точка $x_* \in X$, такая что время управления $T(x_0, x_*) \geq \underline{T}(x_0)$. Число $\underline{T} = \min_{x_0 \in X} \underline{T}(x_0)$ называется равномерной оценкой снизу времени управления на множестве X.*

Оценки снизу времени управления как и ранее полученные оценки сверху могут быть охарактеризованы с помощью коэффициентов растяжения, коэффициентов разбегания траекторий и коэффициентов роста объемов. В разделе 9.1 мы получим оценки снизу с помощью коэффициентов разбегания траекторий.

9.1 Оценки снизу времени управления с помощью коэффициентов разбегания траекторий (случай умеренного хаоса)

Теорема 9 *Пусть для системы (3.6) выполнены следующие условия.*

1. Существует поднятая система (3.7), которая задается функцией G, удовлетворяющей предположениям G_{uw}, $\hat{G}_w$ и L.

2. Дифференциал семейства основных отображений удовлетворяет правой части неравенству (5.5) , т.е. для достаточно больших значений n для верхнего коэффициента $\overline{\rho}^+(n)$ разбегания траекторий выполнено условие

$$\frac{\overline{C}^+}{n^\gamma} \leq \overline{\rho}^+(n), \quad 0 < \gamma < 1, \quad n > N.$$

Тогда имеется следующая оценка снизу на время управления

$$\underline{T}(\overline{u}) = \left[\frac{1-\gamma}{\overline{C}^{+}} \ln \frac{R}{\overline{l}\overline{u}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1, \tag{9.1}$$

где $R = V^{1/d}$, величина V характеризует объем пространства состояний системы (3.9) и вводится в замечании 1 к предположению $\hat{G}_w$ (условие 3), $\overline{u}$ — уровень значений допустимых локальных управлений, $\overline{l} = (\overline{s})^{1/d}$, величина $\overline{s}$ (с точностью до нормировочного множителя) дает оценку сверху объема эллипсоида локальной управляемости.

Доказательство теоремы 9. Рассмотрим итерации множеств достижимости поднятой системы (3.7), заданной функцией $G(x, u, w)$ вида (3.2), где $x \in X$, $u \in U = [-\overline{u}, \overline{u}]$, $w \in (0, \overline{w})$. Нестационарность поднятой системы определяется последовательностью $w_n, n = 1, 2, \ldots$. Под действием управлений, принимающих значения из множества U, будем рассматривать рекуррентную последовательность множеств достижимости, где каждое последующее множество получаются из предыдущего в силу системы (3.7) за один такт, состоящий из d шагов. Пусть x_0 — некоторая начальная точка и M_1 — начальное множество достижимости из этой точки за один такт. Пусть далее M_1^+ — проекция начального множества M_1 в неустойчивое многообразие $W^u(x_1)$, где $x_1 = G^d(x_0, 0, 0)$. Обозначим для множества M_1^+ его k-мерный объем v_1^+. Очевидно, $v_1^+ \leq \overline{s}^+ \overline{u}^k$.

Оценим сверху k-мерные объемы v_n^+ множеств $M_{n+1}^+ = \hat{G}^d(M_n^+, w_n)$ при нулевых локальных управлениях, где функция $\hat{G}^d(., w) = G^d(., 0, w)$, значение $G^d(x, 0, w)$ — образ точки x за d шагов. Обозначим $\overline{\kappa}^+(n) = e^{\overline{\rho}^+(n)d}$, где величина $\overline{\rho}^+(n)$ определена формулой (5.2). Вдоль положительных (растягивающих) направлений справедлива следующая оценка приращений объемов:

$$v_{n+1}^+ \leq \overline{\kappa}^+(n) v_n^+ + \overline{s}^+ \overline{u}^k, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9.2}$$

Будем отдельно рассматривать случаи $n \leq N$ и $n > N$. Обозначим

$$\overline{\kappa}_N^+ = \max_{1 \leq i \leq N} \overline{\kappa}(i)^+.$$

Тогда

$$v_{N+1}^+ \leq \overline{\kappa}_N^+ v_N^+ + \overline{s}^+ \overline{u}^k, \quad v_1^+ \leq \overline{s}^+ \overline{u}^k,$$

откуда получаем, что

$$v_{N+1}^+ \leq \frac{(\overline{\kappa}_N^+)^{N+1} - 1}{\overline{\kappa}_N^+ - 1} \overline{s}^+ \overline{u}^k.$$

