ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Управление в нелинейных системах

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

М.С.Кабриц

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Университетская ул., д. 28,
С.-Петербургский государственный университет,
кафедра Теоретической кибернетики,
e-mail: mkabrits@mail.ru

Аннотация.

Рассматривается нелинейная импульсная система и эквивалентная непрерывная нелинейная система, получаемая из исходной заменой импульсного элемента его статической характеристикой. Изучается критический случай одного нулевого корня характеристического уравнения линеаризованной системы, при котором асимптотическая устойчивость эквивалентной системы определяется членами более высокого порядка. Показано, что из асимптотической устойчивости эквивалентной системы следует асимптотическая устойчивость нелинейной импульсной системы.

[0]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 02-01-00542 и Совета по грантам президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ-2257.2003.1).

1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную импульсную систему, описываемую функционально-дифференциальными уравнениями (1),(2).

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + [b_0 + b_1(x,\sigma)]\xi + a(x,\sigma), \\ &\dot{\zeta} = \xi + \alpha(x,\sigma), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\sigma = c^* x - \rho\zeta, \qquad \xi = \mathcal{M}\sigma, \tag{2}$$

где $A \in \mathbf{R}^{m\times m}$ — гурвицева матрица, b_1, a, α — непрерывные m-мерные вектор-функции, $b_0, c \in \mathbf{R}^m$ — постоянные векторы, ρ — постоянная величина, все величины вещественны, $*$ — знак транспонирования. $\mathcal{M}$ — нелинейный оператор, описывающий работу импульсного модулятора. $\xi(t)$ — сигнал на выходе импульсного модулятора , $\sigma(t)$ — сигнал на входе. $\mathcal{M}$ отображает каждую непрерывную на $[0,+\infty)$ в функцию $\sigma(t)$ и последовательность $\{t_n\}$ $(n = 0,1,2,\ldots; t_0 = 0)$, такие что

1) существуют такие положительные постоянные T и ϑ, что для всех n верна оценка

$$\vartheta T \le t_{n+1} - t_n \le T; \tag{3}$$

2) функция $\xi(t)$ кусочно непрерывна и знакопостоянная на каждом промежутке $[t_n, t_{n+1})$;

3) t_n зависит только от значений $\sigma(\tau)$ при $\tau \le t_n$, $\xi(t)$ зависит только от значений $\sigma(\tau)$ при $\tau \le t$;

4) существует такая непрерывная и ограниченная на $(-\infty,+\infty)$ функция $\varphi(\sigma)$, что при каждом n найдется $\widetilde{t}_n \in [t_n, t_{n+1})$, при котором среднее значение n-го импульса

$$v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \xi(t)\,dt$$

удовлетворяет соотношению

$$v_n = \varphi(\sigma(\widetilde{t}_n)). \tag{4}$$

Функция $\varphi(\sigma)$ описывает статическую характеристику импульсного модулятора и обладает следующими свойствами:

$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ при $|\sigma| < \delta$, $\quad \varphi(\sigma) = k(|\sigma|)\sigma$, где $k(|\sigma|) > 0$ при $\sigma \ne 0$, $\quad k(0) = 0$, $k'(|\sigma|)\sigma \to 0$ при $\sigma \to 0$.

5)Если $b_1 \not\equiv 0$, то существует такое $\xi_* > 0$, что если $|\sigma(t)| < \delta$ при всех $t > 0$, то и $|\xi(t)| < \xi_*$ при всех $t > 0$.

Свойствами 1)–5) обладает большинство из применяемых в технике видов модуляторов (широтно-импульсная модуляция первого и второго рода, частотная модуляция первого и второго рода, амплитудная, комбинированная и др.)[1,2]

Если в (1),(2) ξ заменить на $\varphi(\sigma)$, то получим непрерывную систему, которую назовем эквивалентной. В [3] было показано, что из устойчивости по первому приближению эквивалентной системы вытекает при достаточно высокой частоте импульсации асимптотическая устойчивость импульсной системы (1),(2). Как известно [4], если характеристическое уравнение линеаризованной нелинейной системы имеет корни на мнимой оси, то асимптотическая устойчивость нелинейной системы зависит от структуры нелинейных членов, которыми в случае системы (1) являются $a(x, \sigma), b_1(x, \sigma)$, $\alpha(x, \sigma)$ и $\varphi(\sigma)$.

Задача заключается в установлении условий, при которых состояние равновесия $x = 0, \zeta = 0$ системы (1),(2) асимптотически устойчиво.

2 Формулировка результата

Пусть в системе (1) функции $a(x, \sigma), b_1(x, \sigma), \alpha(x, \sigma)$ непрерывны в области $\|x\| < \varepsilon, \quad |\sigma| < \delta$.

