ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Устойчивость и бифуркации на конечном интервале времени в вариационных неравенствах

Д. Ю. Калиниченко, Ф. Райтманн, С. Н. Скопинов[1]

Математико-механический факультет,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Приводятся достаточные условия устойчивости на конечном интервале времени для одного класса эволюционных вариационных неравенств с использованием функций Ляпунова и частотных условий. Эти неравенства рассматриваются для гильбертовых пространств и пространств Соболева бесконечного порядка в смысле Ю.А. Дубинского. Показывается, как использовать результат устойчивости на конечном промежутке для характеризации бифуркации. Приводится алгоритм для получения функционалов наблюдения, который использует изоморфизм между алгеброй дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, символы которых - вещественные аналитические функции в некоторой области, и алгеброй аналитических матричных функций.

Введение

В приложениях ([3, 9]) важно иметь условия устойчивости динамического процесса на конечном временном интервале. Для некоторых классов гладких и негладких обыкновенных дифференциальных уравнений условия устойчивости на конечном интервале выведены с использованием функций Ляпунова в [16, 23]. Целью настоящей работы является обобщение одного из таких

[1]Работа выполнена при поддержке Немецко-российского междисциплинарного научного центра (G-RISC) и Германской службы академических обменов (DAAD), Министерства Образования и Науки РФ и Санкт-Петербургского государственного университета.

результатов для случая эволюционных вариационных неравенств. Также будет показано, что для неравенств, зависящих от параметров, данные условия устойчивости могут быть использованы для аппроксимации бифуркационного параметра потери устойчивости. В данной работе функционалы Ляпунова порождаются квадратичными формами в пространстве Гильберта, для которых коэффициенты могут быть получены как решения уравнений Лурье ([12, 15]). При применении ляпуновских функционалов требуется локализация носителя такого функционала. Это возможно, как будет показано, если мы будем рассматривать вариационные уравнения с псевдодифференциальными операторами, для которых коэффициенты являются вещественно-аналитическими функциями в некоторой области пространства $\mathbb{R}^m$ ([6]).

Работа состоит из введения и четырёх последующих глав. В первой главе вводятся некоторые базисные элементы теории вариационных неравенств в шкале гильбертовых пространств в виде дифференциальных включений, состоящих из линейной части и нелинейности, которая определяется квадратичной формой. Центральным элементом нашего подхода для получения функционалов Ляпунова во второй главе является применение частотной теоремы ([12, 13]) для неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Это позволяет описать в явной форме частотные условия устойчивости на конечном временном промежутке для одного класса вариационных неравенств. В третьей главе показано, как используются условия устойчивости на конечном интервале для описания некоторых бифуркаций. В качестве примера в четвёртой главе рассматривается уравнение теплопроводности на стержне бесконечной длины для демонстрации эффективности теоретических результатов.

1 Эволюционные вариационные неравенства

Допустим, что Y_0 - вещественное гильбертово пространство $(\cdot,\cdot)_0$ и $\|\cdot\|_0$ - скалярное произведение и норма. Предположим также, что $A:\mathcal{D}(A)\subset Y_0\to Y_0$ - замкнутый неограниченный плотно определенный линейный оператор. Гильбертово пространство Y_1 , определенное как $\mathcal{D}(A)$ и снабжённое скалярным произведением

$$(y,\eta)_1 := ((\beta I - A)y,\, (\beta I - A)\eta)_0 \,, \quad y,\eta\in\mathcal{D}(A)\,, \tag{1}$$

где $\beta\in\rho(A)\cap\mathbb{R}$ - произвольное фиксированное число, существование которого мы предполагаем ($\rho(A)$ - резольвентное множество A).

Гильбертово пространство Y_{-1} определяется как замыкание пространства Y_0 относительно нормы $\|y\|_{-1} := \|(\beta I - A)^{-1}y\|_0$. Следовательно, мы имеем плотное и непрерывное вложение

$$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}. \tag{2}$$

Скобка двойственности $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ на $Y_{-1}\times Y_1$ определяется однозначным пополнением по непрерывности функционалов $(\cdot, y)_0$ с $y \in Y_1$ на Y_{-1}. Для произвольного числа $T > 0$ определим норму для измеримых по Бохнеру функций из $L^2(0,T;Y_j),\ j = 1,0,-1$ с помощью формулы

$$\|y\|_{2,j} := \left(\int\limits_0^T \|y(t)\|_j^2\, dt\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{W}_T$ - пространство функций $y(\cdot) \in L^2(0,T;Y_1)$, для которых $\dot{y}(\cdot) \in L^2(0,T;Y_{-1})$, снабженное нормой

$$\|y(\cdot)\|_{\mathcal{W}_T} := \left(\|y(\cdot)\|_{2,1}^2 + \|\dot{y}(\cdot)\|_{2,-1}^2\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Предположим что U и W - два других гильбертовых пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_U$, $(\cdot,\cdot)_W$ и нормами $\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_W$, соответственно.

Вместе с выше введенным оператором $A : Y_1 \to Y_{-1}$ рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$B : U \to Y_{-1}\ ,\ C : Y_1 \to W\ , \tag{5}$$

многозначное отображение

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times W \to 2^U \tag{6}$$

и отображение

$$\psi : Y_1 \to \mathbb{R}_+\,. \tag{7}$$

Отметим, что в приложениях φ представляет, например, затухание, $w(t) = Cy(t)$ - вход в нелинейный блок. Рассмотрим эволюционное вариационное неравенство с многозначной нелинейностью в виде

$$(\dot{y} - Ay - Bu, \eta - y)_{-1,1} + \psi(\eta) - \psi(y) \geq 0\,, \quad \forall\, \eta \in Y_1\,, \tag{8}$$

$$w(t) = Cy(t)\ ,\ u(t) \in \varphi(t, w(t))\ ,\ y(0) = y_0 \in Y_0\,. \tag{9}$$

Замечание 1 *Заметим, что если $\psi \equiv 0$, эволюционное вариационное неравенство (8), (9) эквивалентно эволюционному уравнению с многозначной нелинейностью φ, заданное через*

$$\dot{y} = Ay + Bu \quad \text{в} \quad Y_{-1}\,, \tag{8'}$$

$$w(t) = Cy\,(t)\ , \quad u\,(t) \in \varphi(t, w(t)), \quad y(0) = y_0 \in Y_0\,. \tag{9'}$$

Определение 1 *Функция $y(\cdot) \in \mathcal{W}_T \cap C(0,T;Y_0)$ называется решением системы (8), (9) на промежутке $(0,T)$, если существует функция $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ такая, что для почти всех $t \in (0,T)$ неравенство (8), (9) выполнено и $\int_0^T \psi(y(t))dt < +\infty$. Пара $\{y(\cdot), u(\cdot)\}$ называется* процессом.

