ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2009
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

ТИПИЧНОСТЬ СВОЙСТВА НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

И. М. Камчибеков
Россия, 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф,
Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет,
e-mail: haradrim@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается вопрос о типичности свойства нечувствительности в типичной точке для динамических систем, порождаемых гомеоморфизмами метрических пространств. Найдены такие свойства метрических пространств, что типичный гомеоморфизм пространства, обладающего этим свойством, нечувствителен в типичной точке. Показано, что стандартное канторовское множество обладает этим свойством.

1 Введение

Пусть X – компактное метрическое пространство с метрикой dist, f – гомеоморфизм пространства X. Динамической системой с дискретным временем называется отображение $\phi : \mathbb{Z} \times X \to X$ со свойствами:

1) $\phi(0, x) = x, \quad x \in X$;

2) $\phi(l + m, x) = \phi(l, \phi(m, x)), \quad l, m \in \mathbb{Z},\ x \in X$;

3) при любом $m \in \mathbb{Z}$ отображение $\phi(m, \cdot)$ непрерывно.

Пара (X, f) задает динамическую систему с дискретным временем следующим образом

$$\phi(m, x) = f^m(x), \quad m \in \mathbb{Z},\ x \in X.$$

Пространство X будет фиксировано, поэтому далее вместо системы (X, f) будем писать просто система f.

Будем обозначать через $B_r(a)$ открытый шар в пространстве X радиуса r с центром в точке a. Обозначим через $B(a)$ некоторый открытый шар с центром в точке a. Запись $A \subset B$ будет обозначать, что множество A нестрого содержится в множестве B (равенство допускается).

Через $\blacksquare$ будем обозначать конец доказательства.

Последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ точек из X называется δ-псевдотраекторией $(\delta > 0)$, если

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < \delta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Говорят, что система f обладает свойством отслеживания, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любой δ-псевдотраектории $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ существует такая точка x, что

$$\operatorname{dist}(x_k, f^k(x)) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(в этом случае говорят, что δ-псевдотраектория $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ε-отслеживается траекторией точки x).

Говорят, что система f обладает свойством слабого отслеживания, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любой δ-псевдотраектории $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ существует такая точка x, что

$$\cup_{k\in\mathbb{Z}} x_k \subset \cup_{k\in\mathbb{Z}} B_\varepsilon(f^k(x))$$

(в этом случае говорят, что δ-псевдотраектория $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ слабо ε-отслеживается траекторией точки x).

Информацию по свойству отслеживания псевдотраекторий можно найти в [4]. Обсудим его в сравнении со следующим свойством.

Говорят что гомеоморфизм f нечувствителен в точке $a \in X$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любой такой последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}\subset X$, что

$$\mathrm{dist}(x_0,a)<\delta,\qquad \mathrm{dist}(x_{k+1},f(x_k))<\delta,\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

выполняется следующее:

$$\mathrm{dist}(x_k,f^k(a))<\varepsilon,\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Эти свойства кажутся похожими, но по существу они различны. Отслеживание является глобальным свойством; оно означает, что любая достаточно точная псевдотраектория проходит рядом с некоторой траекторией (при этом мы не знаем, какая траектория отслеживает данную псевдотраекторию). Нечувствительность в точке a дает информацию только относительно псевдотраекторий, берущих начало в достаточно малой окрестности точки a и означает, что положительная часть (т. е. $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$) любой такой достаточно точной псевдотраектории отслеживается положительной полутраекторией точки a.

Одним из основных вопросов, касающихся свойств динамических систем и их фазовых пространств, является вопрос о том, насколько велико множество элементов, обладающих этим свойством.

Подмножество топологического пространства называется множеством II категории по Бэру (или просто множеством II категории), если оно содержит пересечение счетного числа открытых плотных множеств. Говорят, что свойство выполняется для типичного элемента пространства (или что свойство типично для элементов пространства), если множество элементов, обладающих этим свойством, является множеством II категории.

Пусть $Z(X)$ – множество гомеоморфизмов пространства X. На $Z(X)$ введем метрику dist_0:

$$\mathrm{dist}_0(f,g)=\max\{\mathrm{dist}(f(x),g(x)),\mathrm{dist}(f^{-1}(x),g^{-1}(x))|x\in X\}.$$

Заметим, что $Z(X)$ с метрикой dist_0 является полным пространством, поэтому по теореме Бэра (см. [6]) множество II категории плотно в нем.

В [2] Р. Корлесс и С. Ю. Пилюгин доказали, что типичный гомеоморфизм на компактном гладком многообразии обладает свойством слабого отслеживания. В [5] С. Ю. Пилюгин и О. Б. Пламеневская распространили эту теорему на свойство отслеживания. М. Мазур в [3] доказал типичность свойства слабого отслеживания для определенного класса пространств.

Говорят, что пространство X обобщенно однородное (generalized homogeneous), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если дана пара наборов точек

$$\{x_1, \ldots, x_n\},\ \{y_1, \ldots, y_n\} \subset X\ (x_i \neq x_j \text{ и } y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j),$$

удовлетворяющих условию

$$\mathrm{dist}(x_i, y_i) < \delta, \quad 1 \leq i \leq n,$$

то существует такой гомеоморфизм $h : X \to X$, что

$$h(x_i) = y_i, \quad 1 \leq i \leq n, \qquad \mathrm{dist}_0(h, id) < \varepsilon.$$

В [3] доказано, что если компактное метрическое пространство X обобщенно однородное и не имеет изолированных точек, то типичный гомеоморфизм обладает свойством слабого отслеживания.

