*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru*

Дифференциально-разностные уравнения

Вычисление $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы системы нейтрального типа

В. А. Сумачева, В. Л. Харитонов

*Факультет прикладной математики - процессов управления,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация

В работе рассматривается задача вычисления нормы передаточной матрицы линейной системы нейтрального типа. Получена явная формула для искомой нормы, являющаяся обобщением известного выражения для нормы передаточной матрицы системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.Рассмотрен пример, иллюстрирующий процедуру вычисления.

Abstract

The problem of computing of the norm of transfer matrices of neutral type time-delay systems is considered. It is known, that the Lyapunov matrices can be used to compute the norm of delay free linear time invariant systems. The obtained result is similar to this one. It is shown, that the norm of the transfer matrix of a neutral type time-delay system can be expressed in the terms of the Lyapunov matrices for time-delay systems. In this work the explicit expression for the norm is received.

1 Введение

В теории линейных стационарных систем управления одним из основных объктов исследования являются их передаточные матрицы. С их помощью проводится оценка влияния внешних возмущений на выходной сигнал системы. В зависимости от характера этих возмущений уровень их подавления или усиления оценивается с помощью нормы передаточной матрицы.

Выбор управления, позволяющего снизить влияние внешних возмущений, является важной задачей теории управления. Качество таких управлений определяется уровнем подавления возмущений. В роли критерия выступает норма передаточной матрицы замкнутой системы. Например, задача синтез $\mathcal{H}_2$ оптимального управления заключается в выборе управления, при котором для замкнутой им системы достигается минимум $\mathcal{H}_2$ нормы.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что вычисление $\mathcal{H}_2$ нормы сводится к разысканию решения вспомогательного матричного уравнения Ляпунова со специально выбранной правой частью [5]. Часто при моделировании систем управления используют дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Запаздывание может возникать как в управляющем сигнале, так и в самом объекте управления.

В статье [2] рассмотрена задача вычисления нормы передаточной матрицы для систем не содержащих запаздывания во входном и выходном сигналах. На основе теории матриц Ляпунова для систем с запаздывающим аргументом было получено явное выражение для $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы системы. В данной работе получено обобщение этого результата на случай систем нейтрального типа, содержащих запаздывания как во входном, так и в выходном сигналах.

2 Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим экспоненциально устойчивую линейную стационарную систему уравнений нейтрального типа с несколькими запаздываниями

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{m} D_j x(t-jh)\right) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t-jh) + \sum_{j=0}^{m} B_j v(t-jh), \qquad (1)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{m} C_j x(t-jh), \qquad (2)$$

где $D_0 = E; D_1, \ldots, D_m, A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}; B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}^{n\times p}; C_0, \ldots, C_m \in \mathbb{R}^{q\times n}$ – вещественные матрицы, $h > 0$ – положительное базовое запаздывание.

Будем полагать, что возмущение $v(t)$ является ограниченной, непрерывной p-мерной функцией.

Для того, чтобы определить решение системы (1) необходимо задать начальную функцию $\varphi \in \mathcal{C}^1$. Соответствующее решение $x(t, \varphi)$ должно удовлетворять начальному условию

$$x(t, \varphi) = \varphi(t), \quad t \in [-mh, 0].$$

Определение 1 *[1] Систем (1) называется экспоненциально устойчивой, если существуют $\gamma \geq 1$ и $\alpha > 0$ такие, что при $v(t) \equiv 0$ решения системы удовлетворяет оценке*

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\alpha t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0.$$

Норма вектора $\|x(t, \varphi)\|$ евклидова, норма начальной функции

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta\in[-mh,0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Определение 2 *[1] Фундаментальной матрицей системы (1) называется матричнозначная функция $K(t)$, удовлетворяющая для $t \geq 0$ уравнению*

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=0}^{m} D_j K(t - jh)\right] = \sum_{j=0}^{m} A_j K(t - jh)$$

и начальными условиям

$$K(0) = E, \quad K(\theta) = 0_{n\times n}, \quad \theta < 0.$$

Утверждение 1 *[1] Если система (1) экспоненциально устойчива, то справедлива оценка*

$$\|K(t)\| \leq \gamma e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

3 Матрицы Ляпунова

В дальнейшем нам потребуются матрицы Ляпунова для системы (1).