Предположим также выполнение условий

$$\lim_{\|x\|\to 0,\, |\sigma|<\delta} \frac{\|\alpha(x, \sigma)\|}{\|x\|^2} = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\|x\|\to 0,\, |\sigma|<\delta} \frac{\|a(x, \sigma)\|}{\|x\|} = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{\|x\|\to 0,\, |\sigma|<\delta} \frac{\|b_1(x, \sigma)\|}{\|x\|} = 0, \tag{7}$$

Для исследования устойчивости системы (1),(2) воспользуемся методом усреднения [5]. Для этого введем функции $v(t) = v_n$ при $t \in [t_n, t_{n+1})$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ и $u(t) = \int\limits_0^t [\xi(\lambda) - v(\lambda)]\, d\lambda$.

Сделав в уравнениях (1),(2) замену

$$
\begin{aligned}
x &= y + b_0 u, \\
\zeta &= \eta + u
\end{aligned}
\tag{8}
$$

получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= Ay + Ab_0 u + a(x,\sigma) + b_1(x,\sigma)\xi + b_0 v, \\
\dot{\eta} &= v + \alpha(x,\sigma),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
\sigma = c^* y - \rho\eta - æu, æ = \rho - c^* b_0 \tag{10}
$$

Здесь и далее под x понимаем выражение (8).

Предположим, что

$$
\rho > 0 \tag{11}
$$

и рассмотрим функцию Ляпунова

$$
V(y,\eta) = y^* H y + \frac{\rho\eta^2}{2}, \tag{12}
$$

где положительно-определенная матрица H является решением уравнения Ляпунова $A^*H + HA = -I$, в котором I— единичная $m \times m$ матрица.

Производная по времени $\dot{V}$, взятая в силу системы (9), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{V} = -\|y\|^2 + 2y^* HAb_0 u + 2y^* Hb_0 v + 2y^* Hb_1(x,\sigma)\xi + \\
&+ 2y^* Ha(x,\sigma) + \rho\eta v + \rho\eta\alpha(x,\sigma)
\end{aligned}
$$

Будем чертой сверху обозначать "замороженные"функции, которые на промежутках $[t_n, t_{n+1})$ принимают значения, вычисленные в точке $\widetilde{t}_n$. Например, $\overline{\sigma}(t) = \sigma(t_n)$ при $t_n \le t < t_{n+1}$. $\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Согласно (4) справедливо соотношение

$$
v = \varphi(\overline{\sigma}) = k(|\overline{\sigma}|)\overline{\sigma}
$$

Отсюда следует представление

$$
\overline{\sigma} = \frac{v}{k(|\overline{\sigma}|)} \tag{13}
$$

Из (10) и (13) вытекает равенство:

$$
\begin{aligned}
\rho\eta v &= c^* y v - \sigma v - æuv = \\
&= c^* y v - (\sigma - \overline{\sigma})v - \frac{v^2}{k(|\overline{\sigma}|)} - æuv
\end{aligned}
$$

В силу которого $\dot{V}$ примет вид

$$\dot{V} = -\|y\|^2 - \frac{v^2}{k(|\overline{\sigma}|)} + M,$$

где

$$M = 2y^* H(Ab_0 u + b_0 v) + 2y^* H b_1(x,\sigma)\xi +$$
$$+2y^* H a(x,\sigma) + c^* y v - (\sigma - \overline{\sigma})v - \text{æ} u v +$$
$$+c^* y \alpha - \sigma\alpha - \text{æ} u \alpha$$

Поскольку $k(|\sigma|) \to 0$ при $|\sigma| \to 0$, то $k(|\sigma|) < \delta'(\delta_0)$ при $|\sigma| \leq \delta_0$, где $\delta'(\delta_0) \to 0$ при $\delta_0 \to 0$ и для $\dot{V}$ получаем оценку

$$\dot{V} = -\|y\|^2 - \frac{1}{\delta'(\delta_0)} v^2 + M, \tag{14}$$

При достаточно малом δ_0 коэффициент при v^2 в (14) будет сколь угодно большим и будет мажарировать члены с v^2, возникающие при оценке M.

Преобразуем M следующим образом

$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_9$, где

$$\begin{aligned}
M_1 &= 2y^* H(Ab_0 u + b_0 v),\\
M_2 &= 2y^* H b_1(x,\sigma)\xi,\\
M_3 &= 2y^* H a(x,\sigma),\\
M_4 &= c^* y v,\\
M_5 &= \text{æ} u v,\\
M_6 &= c^* y \alpha,\\
M_7 &= \text{æ} u \alpha,\\
M_8 &= \sigma\alpha,\\
M_9 &= (\sigma - \overline{\sigma})v.
\end{aligned}$$

Как будет показано ниже, члены $M_1 \ldots M_8$ оцениваются через $\|y\|^2 + |v|^2$, а M_9 допускает интегральную оценку через $\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} (\|y\|^2 + |v|^2)dt$.