Н. Бернардес рассмотрел свойство нечувствительности и показал в [1], что типичный гомеоморфизм на компактном топологическом многообразии (с краем) нечувствителен в типичной точке.

В этой работе результат о типичности нечувствительности в типичной точке распространен на пространства, обладающие определенным свойством, а также показано, что стандартное канторовское множество лежит в этом классе пространств.

Будем говорить, что метрическое пространство X обладает свойством $(*)$, если для любых $x \in X$ и $\varepsilon_0 > 0$ найдется такое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, что по любому δ_0 можно выбрать такое $\delta \in (0, \delta_0)$, что для любого шара $B_\rho(y) \subset B_{\varepsilon-2\delta}(x)$ существует такой гомеоморфизм $\varphi : X \to X$, что

$$\varphi(B_{\varepsilon-2\delta}(x)) \subset B_\rho(y), \qquad \varphi(z) = z, \quad z \in X \setminus B_{\varepsilon-\delta}(x).$$

Теорема 1. Если X – компактное метрическое пространство, обладающее свойством $(*)$, то типичный гомеоморфизм нечувствителен в типичной точке.

Утверждение 1. Стандартное канторовское множество обладает свойством $(*)$.

Аналогично утверждению 1 можно доказать, что обобщение канторовского множества (когда из n отрезков вырезается k средних) также обладает свойством $(*)$. Теорема 1 и утверждение 1 показывают, что аналог теоремы Бернардеса верен для некоторых пространств, не являющихся многообразиями. Отметим, тем не менее, что класс пространств, обладающих свойством (*), недостаточно широк (так, это свойство не сохраняется при топологическом произведении). Для расширения класса пространств, в которых верен аналог теоремы Бернардеса, введем следующее определение.

Будем говорить, что пространство X обладает свойством $(*')$, если для любых $x \in X$ и U_0 – окрестности точки x найдется такая окрестность $U \subset U_0$ точки x, что по любому замкнутому множеству $W \subset U$ можно выбрать такие открытые множества W_1 и W_2, что $W \subset W_1$, $\mathrm{Cl}W_1 \subset W_2$, $\mathrm{Cl}W_2 \subset U$ и для любого открытого непустого множества $O \subset W_1$ существует такой гомеоморфизм $\varphi : X \to X$, что

$$\varphi(W_1) \subset O, \qquad \varphi(z) = z, \quad z \in X \setminus W_2.$$

Теорема 2. Пусть X – компактное метрическое пространство, обладающее свойством $(*')$. Тогда типичный гомеоморфизм на X нечувствителен в типичной точке.

Утверждение 2. Если компактное метрическое пространство X обладает свойством $(*)$, то оно обладает свойством $(*')$

Утверждение 3. Пусть X_2 и X_2 – компактные хаусдорфовы пространства. Если пространства X_1 и X_2 обладают свойством $(*')$, то пространство $X_1 \times X_2$ обладает свойством $(*')$.

Утверждение 4. Топологические многообразия (без края) обладают свойством $(*')$.

Таким образом, мы получаем достаточно широкий класс пространств, замкнутый относительно прямого произведения.

2 Доказательство теоремы 1

Будем обозначать через $N_\delta(A)$ ($\delta > 0,\ A \subset X$) δ-окрестность множества A, т. е. $N_\delta(A) = \cup_{a\in A} B_\delta(a)$. Будем использовать обозначения $f \circ N_\delta(A) = f(N_\delta(A))$, $(f \circ N_\delta(A))^2 = f(N_\delta(f(N_\delta(A))))$, аналогично определяется $(f \circ N_\delta)^n(A)$.

Пусть $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – счетное плотное множество в X (оно существует в силу компактности X). Определим для $r, k \in \mathbb{N}$ множество $O_{r,k} \subset Z(X)$: множество $O_{r,k}$ состоит из таких гомеоморфизмов f, для которых существует такое замкнутое множество $V \subset X$, а также такие числа $q \geq 0$ и $m \geq 1$, что

$$f^q(z_k) \in \mathrm{Int}V, \quad f^m(V) \subset \mathrm{Int}V, \quad \mathrm{diam}(f^i(V)) < \frac{1}{r},\ 0 \leq i \leq m-1. \qquad (1)$$

Покажем, что $\cap_{r,k} O_{r,k}$ – это множество II категории, элементы которого нечувствительны в типичной точке из X. Сделаем это в три шага.

Предложение 1. Множество $O_{r,k}$ открыто.

Доказательство.

Пусть $f \in O_{r,k}$. Покажем что существует такое число $d > 0$, что

$$\mathrm{dist}_0(f, g) < d \quad \Rightarrow \quad g \in O_{r,k}.$$

Так как $f \in O_{r,k}$, существует такое замкнутое множество $V \subset X$, а также такие числа $q \geq 0$ и $m \geq 1$, что верны соотношения (1).