Определение 3 *[3] Квадратная $n \times n$ матрица $U(\tau, W)$ называется матрицей Ляпунова для системы (1), ассоциированной с произвольной квадратной матрицей $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, если она обладает следующими свойствам:*

- *динамическое свойство*

$$\frac{d}{d\tau}\left[\sum_{k=0}^{m} U(\tau - kh, W)D_k\right] = \sum_{k=0}^{m} U(\tau - kh, W)A_k,\ \ \tau \geq 0; \tag{3}$$

- *свойство симметрии*

$$U(-\tau, W) = U^T(\tau, W^T),\ \ \tau \geq 0; \tag{4}$$

- *алгебраическое свойство*

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\left[A_j^T U((j-k)h, W)D_k + D_j^T U((j-k)h, W)A_k\right] = -W. \tag{5}$$

Утверждение 2 *[3] Для экспоненциально устойчивой системы (1) матрица Ляпунова, ассоциированная с матрицей W существует, единственна и может быть представлена в виде несобственного интеграла*

$$U(\tau, W) = \int_0^{\infty} K^T(t)WK(t+\tau)dt. \tag{6}$$

4 Норма передаточной матрицы

Выберем нулевую начальную функцию $\varphi(\theta) = 0 \in \mathbb{R}^n,\ \theta \in [-h, 0]$ и обозначим через $x(t)$ соответствующее решение системы (1). Отвечающий этому решению выходной сигнал обозначим через $y(t)$. Преобразование Лапласа функций $v(t)$, $y(t)$, $x(t)$ и $K(t)$ обозначим через $\widehat{V}(s)$, $\widehat{Y}(s)$, $\widehat{X}(s)$ и $\widehat{K}(s)$ соответственно.

Передаточная матрица $G(s)$ системы (1)-(2) связывает преобразования Лапласа функций $y(t)$ и $v(t)$

$$\widehat{Y}(s) = G(s)\widehat{V}(s).$$

Утверждение 3 *Передаточная матрица системы (1)-(2) имеет вид*

$$G(s) = \left(\sum_{j=0}^{m} C_j e^{-jhs}\right)\widehat{K}(s)\left(\sum_{k=0}^{m} B_k e^{-khs}\right). \tag{7}$$

Определение 4 *[5] Прообраз Лапласа $g(t)$ передаточной матрицы системы называется импульсной передаточной матрицей матрицей системы (1)-(2).*

Утверждение 4 . *Импульсная передаточная матрица системы (1)-(2) имеет вид*

$$g(t) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} C_j K(t-(j+k)h) B_k. \tag{8}$$

$\mathcal{H}_2$ норма передаточной матрицы системы (1)-(2) задаётся выражением

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Tr\left(G^*(i\omega)G(i\omega)\right) d\omega, \tag{9}$$

смотри [5]. Здесь $Tr(Q)$ обозначает след квадратной матрицы Q.

Теорема 1 $\mathcal{H}_2$ *норма передаточной матрицы экспоненциально устойчивой системы (1)-(2) удовлетворяет равенству*

$$\|G\|_2^2 = Tr\left(\sum_{j,k,l,r=0}^{m} B_j^T U\left((j+k-l-r)h, C_k^T C_l\right) B_r\right). \tag{10}$$

Доказательство. По теореме Парсеваля во временной области равенство (9) имеет вид

$$\|G\|_2^2 = \int_0^{\infty} Tr\left(g^T(t)g(t)\right) dt.$$

Заменив под знаком интеграла импульсную передаточную матрицу на правую часть равенства (8), получим равенство

$$\|G\|_2^2 = Tr\left(\sum_{j,k,l,r=0}^{m} \int_0^{\infty} B_j^T K^T(t-(j+k)h) C_k^T C_l K(t-(l+r)h) B_r dt\right).$$

Несобственный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} B_j^T K^T(t-(j+k)h) C_k^T C_l K(t-(l+r)h) B_r dt$$

в правой части последнего равенства сходится, так как система (1) экспоненциально устойчива. Замена переменной интегрирования t интегрирования $\tau = t-(j+k)h$ и начальное условие для фундаментальной матрицы $K(t)$ позволяют представить этот интеграл в виде

$$\|G\|_2^2 = Tr\left(\sum_{j,k,l,r=0}^{m} B_j^T \int_0^{\infty} K^T(\tau) C_k^T C_l K(\tau+(j+k-l-r)h) B_r d\tau\right).$$

Используя формулу (6), получим искомое равенство (10).