Допустим, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ - квадратичные формы на $Y_1 \times U$. *Класс $\mathcal{N}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ нелинейностей* для (8), (9) состоит из всех таких отображений (6), для которых следующие свойства выполнены ([12, 13]):

Для каждого $T > 0$ и произвольных двух функций $y(\cdot) \in L^2(0,T;Y_1)$ и $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$, удовлетворяющих

$$u(t) \in \varphi(t, Cy(t)) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]\ , \tag{10}$$

вытекает, что

$$\mathcal{F}(y(t), u(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]\ , \tag{11}$$

и существует непрерывная функция $\Phi : Y_1 \to \mathbb{R}_+$ (*обобщенный потенциал*) такая, что

$$\int_s^t \mathcal{G}(y(\tau), u(\tau))d\tau \geq \Phi(y(t)) - \Phi(y(s)) \geq -\Phi(y(s)) \tag{12}$$

для всех $0 \leq s < t \leq T$.

2 Частотные условия устойчивости на конечном интервале

Рассмотрим неравенство (8), (9) и предположим, что каждый процесс $\{y(\cdot), u(\cdot)\}$, порождённый этим неравенством, существует, по крайней мере, на интервале $[0, T_0], T_0 > 0$. Предположим также, что $0 \leq t_0 < T_0$, $T > 0$ такие, что $t_0 + T < T_0$, и $0 < \alpha < \beta$ - произвольные числа. Пусть неравенство (8), (9) имеет решение $y(t) \equiv 0$.

Определение 2 *Неравенство (8), (9) называется* (α, β, t_0, T)-устойчивым, *если для каждого решения* $y(\cdot)$ *из неравенства* $\|y(t_0)\|_0 < \alpha$ *вытекает, что* $\|y(t)\|_0 < \beta$ *для всех* $t \in [t_0, t_0 + T)$.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение одного результата из ([16, 23]) для обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1 *Пусть* $J := [t_0, t_0 + T)$ *- временной интервал и существуют непрерывный функционал* $V : Y_0 \times J \to \mathbb{R}$ *и интегрируемая функция* $g : J \to \mathbb{R}$ *такие, что следующие условия выполнены:*

$$(i) \qquad V(y(t), t) - V(y(s), s) < \int_s^t g(\tau) d\tau \tag{13}$$

для всех $s, t \in J, s < t$, *и произвольных функций* $y(\cdot) \in \mathcal{W}_T \cap C(0, T; Y_0)$ *таких, что* $\alpha \leq \|y(t)\|_0 \leq \beta$ *для всех* $t \in J$;

$$(ii) \qquad \int_s^t g(\tau) d\tau \leq \min_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \beta} V(y, t) - \max_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \alpha} V(y, s) \tag{14}$$

для всех $s, t \in J, s < t$.

Тогда неравенство (8), (9) is (α, β, t_0, T)*-устойчиво.*

Доказательство Пусть у $(\cdot)$ - произвольное решение неравенства (8), (9). Предположим, что существует минимальное $t_2 \in J$ такое, что $\|y(t_2)\|_0 = \beta$. Тогда существует также такое $t_1, t_0 < t_1 < t_2$,, что $\|y(t_1)\|_0 = \alpha$ и $\|y(t)\|_0 > \alpha$ для всех $t_1 < t \leq t_2$. Из (13) вытекает, что

$$V(y(t_2), t_2) - V(y(t_1), t_1) < \int_{t_1}^{t_2} g(\tau) d\tau \ . \tag{15}$$

Из (15) получаем, что

$$V(y(t_2), t_2) < \max_{y \in y_0 : \|y\|_0 = \alpha} V(y, t_1) + \int_{t_1}^{t_2} g(\tau) d\tau \ . \tag{16}$$

Соотношения (14) и (16) показывают, что

$$\begin{aligned} V(y(t_2), t_2) &< \max_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \alpha} V(y, t_1) + \min_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \beta} V(y, t_2) \\ &\quad - \max_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \alpha} V(y, t_1) = \min_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \alpha} V(y, t_2) \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Полученное противоречие (17) доказывает теорему. ■

Назовём функционал Ляпунова V и соответствующую функцию g, которые удовлетворяют условиям теоремы 2.1, *парой наблюдения*, определяющей (α, β, t_0, T)- *устойчивость* системы (8), (9).

Пара операторов (A, B) из системы (8), (9) называется *стабилизируемой*, если существует оператор $S \in \mathcal{L}(Y_0, U)$ такой, что решение $y(\cdot)$ задачи Коши $\dot{y} = (A + BS)y, y(0) = y_0$, экспоненциально убывает при $t \to +\infty$, т.е.

$$\exists\, c > 0\; \exists\, \varepsilon > 0 : \|y(t)\|_0 \le c\, e^{-\varepsilon t} \|y_0\|_0\,, \quad \forall\, t \ge 0\,.$$