Положим

$$d_1 = \frac{\mathrm{dist}(f^q(z_k), X \setminus \mathrm{Int}V)}{2},$$

$$d_2 = \frac{\mathrm{dist}(f^m(V), X \setminus \mathrm{Int}V)}{2},$$

$$d_3 = \min_{0\leq i\leq m-1} \frac{\frac{1}{r} - \mathrm{diam}(f^i(V))}{4},$$

$$d_0 = \min\{d_1, d_2, d_3\}.$$

Выберем такое число $d > 0$, что для любых точек $x, y \in X$ и для любого целого $i \in [0, \max\{q, m\} - 1]$

$$\mathrm{dist}(x, y) < d \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dist}(f^i(x), f^i(y)) < \frac{d_0}{\max\{q, m\}}.$$

Пусть для гомеоморфизма $g : X \to X$ выполняется неравенство

$$\mathrm{dist}_0(f, g) < d.$$

Из неравенства треугольника следует, что для любого целого неотрицательного i

$$\mathrm{dist}(f^i(x), g^i(x)) \leq \sum_{j=0}^{i-1} \mathrm{dist}(f^{i-j}(g^j(x)), f^{i-1-j}(g^{j+1}(x))), \quad x \in X.$$

Так как $\mathrm{dist}_0(f, g) < d$, $\mathrm{dist}(f(x), g(x)) < d$ для любой точки $x \in X$, следовательно

$$\mathrm{dist}(f^{i-j}(g^j x), f^{i-1-j}(g^{j+1}(x))) < \frac{d_0}{\max\{q, m\}}, \quad x \in X.$$

Значит, если $i \in [0, \max\{q, m\}]$, то

$$\mathrm{dist}(f^i(x), g^i(x)) < \frac{d_0}{\max\{q, m\}} i \leq d_0, \quad x \in X.$$

По выбору d_0 выполнено включение $g \in O_{r,k}$ с теми же V, q и m. ■

Предложение 2. Гомеоморфизмы из $\cap_{r,k} O_{r,k}$ нечувствительны в типичной точке из X.

Доказательство.

Пусть $f \in \cap_{r,k} O_{r,k}$. Это значит, что для любых $r, k \in \mathbb{N}$ существует такое замкнутое множество $V \subset X$, а также такие числа $q \geq 0$ и $m \geq 1$, что верны соотношения (1). Множество V, числа q и m зависят от гомеоморфизма f, чисел r и k, но гомеоморфизм f фиксирован, а числа r и k нет, поэтому будем писать $V_{r,k}$ вместо V, $q_{r,k}$ вместо q, $m_{r,k}$ вместо m.

Выберем такое множество $W_{r,k} = B(z_k)$, что

$$f^{q_{r,k}}(\mathrm{Cl} W_{r,k}) \subset \mathrm{Int} V_{r,k}, \quad \mathrm{diam}(f^i(W_{r,k})) < \frac{1}{r},\ 0 \leq i \leq q_{r,k} - 1.$$

Множество $D_r = \cup_k W_{r,k}$ – открытое плотное подмножество пространства X. Покажем, что гомеоморфизм f нечувствителен в точках из $D = \cap_r D_r$. Фиксируем точку $x \in D$ и число $\varepsilon > 0$. Выберем такое натуральное число r, что $\frac{1}{r} < \varepsilon$.

Так как $x \in D$, выполнено включение $x \in D_r$, следовательно существует такое натуральное число k, что $x \in W_{r,k}$. Выберем такое число $\delta \in (0, \frac{1}{r})$, что:

$$(f \circ N_\delta)^{q_{r,k}}(\mathrm{Cl}W_{r,k}) \subset \mathrm{Int}V_{r,k},$$

$$(f \circ N_\delta)^{m_{r,k}}(V_{r,k}) \subset \mathrm{Int}V_{r,k},$$

$$\mathrm{diam}(f \circ N_\delta)^i(\mathrm{Cl}W_{r,k}) < \frac{1}{r} - \delta, \quad 0 \leq i \leq q_{r,k} - 1,$$

$$\mathrm{diam}(f \circ N_\delta)^i(V_{r,k}) < \frac{1}{r} - \delta, \quad 0 \leq i \leq m_{r,k} - 1.$$

Фиксируем последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, удовлетворяющую условию

$$x_0 \in B_\delta(x), \qquad x_{i+1} \in B_\delta(f(x_i)), \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Из выбора δ следует, что

$$x_i \in N_\delta((f \circ N_\delta)^{(i-q)\mathrm{mod}(m)}(V_{r,k})), \quad i \geq q,$$

$$x_i \in N_\delta((f \circ N_\delta)^i(\mathrm{Cl}W_{r,k})), \quad 0 \leq i \leq q - 1.$$

В то же время,

$$f^i(x) \in (f \circ N_\delta)^{(i-q)\mathrm{mod}(m)}(V_{r,k}), \quad i \geq q,$$

$$f^i(x) \in (f \circ N_\delta)^i(\mathrm{Cl}W_{r,k}), \quad 0 \leq i \leq q - 1.$$

Положим

$$d_1 = \max\nolimits_{0 \leq i \leq m-1}\mathrm{diam}((f \circ N_\delta)^i(V_{r,k})),$$

$$d_2 = \max\nolimits_{1 \leq j \leq q-1}\mathrm{diam}((f \circ N_\delta)^j(\mathrm{Cl}W_{r,k})).$$

Тогда

$$\mathrm{dist}(x_i, f^i(x)) < \max\{d_1 + \delta, d_2 + \delta\} < \frac{1}{r} < \varepsilon.$$

Значит, f нечувствителен в точке x. ■

Предложение 3. Пусть пространство X обладает свойством $(*)$. Тогда множество $O_{r,k}$ плотно в $Z(X)$.

Доказательство.

Фиксируем натуральные числа r и k, гомеоморфизм $f \in Z(x)$ и число $d > 0$. Покажем, что существует такой гомеоморфизм $g \in O_{r,k}$, что $\mathrm{dist}_0(f, g) < d$.