В формулу (10) входят только матричные коэффициенты исходной системы (1)-(2) и значения матриц Ляпунова в точках $-2mh, \ldots, 2mh$. Таким образом, вычисление нормы передаточной матрицы сводится к нахождению матриц Ляпунова.

Формулу (10) можно упростить, уменьшив количество матриц Ляпунова, входящих в нее, с m^2 до $m+1$.

Теорема 2 *$\mathcal{H}_2$ норма передаточной матрицы экспоненциально устойчивой системы (1)-(2) удовлетворяет равенству*

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T U((j-r)h, W_0) B_r\right) && (11)\\ &+ 2Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T \sum_{i=1}^{m} U((j-r+i)h, W_i) B_r\right), && (12) \end{aligned}$$

где

$$W_0 = \sum_{k=0}^{m} C_k^T C_k, \quad W_i = \sum_{\substack{k,l=0\\ l>k}}^{m} C_k^T C_l, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Разобьем выражение для нормы (до введения матриц Ляпунова) на две части

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= Tr\left(\sum_{j,k,r=0}^{m} \int_0^{\infty} B_j^T K^T(t-(j+k)h) C_k^T C_k K(t-(k+r)h) B_r dt\right) \\ &+ Tr\left(\sum_{\substack{j,k,l,r=0\\ k\neq l}}^{m} \int_0^{\infty} B_j^T K^T(t-(j+k)h) C_k^T C_l K(t-(l+r)h) B_r dt\right) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы интегралы в правой части последнего равенства можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T \int_0^\infty K^T(\tau)\left(\sum_{k=0}^{m} C_k^T C_k\right) K(\tau+(j-r)h)d\tau B_r\right) \\ &= Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T U((j-r)h, W_0) B_r\right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое состоит из пар, отличающихся только транспонированием, поэтому их следы совпадают

$$\begin{aligned} I_2 &= Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} \int_0^\infty B_j^T K^T(t) \sum_{\substack{k,l=0 \\ k\neq l}}^{m} C_k^T C_l K(t+(j+k-l-r)h) B_r dt\right) \\ &= 2Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T \int_0^\infty K^T(t) \sum_{\substack{k,l=0 \\ l>k}}^{m} C_k^T C_l K(t+(j+k-l-r)h) dt B_r\right) \\ &= 2Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T \int_0^\infty K^T(\tau) \sum_{i=1}^{m} W_i K(\tau+(j-r+i)h) d\tau B_r\right) \\ &= 2Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T \sum_{i=1}^{m} U((j-r+i), W_i) B_r\right). \end{aligned}$$

5 Частный случай

Формула (11) может быть значительно упрощена в случае, если исходная система не имеет запаздываний в выходном сигнале

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{m} D_j x(t-jh)\right) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t-jh) + \sum_{j=0}^{m} B_j v(t-jh), \tag{13}$$

$$y(t) = C_0 x(t). \tag{14}$$

Тогда $\mathcal{H}_2$ норма передаточной матрицы системы (13), (14) может быть найдена по формуле

$$\|G\|_2^2 = Tr\left(\sum_{j,r=0}^{m} B_j^T U((j-r)h) B_r\right), \tag{15}$$

где $U(\tau)$ — матрица Ляпунова, ассоциированная с матрицей $C_0^T C_0$. Для вычисления нормы достаточно определить значения одной матрицы Ляпунова в точках $-mh, \dots, mh$.