Далее при $n > N$ имеем

$$v_{n+1}^{+} \leq \overline{\kappa}^{+}(N+1)\cdots\overline{\kappa}^{+}(n)v_{N+1}^{+} +$$
$$\left[\overline{\kappa}^{+}(N+2)\cdots\overline{\kappa}^{+}(n) + \ldots \overline{\kappa}^{+}(n-1)\overline{\kappa}^{+}(n) + \overline{\kappa}^{+}(n) + 1\right] \overline{s}^{+}\overline{u}^{k}. \tag{9.3}$$

Имеется следующее представление для произведений при $m > N$:

$$\overline{\kappa}^{+}(m)\cdots\overline{\kappa}^{+}(n) = \exp(\overline{\rho}^{+}(m) + \cdots + \overline{\rho}^{+}(n)).$$

Далее для получения оценок мы будем использовать, что величины $\overline{\rho}^{+}(n)$ удовлетворяют первому неравенству (7.6) при $n > N$. На основании формулы (6.1) имеем, что

$$\overline{\rho}^{+}(m) + \cdots + \overline{\rho}^{+}(n) \leq \overline{C}^{+}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{j^{\gamma}} \leq \overline{C}^{+}\left(\int_{m}^{n+1}\frac{1}{x^{\gamma}}dx + \frac{1}{m^{\gamma}} - \frac{1}{(n+1)^{\gamma}}\right) =$$
$$\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\left((n+1)^{1-\gamma} - (m)^{1-\gamma} + \frac{1}{m^{\gamma}} - \frac{1}{(n+1)^{\gamma}}\right) \tag{9.4}$$

Следовательно, для любого $m > N$

$$\exp(\overline{\rho}^{+}(m) + \cdots + \overline{\rho}^{+}(n)) \leq$$
$$\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(-\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(m)^{1-\gamma}\right)\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{(N+1)^{\gamma}}\right) \leq$$
$$\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{(N+1)^{\gamma}}\right). \tag{9.5}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (9.4), содержит $n - N - 1$ слагаемое. Учитывая формулы (9.3), (9.4), (9.5), можно получить асимптотическую оценку для величины v_{n}^{+}, а именно

$$v_{n+1}^{+} \lesssim$$
$$\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{(N+1)^{\gamma}}\right)\frac{(\overline{\kappa}_{N}^{+})^{N+1}-1}{\overline{\kappa}_{N}^{+}-1}\overline{s}^{+}\overline{u}^{k} +$$
$$\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{(N+1)^{\gamma}}\right)(n-N-1)\overline{s}^{+}\overline{u}^{k} =$$
$$\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{(N+1)^{\gamma}}\right)$$
$$\left[\frac{(\overline{\kappa}_{N}^{+})^{N+1}-1}{\overline{\kappa}_{N}^{+}-1} + (n-N-1)\right]\overline{s}^{+}\overline{u}^{k}.$$

Аналогично можно получить оценку для объемов вдоль направлений, перпендикулярных к устойчивым направлениям, а именно справедлива следующая оценка приращений объемов:

$$v_{n+1}^{\perp} \le \overline{\kappa}^{-}(n) v_n^{\perp} + \overline{s}^{\perp}\overline{u}^{d-k}, \quad v_1^{\perp} = \overline{s}^{\perp}\overline{u}^{d-k}.$$

Обозначим

$$\overline{\kappa}^{-} = \max_{1 \le i} \overline{\kappa}(i)^{-}.$$

Очевидно, $\overline{\kappa}^{-} < 1$. Тогда

$$v_{n+1}^{\perp} \le \overline{\kappa}^{-} v_n + \overline{s}^{\perp}\overline{u}^{d-k}, \quad v_1^{\perp} \le \overline{s}^{\perp}\overline{u}^{d-k}.$$

Поэтому

$$v_{n+1}^{\perp} \le (1 + \overline{\kappa}^{-} + \dots + (\overline{\kappa}^{-})^n)\overline{s}^{\perp}\overline{u}^{d-k} = \frac{1}{1 - \overline{\kappa}^{-}}\overline{s}^{\perp}\overline{u}^{d-k}.$$

Так как $v_n = v_n^{+} v_n^{\perp}$, то справедлива асимптотическая оценка

$$v_{n+1} \lesssim \exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{(N+1)^{\gamma}}\right)$$
$$\left[\frac{(\overline{\kappa}_N^{+})^{N+1} - 1}{\overline{\kappa}_N^{+} - 1} + (n - N - 1)\right]\frac{1}{1-\overline{\kappa}^{-}}\overline{su}^{d} \tag{9.6}$$
$$\sim \exp\left(\frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\right)\overline{su}^{d}, \tag{9.7}$$