Пусть a – точка сгущения последовательности $\{f^j(z_k)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ (она существует в силу компактности X). Существует такое число $d_0 \in (0, d)$, что для любых точек $x, y \in X$

$$\operatorname{dist}(x, y) < d_0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{dist}(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < d.$$

Воспользуемся свойством $(*)$ пространства X. Положим $x = a$ и $\varepsilon_0 = \frac{d_0}{2}$. По числу ε_0 найдем число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ из свойства $(*)$ пространства X.

Возьмем такие целые числа $q \geq 0$ и $m \geq 1$, что

$$f^q(z_k), f^{q+m}(z_k) \in B_\varepsilon(a),$$

$$f^i(z_k) \notin B_\varepsilon(a), \quad 0 \leq i \leq q-1,\ q+1 \leq i \leq q+m-1.$$

Выберем такое число δ_0, что $f^q(z_k), f^{q+m}(z_k) \in B_{\varepsilon-2\delta_0}(a)$. По числу δ_0 найдем число $\delta \in (0, \delta_0)$ из свойства $(*)$ пространства X.

Выберем такое число $\rho > 0$, что

$$f^m(\mathrm{Cl}B_\rho(f^q(z_k))) \subset B_{\varepsilon-2\delta}(a),$$

$$\operatorname{diam}(f^i(\mathrm{Cl}B_\rho(f^q(z_k)))) < \frac{1}{r}, \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$B_{\varepsilon-\delta}(a) \cap f^i(\mathrm{Cl}B_\rho(f^q(z_k))) = \emptyset, \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Применим свойство $(*)$ пространства X и найдем гомеоморфизм $\varphi \in Z(X)$, для которого верно следующее:

$$\varphi(B_{\varepsilon-2\delta}(a)) \subset B_\rho(f^q(z_k)),$$

$$\varphi(z) = z, \quad z \in X \setminus B_{\varepsilon-\delta}(a). \tag{2}$$

Положим $V = \mathrm{Cl}B_\rho(f^q(z_k))$, $g = \varphi \circ f$. Покажем, что $g \in O_{r,k}$ при данных V, q и m.

В силу (2) и выбора q, m и ρ,

$$g^i(z_k) = f^i(z_k), \quad 1 \leq i \leq q-1,$$

$$g^i(V) = f^i(V), \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Поэтому

$$g^q(z_k) = \varphi(f^q(z_k)) \in B_\rho(f^q(z_k)) = IntV,$$

$$g^m(V) = \varphi(f^m(V)) \subset \varphi(B_{\varepsilon-2\delta}(a)) \subset B_\rho(f^q(z_k)) = \mathrm{Int}V,$$

$$\operatorname{diam}(g^i(V)) = \operatorname{diam}(f^i(\mathrm{Cl}B_\rho(f^q(z_k)))) < \frac{1}{r}, \quad 0 \le i \le m-1.$$

Таким образом, $g \in O_{r,k}$. Осталось показать, что $\operatorname{dist}_0(f,g) < d_0$. Так как $\varphi(z) = z$ для любой точки $z \in X \setminus B_{\varepsilon-\delta}(a)$,

$$\operatorname{dist}(x, \varphi(x)) < \operatorname{diam}(B_{\varepsilon-\delta}(a)) < 2\varepsilon_0 = d_0, \quad x \in X.$$

Поэтому

$$\operatorname{dist}(f(x), \varphi(f(x))) < d, \quad x \in X.$$

Так как

$$\operatorname{dist}(x, \varphi^{-1}(x)) = \operatorname{dist}(\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi^{-1}(x)) < d_0, \quad x \in X,$$

$$\operatorname{dist}(f^{-1}(x), f^{-1}(\varphi^{-1}(x))) < d, \quad x \in X.$$

Таким образом,

$$\operatorname{dist}_0(f,g) = \max\{\operatorname{dist}(f(x), \varphi(f(x))), \operatorname{dist}(f^{-1}(x), f^{-1}(\varphi^{-1}(x)))|x \in X\} < d.$$

Значит, $O_{r,k}$ плотно в $Z(X)$. ■

Из предложений 1-3 следует, что $\cap_{r,k} O_{r,k}$ является множеством II категории, элементы которого нечувствительны в типичной точке из X, т. е. типичный гомеоморфизм пространства X нечувствителен в типичной точке. ■

3 Доказательство утверждения 1

Пусть C – стандартное канторовское множество. Заметим, что $x \in C$ тогда и только тогда, когда троичная запись числа x содержит цифру 1 только в качестве последнего ненулевого знака (это же можно взять за определение стандартного канторовского множества).

Замечание. Под троичной записью подразумевается иньективное отображение $[0,1] \to \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}_+}$, при котором точке $x \in [0,1]$ ставится в соответствие последовательность $\{x_k \in \{0,1,2\}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ построенная следующим образом.

Нулевая итерация:

если $x \in [0,1)$, то $x_0 = 0$;

если $x = 1$, то $x_0 = 1$ и $x_k = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Первая итерация:
если $x \in [0, \frac{1}{3})$, то $x_1 = 0$ и $[0, \frac{1}{3})$ – базовый промежуток для следующей итерации;
если $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, то $x_1 = 1$ и $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ – базовый промежуток для следующей итерации;
если $x \in [\frac{2}{3}, 1)$, то $x_1 = 2$ и $[\frac{2}{3}, 1)$ – базовый промежуток для следующей итерации.

...

k итерация (базовый промежуток – [a,b)):
если $x \in [a, a + \frac{b-a}{3})$, то $x_k = 0$ и $[a, a + \frac{b-a}{3})$ – базовый промежуток для следующей итерации;
если $x \in [a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2(b-a)}{3})$, то $x_k = 1$ и $[a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2(b-a)}{3})$ – базовый промежуток для следующей итерации;
если $x \in [a + \frac{2(b-a)}{3}, b)$, то $x_k = 2$ и $[a + \frac{2(b-a)}{3}, b)$ – базовый промежуток для следующей итерации.