6 Пример

Проиллюстрируем процедуру вычисления $\mathcal{H}_2$ нормы, связанную с нахождением матрицы Ляпунова на следующем примере. Рассмотрим экспоненциально устойчивую систему

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) + \begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} x(t-1)\right]$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t-1) + v(t) + v(t-1), \quad (16)$$
$$y(t) = x(t). \quad (17)$$

Так как эта система не имеет запаздываний в выходном сигнале, для вычисления $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы достаточно найти только одну матрицу Ляпунова $U(\tau)$, ассоциированную с $C_0^T C_0 = E$. Выражение для $\mathcal{H}_2$ нормы в данном случае будет иметь вид

$$\|G\|_2^2 = Tr\left(B_0^T U(0) B_0 + B_0^T U(-1) B_1 + B_1^T U(1) B_0 + B_1^T U(0) B_1\right).$$

Для вычисления значений матрицы Ляпунова $U(\tau)$ введем на промежутке $\tau \in [0, 1]$ вспомогательные матрицы

$$Z_0(\tau) = U(\tau), \ Z_{-1}(\tau) = U(\tau - 1)$$

и вектор столбец $z(\tau)$, являющийся векторизацией матрицы $(Z_0(\tau), Z_{-1}(\tau))$.

Вспомогательные матрицы удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{pmatrix} E & D_1 \\ D_1^T & E \end{pmatrix} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} Z_0(\tau) \\ Z_{-1}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ -A_1^T & -A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0(\tau) \\ Z_{-1}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Покомпонентная запись матричных уравнений приводит к системе линейных уравнений

$$R_0 \frac{d}{d\tau} z(\tau) = R_1 z(\tau), \quad (18)$$

с матрицами

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0-0.5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$R_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (18) находится по формуле Коши

$$z(\tau) = e^{R_0^{-1} R_1 \tau} z(0). \tag{19}$$

Для отыскания вектора $z(0)$ воспользуемся алгебраическим свойством (5) и равенством

$$Z_0(0) = Z_{-1}(1).$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(M + N e^{R_0^{-1} R_1} \right) z(0) = (-1, 0, 0, -1, 0, \ldots, 0)^T,$$

с матрицами

$$M = \begin{pmatrix} -1.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1. & 0 \\ 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1.5 & 0 & 2 & -1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & -1.5 & -1 & 2 & -0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.5 & 0 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -0.5 & 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1.5 & 0.5 \\ -1 & -0.5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение последней системы

$$z(0) = (0.904, 0.7677, 0.7677, 1.2989, 0.4292, 0.3304, 0.6373, 0.6001)^T.$$

Подставив найденное значение $z(0)$ получим решение на промежутке $\tau \in [0, 1]$ по формуле

$$z(\tau) = e^{R_0^{-1}R_1\tau} z(0) = e^{R_0^{-1}R_1\tau} \left(M + Ne^{R_0^{-1}R_1}\right)^{-1} (-1, 0, 0, -1, 0, \ldots, 0)^T.$$

На промежутке $\tau \in [-1, 0]$ решение можно доопределить по свойству симметрии.

Искомыми значениями матрицы Ляпунова будут

$$U(0) = \begin{pmatrix} 0.9040 & 0.7677 \\ 0.7677 & 1.2989 \end{pmatrix}, \quad U(1) = \begin{pmatrix} 0.4292 & 0.3304 \\ 0.6373 & 0.6001 \end{pmatrix}, \quad U(-1) = U^T(1).$$

Норма передаточной матрицы системы (16), (17)

$$\|G\|_2 = 2.5425.$$

7 Заключение

В данной работе рассмотрен вопрос о нахождении явной формулы для вычисления $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы линейной стационарной системы дифференциальных уравнений с запаздываниями нейтрального типа.

Получена явная формула для вычисления нормы, которая включает в себя только коэффициенты исходной системы и значения вспомогательных матриц Ляпунова, что полностью согласуется с ранее полученными результатами.

Способ вычисления матриц Ляпунова так же представлен в работе.

Список литературы

[1] Bellman R., Cooke K. *Differential-Difference Equations*. New York/London: Academic Press, 1963. 462 p.

[2] Jarlebring E., Vanbierviet J., Michiels W. [Explicit expression for the $\mathcal{H}_2$ norm of time-delay system based on the delay Lyapunov equation]. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, USA, 2010, pp. 164-169.

[3] Kharitonov V.L. *Time-Delay Systems: Lyapunov Functional and Matrices*. Boston: Birkhauser, 2013. 327 p.

[4] Lancaster P. *Theory of Matrices*. New York/London: Academic Press, 1969. 326 p.

[5] Zhou K., Doyle J. C., Glover K. *Robust and Optimal Control*. New York, Engelwood Cliffs: Prentice Hall, 1996. 586 p.

[6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1973. 749 p.

[7] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. М.: Наука, 1971. 296 p.