где $\overline{s} = \overline{s}^{+}\overline{s}^{\perp}$. Далее мы учитываем, что для асимптотической оценки второй, третий и четвертый сомножители в формуле (9.6) несущественны. Асимптотическую оценку снизу получаем из условия $v_n = V$. Таким образом,

$$\underline{n} \lesssim \left[\frac{1-\gamma}{\overline{C}^{+}}\ln\frac{V}{\overline{su}^{d}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1.$$

Эту величину примем в качестве оценки снизу $\underline{T}$ из формулы (9.1). Теорема 9 доказана.

Замечание 14 *Обозначим*

$$\overline{\chi}_n^{+} = \frac{\overline{C}^{+}}{1-\gamma}\frac{1}{n^{\gamma}} \tag{9.8}$$

Тогда выражение (9.7) можно переписать следующим образом

$$v_{n+1} \overset{<}{\sim} \exp\left(\overline{\chi}_n^+ n\right) v_1, \quad v_1 = \overline{su}^d. \tag{9.9}$$

Величина $\overline{\chi}_n^+$ характеризует экспоненциальную скорость роста объемов в неустойчивом направлении для нестационарных отображений и она имеет тот же порядок, что величина $\overline{\rho}^+(n)$ из формулы (5.5), которая характеризует скорость вырождения коэффициента растяжения. Мы будем говорить, что величина $\overline{\chi}_n^+$ имеет степенной тип $(\overline{C}^+, \gamma)$.

Величина $\overline{\chi}_n^+$ играет ту же роль, что для гиперболического отображения F величина $\overline{\chi}^+ = \max_{x \in X} \ln|\det D^+F(x)|$, которая характеризует сверху экспоненциальную скорость роста объемов в неустойчивом направлении, где $\det D^+F(x)$ — якобиан в неустойчивом направлении. Величина $\frac{\overline{C}^+}{1-\gamma}$ аналогична энтропии для гиперболических отображений.

Если использовать величины $\overline{\chi}_n^+$, определенные второй формулой (7.1), то для различных видов последовательностей $\overline{\chi}_n^+$, которые соответствуют различным видам хаоса, можно получить оценки снизу времени управления, аналогичные оценкам, полученным в теоремах из раздела 8.

Замечание 15 *Сравнивая оценки сверху и снизу получаем, что при $\underline{C}^- = \overline{C}^+$*

$$\lim_{\overline{u} \to 0} \frac{\overline{T}(\overline{u})}{\underline{T}(\overline{u})} = 1. \tag{9.10}$$

10 Оценки времени управления для случая, когда эллипсоид локальной управляемости не находится в общем положении

Рассмотрим эллипсоид локальной управляемости Ell_x из точки x, определенный формулой (3.14). Пусть $s_x^+(w) = \mathrm{Vol}^k(Ell_x^+(w))$ — k-мерный объем проекции эллипсоида локальной управляемости на неустойчивое направление E_x^+ и $s_x^\perp(w) = \mathrm{Vol}^{d-k}(Ell_x^\perp(w))$ — $d-k$-мерный объем проекции эллипсоида локальной управляемости на направление, перпендикулярное к неустойчивому, где $w \geq 0$. Имея ввиду формулы (2.8) для случая тора, предположим, что функция $G(x, u, w)$ такова, что $s_x^\perp(w)|_{w=0} = 0$ и производная $\frac{d}{dw} s_x^\perp(w)|_{w=+0} = 0 > 0$, т.е. $s_x^\perp(w) \sim (s_x^\perp)'_w(0) w$. Пусть далее существует постоянная $\underline{s}_0^\perp$, что для любого x выполнено неравенство

$$(s_x^\perp)'_w(0) \geq \underline{s}_0^\perp,$$

которое влечет для достаточно малых w выполнение неравенства

$$s_x^{\perp}(w) \geq \underline{s}_0^{\perp} w. \qquad (10.1)$$

Это условие используется далее вместо второго условия (3.16) для получения оценок времени управления сверху. Предположение относительно $s_x^+(w)$ оставим прежним, т.е. в соответствии с первой формулой (3.16) $s_x^+(w) \geq \underline{s}^+$ для $w \geq 0$.

При сделанных предположениях вид оценок времени управления, полученных ранее, сохраняется. Действительно, рассмотрим для примера случай обычного хаоса.