...

Таким образом, последовательность, которая является троичной записью некоторого числа, не может иметь "хвоста"из бесконечной последовательности двоек.

Будем говорить, что троичная запись числа конечна, если она имеет лишь конечное число ненулевых элементов.

Рассмотрим множества

$$R = \{x \in C: \text{ троичная запись числа } x \text{ конечна, причем в ней есть } 1\},$$

$$L = \{x \in C: \text{ троичная запись числа } x \text{ конечна, причем в ней нет } 1\},$$

$$R_k = R \cap (\cup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{i}{3^k}), \qquad L_k = L \cap (\cup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{i}{3^k}).$$

Будем называть блоком порядка k множество $[a, a + \frac{1}{3^k}] \cap C$, где $a \in L_k$.

Фиксируем точку $x \in C$ и число $\varepsilon_0 > 0$. В C нет изолированных точек, поэтому либо $(x, x+\varepsilon_0) \cap C \neq \emptyset$, либо $(x-\varepsilon_0, x) \cap C \neq \emptyset$. Не умаляя общности, пусть $(x, x + \varepsilon_0) \cap C \neq \emptyset$. Множество R плотно в C, следовательно $(x, x + \varepsilon_0) \cap R \neq \emptyset$. Поэтому существует такое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, что $x + \varepsilon \in R$.

Фиксируем число $\delta_0 \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$. Так как $R \cap L = \emptyset$, L плотно в C и $x + \varepsilon \in R$, можно выбрать такое $\delta \in (0, \delta_0)$, что $x + \varepsilon - 2\delta \in L$.

Фиксируем точку $y \in C$ и число $\rho > 0$, для которых

$$(y-\rho, y+\rho) \cap C \subset (x-\varepsilon+2\delta, x+\varepsilon-2\delta) \cap C.$$

Так как $y \in C$, существуют такие точки $c \in L$ и $d \in R$ (причем $c < d$), что

$$[c, d] \subset (y-\rho, y+\rho). \tag{3}$$

Покажем, что можно найти такую точку $a \in L$, что

$$(x-\varepsilon+2\delta, x] \cap C \subset [a, x] \cap C \subset (x-\varepsilon+\delta, x] \cap C.$$

В C нет точек, внутренних относительно [0,1], поэтому найдется $a' \in (x-\varepsilon+\delta, x-\varepsilon+2\delta) \setminus C$. Пусть $0,*1\ldots$ – троичная запись числа a', где $*$ – это последовательность из 0 и 2. Возьмем $a = 0,*2$. Заметим, что $(a', a) \cap C = \emptyset$, следовательно

$$(x-\varepsilon+2\delta, x] \cap C \subset [a, x] \cap C \subset (x-\varepsilon+\delta, x] \cap C.$$

Покажем, что можно найти такие различные точки $b, b' \in R$, что

$$[x, x+\varepsilon-2\delta) \cap C \subset [x, b] \cap C \subset [x, b'] \cap C \subset [x, x+\varepsilon-\delta) \cap C.$$

По выбору δ, $x+\varepsilon-2\delta \in L$. Найдется такое натуральное число l, что $x+\varepsilon-2\delta \in L_l$ и $\frac{1}{3^l} < \delta$. Возьмем $b = x+\varepsilon-2\delta+\frac{1}{3^{l+1}}$, $b' = x+\varepsilon-2\delta+\frac{1}{3^l}$.

Таким образом, найдены такие точки a, b и b', что

$$(x-\varepsilon+2\delta, x+\varepsilon-2\delta) \cap C \subset [a, b] \cap C \subset [a, b'] \cap C \subset (x-\varepsilon+\delta, x+\varepsilon-\delta) \cap C. \tag{4}$$

Теперь построим такой гомеоморфизм $\varphi : C \to C$, что

$$\varphi([a, b] \cap C) \subset [c, d] \cap C, \qquad \varphi(z) = z, \quad z \in C \setminus [a, b'].$$

Этот гомеоморфизм будет искомым в силу (3) и (4).

Заметим, что $[a, b'] \cap C$ и $C \setminus [a, b']$ – открытые дизъюнктные подмножества в C (так как $a \in L$, $b' \in R$). Таким образом, достаточно построить нужный гомеоморфизм из $[a, b'] \cap C$ в себя, а на $C \setminus [a, b']$ можно доопределить его тождественным отображением.

Поскольку $a, c \in L$ и $b, b', d \in R$, найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $a, c \in L_n$, $b, b', d \in R_n$. Разобьем $[a, b'] \cap C$ на блоки порядка n. Так как $b, d \in R_n$ и $c \in L_n$, $[a, b] \cap C$ и $[c, d] \cap C$ тоже разбивается на блоки порядка n, причем поскольку $b, b' \in R_n$ и $b \neq b'$, в $(b, b'] \cap C$ попадает хотя бы один блок. Пусть в $[a, b'] \cap C$ попало M блоков, в $[a, b] \cap C$ попало N блоков, в $[c, d] \cap C$ попало K блоков ($N, M, K \in \mathbb{N}$).

Заметим, что любой блок порядка k разбивается на 2 блока порядка $k+1$. Также заметим, что все блоки открыты в C и дизъюнктны, поэтому чтобы биекция на C, при которой блоки переходят в блоки, была гомеоморфизмом, достаточно непрерывности на блоках.