Обозначим комплексификацию гильбертова пространства $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ и линейного оператора L через $(H^c, (\cdot, \cdot)_{H^c})$ и L^c, соответственно. Пусть $\mathcal{F}^c$ обозначает эрмитово расширение квадратичной формы $\mathcal{F}$. Введем для пары (A, B) из (8), (9) частотную характеристику следующим образом:

$$\chi(i\omega) = (i\omega I^c - A^c)^{-1} B^{\,c}\,, \tag{18}$$

которая определена для всех $\omega \in \mathbb{R}$, таких что $i\omega \in \rho(A^c)$. Введём вещественное Гильбертово пространство Z со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_Z$ и нормой $\| \cdot \|_Z$. Для этого будем использовать линейные операторы $M \in \mathcal{L}(Y_1, Z)$ и $N \in \mathcal{L}(U, Z)$ такие, что для любого выхода $\{y(\cdot), u(\cdot)\}$ системы (8), (9)

$$z(t) := My(t) + Nu(t) \in Z\;,\; t \in [0, T_0]\,. \tag{19}$$

Лемма 1 *Предположим, что пара (A, B) стабилизируема, $\varphi \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, и существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^c(\chi(i\omega)u, u) \;+\; \mathcal{G}^c(\chi(i\omega)u, u) \;+\; \delta \| \big[M^c\chi(i\omega) + N^c\big]u\|^2_{Z^c} \\ +\, \varepsilon\big[\|\chi(i\omega)u\|^2_{Y_1^c} \;+\; \|u\|^2_{U^c}\big] \le 0\;,\end{aligned} \tag{20}$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}$ с $i\omega \notin \sigma(A^c)$ и всех $u \in U^c$. Тогда существует вещественный оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_0, Y_0)$ такой, что для любого выхода $\{y(\cdot), u(\cdot)\} \ne \{0, 0\}$ системы (8), (9) и для любых s, t с $0 < s \le t < T_0$ имеем

$$\begin{aligned}(y(t)\,,\; Py(t))_0 - (y(s)\,,\; Py(s))_0 < \\ \int_s^t [\psi(-Py(\tau) + y(\tau)) - \psi(y(\tau)) + \delta\|My(\tau) + Nu(\tau)\|^2_Z] d\tau + \Phi(y(s))\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Доказательство Доказательство (21) следует из операторного вида частотной теоремы Лихтарникова-Якубовича ([12, 13]). ■

3 Прогнозирование потери (α, β, t_0, T)-устойчивости

Рассмотрим семейство эволюционных вариационных неравенств, зависимое от параметра q

$$(\dot{y} - A(q)y - B(q)u\ ,\ \eta - y)_{-1,1} + \psi(\eta, q) - \psi(y, q) \geq 0\ ,\quad \forall \eta \in Y_1\ , \tag{22}$$

$$w(t) = C(q)y(t)\ ,\ u(t) \in \varphi(t, w(t), q)\ ,\ y(0) = y_0 \in Y_0. \tag{23}$$

Предположим что $q \in Q$, где (Q, d) - метрическое пространство. Пусть для любого $q \in Q$ $A(q) \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1}),\quad B(q) \in \mathcal{L}(U, Y_{-1}),\quad C(q) \in \mathcal{L}(Y_{-1}, W)$,

$$\varphi(\cdot, \cdot, q) : \mathbb{R}_+ \times W \to 2^U\ , \tag{24}$$

и

$$\psi(\cdot, q) : Y_1 \to \mathbb{R}_+\ . \tag{25}$$

Для любого $q \in Q$ также предполагаем, что решение (22) – (25) существует по крайней мере на временном интервале $[0, T_0)$, и любое такое решение непрерывно зависимо от q.

При условиях Леммы 1 мы можем рассмотреть семейство пар наблюдения $\{V(\cdot, q)$,
$g(\cdot, q)\}$, определяющихся посредством (23), через решение $P(q)$, зависимое от параметра, из неравенства диссипативности (21) и зависимое от параметра представление g , заданное с помощью (24). Для фиксированных чисел $0 < \alpha < \beta$ определим для любого $q \in Q$ значение

$$T^*(q) := \sup T\ , \tag{26}$$

где супремум берётся для всех $T > 0$ таких, что $t_0 + T < T_0$ и

$$\int_s^t g(\tau, q)d\tau \leq \min_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \beta} V(y, q) - \max_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \alpha} V(y, q) \tag{27}$$

для всех $s, t \in \mathbb{R}\ ,\ t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + T$.

Ясно, что числа $T^*(q)$ могут использоваться для прогнозирования значения параметра q_{cr}, для которого неравенство (22), (23) не является (α, β, t_0, T)-устойчивым для всех $T \in (0, T_0 - t_0)$.

Положим для простоты, что $Q = \mathbb{R}$ и $T^*(q_1) > 0$, $T^*(q_2) > 0$ - два значения, вычисляемые через (26) для параметров $q_1 \neq q_2$. Если $T^*(q_1) \neq T^*(q_2)$, линейная экстраполяция $\bar{T}^*(q)$ функции $T^*(q)$ даёт значение q_{cr} с $\bar{T}^*(q_{cr}) = 0$. Такой же подход может быть использован для прогноза значения q_{buck} для возникновения динамического процесса складкообразования. По определению (см. например [4]) динамическая потеря устойчивости в (22), (23) возникает, если существуют числа $\bar{\beta} > 0, \bar{t}_0 \geq 0$ и $\bar{T} > 0$ такие, что $\bar{t}_0 + T < T_0$ и неравенство (22), (23) не является $(\alpha, \bar{\beta}, \bar{t}_0, \bar{T})$-устойчивым, независимо от того, насколько малое значение $\alpha > 0$ выбрано. Для того, чтобы характеризовать это свойство, введём для фиксированных $\beta, t_0, \bar{T}$ и для любого $q \in Q$ значение

$$\alpha^*(q) := \sup \alpha \,, \tag{28}$$

где супремум берется по всем $\alpha \in (0, \bar{\beta})$ таким, что неравенство (22), (23) является $(\alpha, \bar{\beta}, \bar{t}_0, \bar{T})$-устойчивым. Предположим, что для двух данных значений параметра $q_1 \neq q_2$ мы можем вычислить значения $\alpha^*(q_1) \neq \alpha^*(q_2)$. Тогда линейная экстраполяция $\bar{\alpha}^*(q)$ of $\alpha^*(q)$ даёт аппроксимацию $\bar{q}_{\text{buck}}$ значения потери устойчивости q_{buck} с помощью формулы $\bar{\alpha}^*(\bar{q}_{\text{buck}}) = 0$. Заметим, что большое число работ посвящено прогнозированию появления упругой или пластической неустойчивости в процессах деформации (например, [3, 4, 9]). Один из самых осуществимых методов - это энергетический метод (см. [3]), который сравним с нашим подходом.