Теорема 10 *Пусть для системы (3.6) выполнены следующие условия.*

1. Существует поднятая система (3.7), которая задается функцией G, удовлетворяющей предположениям G_{uw}, $\hat{G}_w$, первому условию (3.16) и условию (10.1).

2. Дифференциал семейства основных отображений удовлетворяет левой части неравенству (5.5) , т.е. для достаточно больших значений n для нижнего коэффициента $\underline{\rho}^+(n)$ разбегания траекторий выполнено условие

$$\frac{\underline{C}^+}{n^\gamma} \leq \underline{\rho}^+(n), \quad 0 < \gamma < 1, \quad n > N. \qquad (10.2)$$

Тогда имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка сверху на время управления

$$\overline{T}(\overline{u}) = \left[\frac{1-\gamma'}{\underline{C}^+} \ln \frac{R}{\underline{l}_0 \underline{c}^+ \overline{u}} \right]^{\frac{1}{1-\gamma'}} - 1, \qquad (10.3)$$

где $\underline{l}_0 = (\underline{s}_0)^{1/d}$, $\underline{s}_0 = \underline{s}^+ \underline{s}_0^{\perp}$, $\underline{c}^+ = (\underline{C}^+)^{1/d}$, остальные параметры прежние.

Доказательство теоремы 10.

Последовательность w_n определяется последовательностью $\underline{\rho}^+(n)$, которая удовлетворяет соотношению (10.2). Таким образом, $w_n \gtrsim \frac{\underline{C}^+}{n^\gamma}$ и $s_x^{\perp}(w_n) \geq s_0^{\perp} \underline{C}^+ \frac{1}{n^\gamma}$.

Доказательства теоремы 10 повторяет доказательство теоремы 1, при этом формула (6.6) принимает вид

$$v_{n+1} \gtrsim \exp\left(\frac{\underline{C}^+ d}{1-\gamma} (n+1)^{1-\gamma} \right) \exp\left(-\frac{\underline{C}^+ d}{1-\gamma} (N+1)^{1-\gamma} \right) \underline{s}^+ \underline{s}_0^{\perp} \underline{C}^+ \frac{1}{n^\gamma} \overline{u}^d.$$

Так как речь об асимптотических оценках, то мы пренебрегаем второй экспонентой и при $0 < \gamma < \gamma' < 1$ имеем асимптотическое неравенство

$$v_{n+1} \gtrsim \exp\left(\frac{\underline{C}^+ d}{1-\gamma'}(n+1)^{1-\gamma'}\right) \underline{s}^+ \underline{s}_0^\perp \underline{C}^+ \overline{u}^d, \tag{10.4}$$

откуда получаем, что оценка сверху времени управления в этом случае имеет вид

$$\overline{T}(\overline{u}) = \left[\frac{1-\gamma'}{\underline{C}^+ d} \ln \frac{V}{\underline{s}_0 \underline{C}^+ \overline{u}^d}\right]^{\frac{1}{1-\gamma'}} - 1, \tag{10.5}$$

Эту оценку можно преобразовать к следующему виду (10.3).

Список литературы

[1] Андриевский Б.Р., Фрадков Ф.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I Методы. Автоматика и телемеханика, N 1, 2003, с. 3 – 45.

[2] Ott E, Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos. Physical Review Letters. — 1990. v. 64, No 11 — p. 1195– 1199.

[3] Yang L., Liu Z., Zheng Y."Midle"periodic orbit and its application to chaos control. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2001.— v. 12, No 8, p.1869 – 1876.

[4] Schroer C., Ott E. Tarketing in hamiltonian systems that have mixed regular/chaotic phase spaces. — Chaos 7 (4), 1997.

[5] Baptista M.S., Caldas I. L. Easy-to-implement method to target nonlinear systems. — Chaos, 1997, **v. 8**, N 1, pp. 290-299.

[6] Macau E. Targeting in chaotic scattering. Phisical Rewiew E. — 1998. v. 57, N. 5 — p. 5337– 5347.

[7] Хрящев С.М. Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. I. // АиТ. №10. 2004. С. 51 — 67.

[8] Хрящев С.М. Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. II. // АиТ. №11. 2004. С.

[9] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1981, 240 с.

[10] Yomdin Y. Volume growth and entropy // Israel J.math. — 1987.— v.57, p.285 – 300.

[11] Newhouse Sh. Enyropy and Volume // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 1988. v. 8* (Conley Memoria Issue) — p. 283 – 300.

[12] Каток А.Б, Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999, 768 с.