Теперь разбьем некоторые блоки в $[c, d] \cap C$ на более мелкие блоки так, чтобы множество $[c, d] \cap C$ было разбито на N блоков (неважно каких порядков). Далее разобьем некоторые блоки в $(b, b'] \cap C$ на более мелкие блоки так, чтобы множество $(b, b'] \cap C$ было разбито на $M - K$ блоков (неважно каких порядков). Пусть разбиение $\mathcal{U}_1$ множества $[a, b'] \cap C$ – это разбиение, в котором $[a, b] \cap C$ разбивается на блоки порядка n, $(b, b'] \cap C$ разбивается на $M - K$ блоков, а разбиение $\mathcal{U}_2$ множества $[a, b'] \cap C$ – это разбиение, в котором $[c, d] \cap C$ разбивается на N блоков, а $([a, c) \cup (d, b']) \cap C$ разбивается на блоки порядка n. Поскольку количество блоков в разбиении $\mathcal{U}_1$ и в разбиении $\mathcal{U}_2$ одинаково (причем количество блоков разбиения $\mathcal{U}_1$ в $[a, b] \cap C$ равно количеству блоков разбиения $\mathcal{U}_2$ в $[c, d] \cap C$), можно провести биекцию между блоками разбиений $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, причем блокам из $[a, b] \cap C$ будут соответствовать блоки из $[c, d] \cap C$. Отобразим гомеоморфно соответствующие блоки на соответствующие блоки следующим образом: если $[p, p + \frac{1}{3^q}] \cap C$ – блок порядка q (т. е. $p \in L_q$), $[p', p' + \frac{1}{3^{q'}}] \cap C$ – блок порядка q' (т. е. $p' \in L_{q'}$), то отображение действует так: $z \mapsto 3^{q-q'}(z - p) + p'$. Построенный гомеоморфизм является искомым. ■

4 Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1, за исключением предложения 3, поэтому достаточно доказать результат предложения 3, используя свойство $(*')$ вместо свойства $(*)$.

Напомним, что $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – счетное плотное множество в X, а множество $O_{r,k}$ состоит из таких гомеоморфизмах f, для которых существует такое замкнутое множество $V \subset X$, а также такие числа $q \geq 0$ и $m \geq 1$, что

$$f^q(z_k) \in \mathrm{Int}V, \quad f^m(V) \subset \mathrm{Int}V, \quad \mathrm{diam}(f^i(V)) < \frac{1}{r},\ 0 \leq i \leq m - 1.$$

Предложение 4. Пусть пространство X обладает свойством $(*')$. Тогда $O_{r,k}$ плотно в $Z(X)$.

Доказательство.

Фиксируем натуральные числа r и k, гомеоморфизм $f \in Z(x)$ и число $d > 0$. Покажем, что существует такой гомеоморфизм $g \in O_{r,k}$, что $\mathrm{dist}_0(f, g) < d$.

Пусть a – точка сгущения последовательности $\{f^j(z_k)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ (она существует в силу компактности X). Существует такое число $d_0 \in (0, d)$, что для любых точек $x, y \in X$

$$\mathrm{dist}(x, y) < d_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dist}(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < d.$$

Воспользуемся свойством $(*')$ пространства X. Положим $x = a$, $U_0 = B_{\frac{d_0}{2}}(a)$. По окрестности U_0 точки a найдем окрестность $U \subset U_0$ точки a из свойства $(*')$ пространства X.

Возьмем такие целые числа $q \geq 0$ и $m \geq 1$, что:

$$f^q(z_k), f^{q+m}(z_k) \in U,$$

$$f^i(z_k) \notin U, \quad 0 \leq i \leq q-1,\ q+1 \leq i \leq q+m-1.$$

Положим $W = \{f^q(z_k), f^{q+m}(z_k)\}$. По замкнутому множеству W найдем открытые множества W_1 и W_2 из свойства $(*')$ пространства X (в частности, для них верно, что $W \subset W_1$, $\mathrm{Cl}W_1 \subset W_2$ и $\mathrm{Cl}W_2 \subset U$).

Выберем такое $O = B(f^q(z_k))$, что

$$f^m(\mathrm{Cl}O) \subset W_1,$$

$$\mathrm{diam}(f^i(\mathrm{Cl}O)) < \frac{1}{r}, \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$W_2 \cap f^i(\mathrm{Cl}O) = \emptyset, \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Используя свойство $(*')$ пространства X, найдем гомеоморфизм $\varphi \in Z(X)$, для которого верно следующее:

$$\varphi(W_1) \subset O,$$

$$\varphi(z) = z, \quad z \in X \setminus W_2. \tag{5}$$

Положим $V = \mathrm{Cl}O$, $g = \varphi \circ f$. Покажем, что гомеоморфизм $g \in O_{r,k}$ при данных V, q и m.