4 Определение функционалов наблюдения через алгебру операторных символов

В этой главе описывается эффективный способ определения операторов наблюдения для класса вариационных уравнений с многозначной нелинейностью, линейная часть которых может быть задана через псевдодифференциальные операторы (ΨDO) с постоянными коэффициентами, имеющие вещественные аналитические символы в области $G \subset \mathbb{R}^m$. Заметим, что многие задачи математической физики могут описываться такими уравнениями, например, определённые классы динамических задач с трением. Базисное пространство для ΨDO - это $H^\infty(G)$, имеющее тип пространства Соболева бесконечного порядка в смысле Ю.А. Дубинского ([5, 6]). Напомним, что $H^\infty(G)$ - это подпространство $L^2(\mathbb{R}^m)$, состоящее из всех таких (комплекснозначных) функций, у которых преобразование Фурье имеет компактный носитель в G. Более подробно пространство $H^\infty(G)$ может быть определено как в [5].

Положим $R = (R_1, \ldots, R_m)$, где $0 < R_j \leq +\infty\,,\ j = 1, \ldots, m$ - некоторые числа и

$$S_R := \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : |\xi_j| < R_j\,,\ j = 1, \ldots, m\}$$

- параллелепипед. Пространство $H^\infty(S_R)$ состоит из всех таких функций $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

1) Вне S_R преобразование Фурье $\hat{u}$ функции u почти везде равно нулю;

2)
$$\|u\|_a^2 := \int_{S_R} a(\xi)|\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty\ , \tag{29}$$

для любой аналитической в области S_R функции

$$a(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha\, \xi^{2\alpha}\ ,\ a_\alpha \geq 0\,. \tag{30}$$

Можно показать, что $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ принадлежит $H^\infty(S_R)$, тогда и только тогда, когда существуют числа

$$0 < r_j < R_j\ ,\ j = 1, \ldots, m, \quad \text{такие что} \quad \operatorname{supp} \hat{u}(\xi) \subset S_r,$$

где $r = (r_1, \ldots, r_m)$. Из теоремы Пэйли-Винера следует, что $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ принадлежит $H^\infty(S_R)$, тогда и только тогда, когда u допускает аналитическое продолжение u_c на $\mathbb{C}^m$, удовлетворяющее неравенству

$$|u_c(y)| \leq C \exp\left(r_1|z_1| + \cdots + r_m|z_m|\right)\ , \tag{31}$$

где $y = x + iz$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$ и $0 < r_j < R_j,\ j = 1, \ldots, m,\ C > 0$ - некоторые константы.

Заметим, что $H^\infty(S_R)$ плотно в подпространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$, элементы которого имеют аналитическое продолжение u_c на $\mathbb{C}^m$, удовлетворяющее (31) с $r_j = R_j,\ j = 1, \ldots, m$.

Будем говорить, что $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в $H^\infty(S_R)$, если $\|u - u_k\|_a \to 0$ как $k \to \infty$, где a - произвольная функция (30) и $\|\cdot\|_a$ вычисляется через (29). Можно показать, что $u_k \to u$ в $H^\infty(S_R)$, тогда и только тогда, если существуют числа $r_j < R_j\ ,\ j = 1, \ldots, m,$ такие что

1) $\operatorname{supp} \hat{u}_k \subset S_r = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) :\ |\xi_i| < r_j, j = 1, \ldots, m\}$;

2) $\hat{u}_k \to \hat{u}$ as $k \to \infty$ in $L^2(S_R)$.

Предположим, что точка $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in G$ выбрана произвольно, но зафиксирована. Обозначим через

$$S_R(\lambda) := \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : |\xi_j - \lambda_j| < R_j\ ,\ j = 1, \ldots, m\} \subset G$$

произвольный параллелепипед и через

$$H^\infty(S_R(\lambda)) := \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^m) : \int_{S_R(\lambda)} a(\xi-\lambda)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

$$\text{для всех аналитических в}\, S_R(\lambda)\, \text{функций} \quad a(\xi-\lambda) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (\xi-\lambda)^\alpha \Big\}$$

соответствующее функциональное пространство. Теперь базисное пространство $H^\infty(G)$ вводится как расслоение с базовым пространством G и со слоями $H^\infty(S_R(\lambda))$:

$$H^\infty(G) := \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^m) : u = \sum_{\lambda \in G} u_\lambda(x) \ , \ u_\lambda \in H^\infty(S_R(\lambda)) \Big\} , \tag{32}$$

где суммирование ведётся по всем конечным суммам с точками из G.

Говорят, что $u_k \to 0$ при $k \to +\infty$ в $H^\infty(G)$, если для любого представления $u_k = \sum_{\lambda \in G} u_{k\lambda}$ в $H^\infty(G)$ имеем $u_{k\lambda} \to 0$ при $k \to +\infty$ в $H^\infty(S_R(\lambda))$ для всех таких $u_{k\lambda}$. Обозначим через $H^{-\infty}(G)$ сопряжённое пространство к $H^\infty(G)$, определённое при условии $L^2(G)$, и через $(\cdot,\cdot)_{-\infty,\infty}$ - скобку двойственности.