В силу (5), а также благодаря выбору q, m и O,

$$g^i(z_k) = f^i(z_k), \quad 1 \le i \le q-1,$$

$$g^i(V) = f^i(V), \quad 1 \le i \le m-1.$$

Поэтому

$$g^q(z_k) = \varphi(f^q(z_k)) \in O = IntV,$$

$$g^m(V) = \varphi(f^m(V)) = \varphi(f^m(\mathrm{Cl}O)) \subset \varphi(W_1) \subset O = \mathrm{Int}V,$$

$$\mathrm{diam}(g^i(V)) = \mathrm{diam}(f^i(\mathrm{Cl}O)) < \frac{1}{r}, \quad 0 \le i \le m-1.$$

Таким образом, $g \in O_{r,k}$. Осталось показать, что $\mathrm{dist}_0(f,g) < d_0$. Так как $\varphi(z) = z$ для любой точки $z \in X \setminus W_2$, верно следующее:

$$\mathrm{dist}(x, \varphi(x)) < \mathrm{diam}(W_2) < \mathrm{diam}(U_0) < d_0, \quad x \in X.$$

Поэтому

$$\mathrm{dist}(f(x), \varphi(f(x))) < d, \quad x \in X.$$

Так как

$$\mathrm{dist}(x, \varphi^{-1}(x)) = \mathrm{dist}(\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi^{-1}(x)) < d_0, \quad x \in X,$$

$$\mathrm{dist}(f^{-1}(x), f^{-1}(\varphi^{-1}(x))) < d, \quad x \in X.$$

Таким образом,

$$\mathrm{dist}_0(f,g) = \max\{\mathrm{dist}(f(x), \varphi(f(x))), \mathrm{dist}(f^{-1}(x), f^{-1}(\varphi^{-1}(x)))|x \in X\} < d.$$

Значит, $O_{r,k}$ плотно в $Z(X)$. ■

Из предложения 1, предложения 2 и предложения 4 следует, что $\cap_{r,k} O_{r,k}$ является множеством II категории, элементы которого нечувствительны в типичной точке из X, т. е. типичный гомеоморфизм на X нечувствителен в типичной точке. ■

5 Доказательство утверждения 2

Пусть пространство X обладает свойством $(*)$. Покажем, что X обладает свойством $(*')$.

Фиксируем точку $x \in X$ и окрестность U_0 точки x. Выберем такое ε_0, что $B_{\varepsilon_0}(x) \subset U_0$. По числу ε_0 найдем число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ из свойства $(*)$ пространства X. Положим $U = B_\varepsilon(x)$.

Фиксируем замкнутое множество $W \subset U$. Так как $U = B_\varepsilon(x)$, для любой точки $z \in W$ $\operatorname{dist}(z,x) < \varepsilon$. Поскольку множество W компактно (в силу компактности X и замкнутости W), существует такое $\delta_0 \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$, что для любой точки $z \in W$ $\operatorname{dist}(z,x) < \varepsilon - 2\delta_0$. По числу δ_0 найдем число $\delta \in (0, \delta_0)$ из свойства $(*)$ пространства X. Положим $W_1 = B_{\varepsilon-2\delta}(x)$, $W_2 = B_{\varepsilon-\delta}(x)$.

Фиксируем открытое непустое множество $O \subset W_1$. Существуют такая точка $y \in O$ и такое число $\rho > 0$, что $B_\rho(y) \subset O$. Используя свойство $(*)$ пространства X, найдем такой гомеоморфизм $\varphi : X \to X$, что

$$\varphi(B_{\varepsilon-2\delta}(x)) \subset B_\rho(y), \qquad \varphi(z) = z, \quad z \in X \setminus B_{\varepsilon-\delta}(x).$$

Но $B_{\varepsilon-2\delta}(x) = W_1,\ B_{\varepsilon-\delta}(x) = W_2,\ B_\rho(y) \subset O$. Поэтому

$$\varphi(W_1) \subset O, \qquad \varphi(z) = z, \quad z \in X \setminus W_2.$$

Значит, X обладает свойством $(*')$. ■

6 Доказательство утверждения 3

Пусть пространства X_1 и X_2 обладают свойством $(*')$. Покажем, что пространство $X_1 \times X_2$ обладает свойством $(*')$.

Фиксируем точку $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ и окрестность U_0 точки (x_1, x_2). Существуют такие $U_0^1 \subset X_1$ – окрестность точки x_1 и $U_0^2 \subset X_2$ – окрестность точки x_2, что $U_0^1 \times U_0^2 \subset U_0$. По окрестности U_0^1 точки x_1 найдем окрестность $U^1 \subset U_0^1$ точки x_1 из свойства $(*')$ пространства X_1. По окрестности U_0^2 точки x_2 найдем окрестность $U^2 \subset U_0^2$ точки x_2 из свойства $(*')$ пространства X_2. Положим $U = U^1 \times U^2$.

Фиксируем замкнутое множество $W \subset U$. Будем обозначать через pr_1 проекцию пространства $X_1 \times X_2$ на пространство X_1 ($\mathrm{pr}_1(z_1, z_2) = z_1$), и через pr_2 проекцию пространства $X_1 \times X_2$ на пространство X_2 ($\mathrm{pr}_2(z_1, z_2) = z_2$). Отображения pr_1 и pr_2 являются непрерывными, поэтому $\mathrm{pr}_1(W)$ и $\mathrm{pr}_2(W)$ являются замкнутыми множествами (образ компакта компактен при непрерывном отображении, компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто). По замкнутому множеству $\mathrm{pr}_1(W) \subset U^1$ найдем открытые множества W_1^1 и W_2^1 из свойства $(*')$ пространства X_1 (в частности, для них верно, что $\mathrm{pr}_1(W) \subset W_1^1$, $\mathrm{Cl}W_1^1 \subset W_2^1$ и $\mathrm{Cl}W_2^1 \subset U$). По замкнутому множеству $\mathrm{pr}_2(W) \subset U^2$ найдем открытые множества W_1^2 и W_2^2 из свойства $(*')$ пространства X_2 (в частности, для них верно, что $\mathrm{pr}_2(W) \subset W_1^2$, $\mathrm{Cl}W_1^2 \subset W_2^2$ и $\mathrm{Cl}W_2^2 \subset U$). Положим $W_1 = W_1^1 \times W_1^2$, $W_2 = W_2^1 \times W_2^2$.