Предположим теперь, что $D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, m$, - элементарные дифференциальные операторы и $D := (D_1, \ldots, D_m)$. Тогда

$$A(D) := \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha \ , \ a_\alpha \in \mathbb{C}$$

является *дифференциальным оператором конечного или бесконечного порядка*. Положим, что *символ* этого оператора

$$A(\xi) := \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \, \xi^\alpha$$

- вещественная аналитическая функция в области G. (Используем одну букву для обозначения одновременно оператора и его коэффициента.) Для любого $u \in H^\infty(G)$, которое может быть записано через (32) как $u = \sum_{\lambda\in G} u_\lambda$, $u_\lambda \in H^\infty(S_R(\lambda))$, определим

$$A(D)u(x) := \sum_{\lambda \in G} A(D)\, u_\lambda(x) \, , \tag{33}$$

где $A(D)u_\lambda(x) := \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (D-\lambda I)^\alpha\, u_\lambda(x)\,.$

Дифференциальный оператор бесконечного порядка, определяемый через (33), может быть записан как ΨDO, то есть, для любого $u \in H^\infty(G)$ имеем

$$A(D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_G A(\xi)\hat{u}(\xi)e^{(x,\,\xi)}d\,\xi\,.$$

Этот оператор - линейный и непрерывный как отображение

$$A(D) : H^{\pm\infty}(G) \to H^{\pm\infty}(G)\,.$$

Класс всех ΨDO с аналитическими в области G символами определяет алгебру, которая изоморфна алгебре аналитических в области G функций.

Рассмотрим задачу Коши для вариационного уравнения

$$\tfrac{\partial y}{\partial t} = A(D)y + B(D)\,u(x,t)\,, \tag{34}$$

$$w(x,t) = C(D)y(x,t), \quad u(x,t) \in \varphi(t, w(x,t)), \quad y(x,0) = y_0(x)\,, \tag{35}$$

где $A(D), B(D)$ и $C(D)$ - псевдодифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, чьи символы, в свою очередь, являются вещественными аналитическими функциями в области G. Действие этих линейных операторов происходит следующим образом:

$$A(D) : [H^\infty(G)]^n \to [H^{-\infty}(G)]^n\,, \tag{36}$$

$$B(D) : [H^\infty(G)]^k \to [H^{-\infty}(G)]^n\,, \tag{37}$$

$$C(D) : [H^\infty(G)]^n \to [H^\infty(G)]^l \quad , \tag{38}$$

где n, k и l - натуральные числа. Из определения $H^\infty(G)$ и $H^{-\infty}(G)$ следует, что операторы (36) – (38) ограничены. Предположим, что эти операторы имеют представление

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha D^\alpha\,, \quad B(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} B_\alpha D^\alpha\,, \quad C(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} C_\alpha D^\alpha \tag{39}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ - мультииндексы, $D = (D_1, \ldots, D_m)$ с $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$ являются элементарными дифференциальными операторами, A_α, B_α и C_α постоянные $n \times n$-, $n \times k$- и $l \times n$-матрицы, соответственно. Соответствующие символы

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha \xi^\alpha\,, \quad B(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} B_\alpha \xi^\alpha\,, \quad C(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} C_\alpha \xi^\alpha \tag{40}$$

- вещественные аналитические матричные функции в области G. Нелинейная часть (34), (35) задаётся как многозначное отображение

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times [H^\infty(G)]^l \to 2^{[H^\infty(G)]^k} . \tag{41}$$

Предположим, что начальная функция $y_0 \in [H^\infty(G)]^n$. Уравнение (34), (35), (41) понимается в смысле распределений. Пара $\{y(x,t), u(x,t)\}$ называется *решением* (34), (35), (41) на $(0,T)$, если (по отношению к временному аргументу)

$$y \in L^2(0,T;[H^\infty(G)]^n) , \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;[H^{-\infty}(G)]^n) \tag{42}$$

$$\int_0^T (\tfrac{\partial y}{\partial t}, \eta)_{-\infty,\infty}\, dt = \int_0^T (A(D)y,\eta)_{-\infty,\infty}\, dt + \int_0^T (B(D)u,\eta)_{-\infty,\infty}\, dt ,$$
$$\forall \eta \in L^2(0,T;[H^\infty(G)]^n) , \tag{43}$$

$$u(\cdot,t) \in \varphi(t, C(D)y(\cdot,t)) \quad \text{для почти всех } t \in (0,T) , \tag{44}$$

и

$$y(x,0) = y_0(x) \quad \text{in} \quad G. \tag{45}$$

Предположим, что на любом интервале $(0,T)$ и для любого $y_0 \in [H^\infty(G)]^n$ существует решение для задачи (34), (35), (41), удовлетворяющее соотношениям (42) – (45).

Класс нелинейностей (41) может быть описан как в главе 1 через эрмитову форму $\mathcal{F}$ на $[H^\infty(G)]^n \times [H^\infty(G)]^k$, заданную с помощью

$$\mathcal{F}(y,u) = (F_1(D)y,y)_{-\infty,\infty} + 2\,\mathrm{Re}\,(F_2(D)u,y)_{-\infty,\infty} + (F_3(D)u,u), \tag{46}$$

где

$$\left.\begin{array}{rcl} F_1(D) & = & F_1^*(D) \in \mathcal{L}([H^\infty(G)]^n , [H^{-\infty}(G)]^n) , \\ & & F_2(D) \in \mathcal{L}([H^\infty(G)]^k , [H^{-\infty}(G)]^n) , \\ F_3(D) & = & F_3^*(D) \in \mathcal{L}([H^\infty(G)]^k , [H^\infty(G)]^k), \end{array}\right\} \tag{47}$$

- ΨDO с постоянными коэффициентами, чьи символы

$$F_i(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} F_{i\alpha}\xi^\alpha , i = 1,2,3,$$

- вещественные аналитические функции в области G.

Построение функционалов наблюдения (V, g) для задачи устойчивости на конечном временном интервале (34), (35), (41), удовлетворяющих неравенству диссипативности типа (19), может быть сведено к решению задачи операторных уравнений Лурье

$$\left.\begin{array}{lcl} A^*(D)P(D) + P(D)A(D) + L(D)L^*(D) & = & -F_1(D)\,, \\ P(D)B(D) - L(D)K(D) & = & -F_2(D)\,, \\ K(D)K^*(D) & = & -F_3(D)\,, \end{array}\right\} \qquad (48)$$

где $P(D) = P^*(D) \in \mathcal{L}\left([H^{\pm\infty}(G)]^n,\ [H^{\pm\infty}(G)]^n\right)$, $L(D) \in \mathcal{L}([H^{\infty}(G)]^k,\ [H^{-\infty}(G)]^n)$, и $K(D) = K^*(D) \in \mathcal{L}\left([H^{\infty}(G)]^k,\ [H^{\infty}(G)]^k\right)$ - неизвестные псевдодифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, символы которых - вещественные аналитические функции в G.

Для того, чтобы решить (48), будем использовать, как это было сделано в [11], изоморфизм между алгеброй ΨDO с постоянными коэффициентами и аналитическими символами и алгеброй аналитических матричных функций, которые описывают символы (см. [5]). Это значит, что нужно решать матричную задачу Лурье

$$\left.\begin{array}{lcl} A^*(\xi)P(\xi) + P(\xi)A(\xi) + L(\xi)L^*(\xi) & = & -F_1(\xi)\,, \\ P(\xi)B(\xi) - L(\xi)K(\xi) & = & -F_2(\xi)\,, \\ K(\xi)K^*(\xi) & = & -F_3(\xi)\,, \end{array}\right\} \qquad (49)$$

где $A(\xi), B(\xi), F_1(\xi), F_2(\xi)$ и $F_3(\xi)$ - вещественные аналитические матричные функции в области G порядка $n\times n, n\times k, n\times n, n\times k$ и $k\times k$, соответственно, $P(\xi) = P^*(\xi), L(\xi)$ и $K(\xi) = K^*(\xi)$ - неизвестные вещественные аналитические в области G матричные функции порядка $n \times n, n \times k$ and $k \times k$, соответственно. Для матриц звёздочка обозначает эрмитово сопряжение. Следующая применение леммы KYP ([24]) для матриц в случае вещественно аналитических символов. Если $\Phi(\lambda)$ - это матричный или скалярный полином, обозначим через $\Phi(\lambda)^\nabla$ полином $\Phi(\lambda)^\nabla := [\Phi(-\lambda^*)]^*$. Полином $\Phi(\lambda)$ назовём вещественным, если коэффициенты Φ также вещественные. Если $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ - скалярные полиномы, обозначим через $\langle\alpha, \beta\rangle$ наибольший общий делитель $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$.

Теорема 2 *Пусть $A(\xi)$ и $B(\xi)$ - вещественные аналитические в G матричные функции порядка $n\times n$ и $n\times k$, соответственно. Предположим также,* *что для любого* $\xi \in G$ *эрмитова форма* $\mathcal{F}(\cdot,\cdot,\xi)$ *задаётся на* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ *через уравнение*

$$\mathcal{F}(y,u,\xi) = y^* F_1(\xi) y + 2\,\mathrm{Re}\,(y^* F_2(\xi) u) + u^* F_3(\xi) u\,, \tag{50}$$

где $F_1(\xi) = F_1^*(\xi)\,,\ F_2(\xi)$ *и* $F_3(\xi) = F_3^*(\xi)$ *- вещественные аналитические в области* G *матрицы коэффициентов порядка* $n \times n, n \times k$ *и* $k \times k$*, соответственно. Допустим также, что выполнены следующие свойства:*

(i) Для любого $\xi \in G$ *пара* $(A(\xi), B(\xi))$ *стабилизируема, то есть существуют вещественная аналитическая в* G *матричная функция* $S(\xi)$ *порядка* $k \times n$ *и число* $\varepsilon > 0$*, такие что*

$$\sigma(A(\xi) + B(\xi)S(\xi)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < -\varepsilon\} \tag{51}$$

для любого $\xi \in G$*.*

(ii) Передаточная матричная функция

$$\chi(i\omega,\xi) := [i\omega I - A(\xi)]^{-1} B(\xi) \tag{52}$$

является вещественной аналитической для $(\omega,\xi) \in G^{'} \subset \mathbb{R}^{m+1}$*, где* $G = \mathrm{proj}\ G^{'}$*.*

(iii) Для матричной функции $\Pi(i\omega,\xi)$*, определённой в* $G^{'}$ *с помощью уравнения*

$$\mathcal{F}(\chi(i\omega,\xi)u, u, \xi) = u^* \Pi(i\omega,\xi) u,\ u \in \mathbb{C}^k\,, \tag{53}$$

выполнено следующее частотное условие:

$$\exists\,\delta > 0 \quad \forall\,(\omega,\xi) \in G^{'} : \Pi(i\omega,\xi) \le -\delta I\ . \tag{54}$$

Тогда:

1) Существуют аналитические в G *матричные функции* $P(\xi) = P^*(\xi)\,,\ L(\xi)$ *и* $K(\xi)$ *порядка* $n \times n, n \times k$ *и* $k \times k$*, соответственно, такие что матричные уравнения Лурье (49) выполняются в* G*.*

2) Матричные функции $P(\xi), L(\xi)$ *и* $K(\xi)$*, удовлетворяющие (49), могут быть вычислены следующим способом: определим для* $\xi \in G$ *полином* $\delta(\lambda,\xi) = \det(\lambda I - A(\xi))$*. Предположим, что все корни* $\delta(\cdot,\xi)$ *различны,* $\langle \delta(\cdot,\xi), \delta(\cdot,\xi)^{\nabla}\rangle = 1$ *и*
$\langle \delta(\cdot,\xi)\delta(\cdot,\xi)^{\nabla}\ ,\ \phi(\cdot,\xi)\rangle = 1\,$*. Полином* ϕ *в последнем соотношении определяется через*

$$\det\Phi(\cdot,\xi) = \delta(\cdot,\xi)^{k-1}[\delta(\cdot,\xi)^{\nabla}]^{k-1}\phi(\cdot,\xi)\,, \tag{55}$$