Фиксируем открытое непустое множество $O \subset W_1$. Существуют такие открытые непустые множества $O^1 \subset W_1^1$ и $O^2 \subset W_1^2$, что $O^1 \times O^2 \subset O$. Используя свойство $(*')$ пространств X_1 и X_2, найдем такой гомеоморфизм φ_1 пространства X_1 и такой гомеоморфизм φ_2 пространства X_2, что

$$\varphi_1(W_1^1) \subset O^1, \qquad \varphi_1(z) = z, \quad z \in X_1 \setminus W_2^1,$$

$$\varphi_2(W_1^2) \subset O^2, \qquad \varphi_2(z) = z, \quad z \in X_2 \setminus W_2^2.$$

Положим $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Поскольку $W_1 = W_1^1 \times W_1^2$, $W_2 = W_2^1 \times W_2^2$ и $O^1 \times O^2 \subset O$, верно следующее

$$\varphi(W_1) \subset O, \qquad \varphi(z) = z, \quad z \in X \setminus W_2.$$

Значит, $X_1 \times X_2$ обладает свойством $(*')$. ■

7 Доказательство утверждения 4

В этом доказательстве $B_r(z)$ будет обозначать открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в z, $S_r(z)$ – сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в z. Фиксируем метрику на $\mathbb{R}^n$, порожденную нормой $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2}$.

Пусть X – n-мерное топологическое многообразие. Покажем, что X обладает свойством $(*')$.

Фиксируем точку $x \in X$, окрестность U_0 точки x. Выберем такую окрестность $U \subset U_0$ точки x, что существует гомеоморфизм $\psi : \mathrm{Cl}U \to \mathrm{Cl}B_1(0)$.

Фиксируем замкнутое множество $W \subset U$. Выберем такое число $\delta > 0$, что $\psi(W) \subset B_{1-2\delta}(0)$. Положим $W_1 = \psi^{-1}(B_{1-2\delta}(0))$, $W_2 = \psi^{-1}(B_{1-\delta}(0))$.

Фиксируем открытое непустое множество $O \subset W_1$. Так как множество $\psi(O)$ открытое и непустое, существует такая точка $y \in \psi(O)$ и такое число $\rho > 0$, что $B_\rho(y) \subset \psi(O)$.

Построим гомеоморфизм $h : \mathrm{Cl}B_{1-\delta}(0) \to \mathrm{Cl}B_{1-\delta}(0)$, определив его на каждом отрезке, соединяющем точку y и точку на $S_{1-\delta}(0)$. Положим

$$a_1 = -\frac{1-\delta}{\|y\|}y, \quad a_2 = -\frac{1-2\delta}{\|y\|}y.$$

Заметим, что

$$a_2 = \tau a_1 + (1-\tau)y \quad \text{при} \quad \tau = \frac{1+\|y\|-2\delta}{1+\|y\|-\delta}.$$

Выберем такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$\tau^m(1+\|y\|-\delta) < \rho. \tag{6}$$

Для каждой точки $z \in \mathrm{Cl}B_{1-\delta}(0)$ можно найти такую точку $a_z \in S_{1-\delta}(0)$ и такое число $t_z \in [0,1]$, что $z = t_z a_z + (1-t_z)y$. Заметим, что для любой точки $z \in B_{1-2\delta}(0)$

$$\|a_z - y\| \leq \|a_1 - y\| = 1+\|y\|-\delta, \tag{7}$$

$$t_z = 1 - \frac{\delta}{\|a_z - y\|} \leq 1 - \frac{\delta}{1+\|y\|-\delta} = \tau. \tag{8}$$

В силу (6), (7) и (8), $t_z^m\|a_z - y\| < \rho$, значит, $t_z^m a_z + (1-t_z^m)y \in B_\rho(y)$. Положим

$$h(z) = t_z^m a_z + (1-t_z^m)y.$$

Так определенное отображение h является гомеоморфизмом, причем

$$h(B_{1-2\delta}(0)) \subset B_\rho(y), \qquad h(z) = z, \quad z \in S_{1-\delta}(0).$$

Положим

$$\varphi(z) = \begin{cases} \psi^{-1}(h(\psi(z))) \text{ при } z \in W_2, \\ z \text{ при } z \in X \setminus W_2. \end{cases}$$

По построению h отображение φ является гомеоморфизмом; кроме того,

$$\varphi(W_1) = \psi^{-1}(h(B_{1-2\delta}(0))) \subset \psi^{-1}(B_\rho(y)) \subset O.$$

Значит, X обладает свойством $(*')$. ■

Список литературы

[1] N. C. Bernardes Jr., On the predictability of discrete dynamical systems, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 130 (2001), p. 1983-1992.

[2] R. M. Corless, S. Yu. Pilyugin, Approximate and real trajectories for generic dynamical systems, Math. Anal. Appl., vol. 189 (1995), p. 409-423.

[3] M. Mazur, Weak shadowing for discrete dynamical systems on nonsmooth manifolds, Math. Anal. Appl., vol. 281 (2003), p. 657-662.

[4] S. Yu. Pilyugin, Shadowing in Dynamical Systems, Lecture Notes in Math., vol. 1706, Springer, Berlin, 1999.

[5] S. Yu. Pilyugin, O. B. Plamenevskaya, Shadowing is generic, Topology Appl., vol. 97 (1999), p. 253-266.

[6] У. Рудин, Функциональный анализ, Москва, 1975.