где

$$\Phi(\cdot,\xi) = -\begin{bmatrix} Q(\cdot,\xi)\; B(\xi) \\ \delta(\cdot,\xi)\; I \end{bmatrix}^{\nabla} \tilde{F}(\xi) \begin{bmatrix} Q(\cdot,\xi)\; B(\xi) \\ \delta(\cdot,\xi)\; I \end{bmatrix} ,$$

$$\mathcal{F}(y,u,\xi) = -\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^{*} \tilde{F}(\xi) \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad u$$

$$Q(\lambda,\xi) = (\lambda I - A(\xi))^{-1}\, \delta(\lambda,\xi) \,.$$

a) Определим аналитическую в области G матричную функцию $K(\xi)$ порядка $k \times k$ из уравнения

$$K(\xi)^* K(\xi) = -F_3(\xi) \,, \quad \xi \in G \,. \tag{56}$$

Такая матричная функция (вещественная, если $F_3(\xi)$ - вещественная) существует.

b) Определим $\phi(\cdot,\xi)$ из (55) и определим полином $\psi(\cdot,\xi)$ со старшим членом $\lambda^n \det(-F_3(\xi))$ (вещественный, если $\phi(\cdot,\xi)$ - вещественная), удовлетворяющий в области G уравнению факторизации

$$\phi(\cdot,\xi) = \psi(\cdot,\xi)^{\nabla} \psi(\cdot,\xi) \,. \tag{57}$$

Такой полином существует.

c) Определим $k \times k$-матричный полином $\Psi(\cdot,\xi)$ порядка n (вещественный, если Φ - вещественная) со старшим коэффициентом $\lambda^n(-F_3(\xi))$, удовлетворяющим в области G соотношению

$$\Psi(\cdot,\xi)^{\nabla}\, \Psi(\cdot,\xi) = \Phi(\cdot,\xi) \tag{58}$$

и таким, что

$$\det \Psi(\cdot,\xi) = \varepsilon(\xi)\delta(\cdot,\xi)^{k-1}\psi(\cdot,\xi) \tag{59}$$

с $|\varepsilon(\xi)| = 1$. Такой полином существует.

d) Определим в области G (единственным образом) $n \times k$-матричную функцию $L(\xi)$ (веществениную в случае вещественных данных) из уравнения

$$\Psi(\cdot,\xi)/\delta(\cdot,\xi) = -L^*(\xi)\,((\cdot)I - A(\xi))^{-1} B(\xi) + K(\xi) \,. \tag{60}$$

e) Вычислим $n \times n$-матричную функцию $P(\xi) = P^*(\xi)$ (веществениную в случае вещественных данных) единственным образом из уравнения Ляпунова в области G

$$P(\xi)\, A(\xi) + A^*(\xi)\, P(\xi) = -F_1(\xi) - L(\xi)L^*(\xi) \,. \tag{61}$$

Доказательство В основных частях доказательства теорема следует из леммы Калмана-Якубовича-Попова для матриц (KYP-лемма [24]). Во всех шагах алгоритма вещественно-аналитические матричные функции преобразуются в вещественно-аналитические функции. ■

Замечание 2 *Предположим, что псевдодифференциальные операторы* A, B, C, F_1, F_2 *и* F_3 *в 49 зависят непрерывно от времени* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда вычисление зависимого от времени квадратичного функционала наблюдения* V *в смысле теоремы 1, которая представлена псевдодифференциальным оператором* $P(t, D)$ *в* $H^\infty(G)$, *может быть сведено к задаче решения дифференциальных уравнений Лурье-Риккати для абсолютно непрерывных по* t *и вещественно-аналитических по* ξ *символов* $P(t,\xi), L(t,\xi)$ *и* $K\,(t,\xi)$ *в* $\mathbb{R}\times G$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \dot{P}(t,\xi) + A^*(t,\xi)P\,(t,\xi) + \, P(t,\xi)A\,(t,\xi) + \, L(t,\xi)L^*(t,\xi) & = & -F_1(t,\xi)\;, \\ P(t,\xi)\,B(t,\xi) - \, L(t,\xi)\,K(t,\xi) & = & -F_2(t,\xi)\;, \\ K(t,\xi)\,K^*(t,\xi) & = & -F_3(t,\xi)\;. \end{array}\right\} \tag{62}$$

Достаточные частотные условия для разрешимости (62) приводятся в [25] (периодические по t *операторы) и в [19] (общие ограниченные по* t *операторы).*

Пример 1 Рассмотрим уравнение теплопроводности на стержне бесконечной длины

$$\tfrac{\partial y}{\partial t} = a\,\tfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + u(x,t)\;, \tag{63}$$

$$u(x,t) = \varphi\,(y(x,t))\;, \quad y(x,0) = y_0(x)\;, \tag{64}$$

где $a > 0$ - параметр и $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - заданная нелинейная функция, которая удовлетворяет неравенству

$$\|\varphi\,(y)\| \le \mu\|y\| \quad , \quad \forall y \in L^2(\mathbb{R})\;. \tag{65}$$

Здесь $\|\cdot\|$ обозначает норму в $L^2(\mathbb{R})$ и $0 < \mu < 2$ также является параметром. Отсюда следует, что φ характеризуется квадратичной формой в $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, заданной как

$$\mathcal{F}(y,u) := \mu^2\|y\|^2 - \|u\|^2\,. \tag{66}$$

Запишем (63) – (66) как систему (39), (40), (51) с операторными символами

$$A(\xi) = -a\,\xi^2, \quad B(\xi) \equiv 1\;, \tag{67}$$

$$F_1(\xi) \equiv \mu^2\,, \quad F_2(\xi) \equiv 0\,, \quad F_3(\xi) \equiv -1\,. \tag{68}$$

Эти символы определяются в области $G \subset \mathbb{R}$, которая будет задана ниже. Рассмотрим для этой системы частотную характеристику

$$\chi(i\omega, \xi) = (i\omega + a\,\xi^2)^{-1}\,. \tag{69}$$

Легко видеть, что (69) - вещественно-аналитическая функция в области

$$G_1^{'} := \left\{(\xi, \omega) \in \mathbb{R}^2 : (1 - a\,\xi^2)^2 + \omega^2 < 1\right\}\,. \tag{70}$$

Теперь рассмотрим параметризованную функцию Попова Π, определённую относительно функционала (66) через

$$\mathcal{F}(\chi(i\omega, \xi)u, u, \xi) =: u^*\Pi(i\omega, \xi)u\,.$$

Отсюда следует, что

$$\Pi(i\omega, \xi) = \mu^2|\chi(i\omega, \xi)|^2 - 1\,. \tag{71}$$

Частотное условие (54) для (71) с $(\omega, \xi) \in G_1$, выполнено в области

$$G^{'} := \left\{(\omega, \xi) \in \mathbb{R}^2 : \xi > 0,\ \mu^2 < \omega^2 + a^2\xi^4 < 2\,a\,\xi^2\right\}\,.$$

(Для отрицательного ξ можно рассмотреть другую компоненту $G_1^{'}$.) Отсюда вытекает, что символы должны быть определены в области

$$G := \text{proj}\ G^{'} = \left\{\xi > 0\ :\ \mu^2 < a^2\xi^4 < 2\,a\,\xi^2\right\} = \left\{\xi \in \mathbb{R} : \sqrt{\mu/a} < \xi < \sqrt{2/a}\right\}\,.$$

Ясно, что пара $(A(\xi), B(\xi))$ из (67) стабилизируема в G. Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены, и поэтому существуют вещественнно-аналитические в области G символы $P(\xi), L(\xi)$ и $K(\xi)$, являющиеся решением следующих уравнений Лурье в G:

$$-2\,P(\xi)\,a\,\xi^2 + L^2(\xi) \;=\; -\mu^2\,, \tag{72}$$

$$P(\xi) - L(\xi)\,K(\xi) \;=\; 0\,, \tag{73}$$

$$K^2(\xi) \;=\; 1\,. \tag{74}$$

Явное решение (72) – (74) может быть легко вычислено. Последнее уравнение (74) выполняется при условии $K(\xi) \equiv 1$. Из (73) следует, что $P(\xi) \equiv L(\xi)$. Подставим это значение в первое уравнение (72) и получим квадратное уравнение для $P(\cdot)$ в области G

$$P^2(\xi) - 2\,a\,\xi^2 P(\xi) + \mu^2 = 0\,. \tag{75}$$

Одно решение (75) - вещественно-аналитическая в G функция

$$P(\xi) = a\,\xi^2 + \sqrt{a^2\xi^4 - \mu^2}\ ,$$

которая может рассматриваться как символ псевдодифференциального оператора $P(D)$, $D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, в пространстве $H^{\pm\infty}(G)$ с областью G, указанной выше. Заметим, что начальная функция y_0 из (64) также должна быть взята из $H^{\infty}(G)$. $\square$

Список литературы

[1] Banks, H. T. and K. Ito: A unified framework for approximation in inverse problems for distributed parameter systems. *Control-Theory and Advanced Technology*, **4**, 73 – 90 (1988).

[2] Березанский, Ю. М.: Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. *Наук. Думка*, Киев, (1965).

[3] Cao, J.: Prediction of plastic wrinkling using the energy method. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **66**, 646 – 652 (1999).

[4] Dickey, R. W.: Free vibrations and dynamic buckling of the extensible beam. *J. Math. Anal. Appl.*, **29**, 443 – 454 (1970).

[5] Dubinskii, Yu. A.: Algebra of pseudodifferential operators with analytic symbols and applications to mathematical physics. *Uspekhi Matemat. Nauk*, **37**, 5, 97 – 137 (1982).

[6] Dubinskii, Yu. A.: Sobolev Spaces of Infinite Order and Differential Equations. *Kluwer Academic Publ., Mathematics and its applications*, Dordrecht (1986).

[7] Duvant, G. and J.-L. Lions: Inequalities in Mechanics and Physics. *Springer-Verlag*, Berlin (1976).

[8] Han, W. and M. Sofonea: Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **38**, 2, 556 – 579 (2000).

[9] Клюшников, В. Д.: Устойчивость упругопластических систем. *Наука*, Москва (1980).

[10] Kuttler, K. L. and M. Shillor: Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions. *Comm. Contemp. Math.* **1**, 1, 87 – 123 (1999).

[11] Лихтарников, А. Л.: Частотная теорема для псевдодифференциальных операторов с аналитическим символом. *Численные методы в задачах математического моделирования.* Ленинград, 80 – 83 (1989).

[12] Likhtarnikov, A. L. and V. A. Yakubovich: The frequency theorem for equations of evolutionary type. *Siberian Math. J.* **17**, 5, 790 – 803 (1976).

[13] Likhtarnikov, A. L. and V. A. Yakubovich: Dichotomy and stability of uncertain nonlinear systems in Hilbert spaces. *Algebra and Analysis.* **9**, 6, 132 – 155 (1997).

[14] Lions, J.-L.: Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites nou Linéaires. *Dunod*, Paris (1969).

[15] Lions, J.-L.: Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. *Springer-Verlag*, New York (1971).

[16] Michel, A. N. and D. W. Porter: Practical stability and finite-time stability of discontinuous systems. *IEEE Trans. Circuit Theory*, **19**, 2, 123 – 129 (1972).

[17] Панков, А. А.: Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. *Наук. Думка*, Киев (1986).

[18] Salamon, D.: Realization theory in Hilbert space. *Math. Systems Theory*, **21**, 147 – 164 (1989).

[19] Savkin, A. V.: Generalizations of the Kalman-Yakubovich lemma and their applications. *In: 12th World Congress International Federation of Automatic Control*, Sydney, **1**, 475 – 478 (1993).

[20] Шестаков, А. А.: Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. *Наука*, Москва (1990).

[21] Taylor, M.: Pseudodifferential Operators. *Princeton University Press*, Princeton (1981).

[22] Treves, F.: Introduction to Pseudo-Differential and Fourier operators. (I, II), *Plenum Press*, New York (1980).

[23] Weiss, L. and E. F. Infante: On the stability of systems defined over a finite time interval. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **54**, 44 – 48 (1965).

[24] Yakubovich, V. A.: The frequency theorem in control theory. *Siberian. Math. J.*, **14**, 2, 384 – 419 (1973).

[25] Yakubovich, V. A.: Linear-quadratic optimization problem and the frequency theorem for periodic systems. I, *Siberian. Math. J.*, **27**, 614 – 630 (1986).