В работе [5] доказано, что $u(t)$ и $v(t)$ связаны соотношением

$$|u(t)| \leq T|v(t)| \tag{15}$$

Для того, чтобы оценить величину M, оценим ее слагаемые.

В силу (15) имеет место неравенство

$$M_1 \le \frac{\mu}{3}\|y^*H\|^2 + \frac{3}{\mu}\|Ab_0u + b_0v\|^2 \le \frac{\mu}{3}\|y^*H\|^2 +$$
$$+\frac{6}{\mu}[\|Ab_0\|^2T^2 + \|b_0\|^2]v^2,$$

где μ — положительный параметр, который будет выбран ниже

В силу (5),(6),(7) и (15) справедливы следующие оценки:

$$\|a\| \le \delta_1(\varepsilon_0)\|y + b_0u\| \le \delta_1(\varepsilon_0)\|y\| + \delta_1(\varepsilon_0)\|b_0\|Tv,$$

где $\|x\| \le \varepsilon_0 < \varepsilon, \quad \delta_1(\varepsilon_0) \to 0$ при $\varepsilon_0 \to 0$.

Отсюда вытекают неравенства:

$$\begin{aligned} &\|a\|^2 \le 2\delta_1(\varepsilon_0)[\|y\|^2 + \|b_0\|^2T^2v^2], \\ &\|b_1\|^2 \le 2\delta_2(\varepsilon_0)[\|y\|^2 + \|b_0\|^2T^2v^2], \\ &\|\alpha\| \le 2\delta_3(\varepsilon_0)\|x\|^2, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0), \delta_3(\varepsilon_0) \to 0$ при $\varepsilon_0 \to 0$.

Согласно (16) имеют место соотношения

$$|M_2| \le \frac{\mu}{3}|y^*H\|^2 + \frac{3}{\mu}\|b_1(x,\sigma)\xi\|^2 \le$$
$$\le \frac{\mu}{3}\|y^*H\|^2 + \frac{6}{\mu}\delta_2(\varepsilon_0)|\xi_*|^2(\|y\|^2 + \|b_0\|^2T^2v^2),$$
$$|M_3| \le \frac{\mu}{3}\|y^*H\|^2 + \frac{3}{\mu}\|a(x,\sigma)\|^2 \le$$
$$\le \frac{\mu}{3}\|y^*H\|^2 + \frac{6}{\mu}\delta_1(\varepsilon_0)(\|y\|^2 + \|b_0\|^2T^2v^2),$$
$$|M_4| \le \frac{\mu}{2}\|c^*\|^2\|y\|^2 + \frac{1}{2\mu}v^2,$$
$$|M_5| \le æTv^2,$$
$$|M_6| \le \|c^*y\|\delta_3(\varepsilon_0)\|x\|^2 \le \delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0\|c^*\|\|y\|\|y + b_0u\| \le$$
$$\le \delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0\|c^*\|\|y\|[\|y\| + \|b_0\|T|v|] \le$$
$$\le \delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0\|c^*\|\left[\|y\|^2 + \|b_0\|^2T^2\left(\frac{\mu}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2\mu}v^2\right)\right],$$
$$|M_7| \le æT\delta_3(\varepsilon_0)|v|\ \|x\|^2 \le æT\delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0|v|\ \|y + b_0u\| \le$$

$$\leq æT\delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0|v|\ [\|b_0\|T|v| + \|y\|] \leq æT\delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0\Big[T\|b_0\|v^2 +$$

$$+\frac{\mu\|y\|^2}{2} + \frac{1}{2\mu}v^2\Big],$$

$$|M_8| \leq |\sigma|\delta_3(\varepsilon_0)\|x\|^2 \leq 2\delta_0\delta_3(\varepsilon_0)[\|y\|^2 + \|b_0\|^2T^2v^2],$$

где $|\sigma| \leq \delta_0 < \delta$.

Оценим последнее слагаемое:

$$|M_9| \leq \frac{\mu}{2}|\sigma - \overline{\sigma}|^2 + \frac{1}{2\mu}v^2$$

При помощи полученных неравенств оценим теперь величину M следующим образом:

$$\begin{aligned} M \leq F_1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0), \delta_3(\varepsilon_0), \mu, \delta_0)\|y\|^2 + \\ +F_2(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0), \delta_3(\varepsilon_0), \mu, \delta_0)v^2 + F_3(\mu)|\sigma - \overline{\sigma}|^2, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0), \delta_3(\varepsilon_0), \mu, \delta_0) = \mu\|H\|^2 + \frac{6}{\mu}\left[\delta_2(\varepsilon_0)|\xi_*|^2 + \delta_1(\varepsilon_0)\right] + \\
&+\|c\|^2\frac{\mu}{2} + \delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0\|c\|\left[\|b_0\|^2T^2\frac{\mu}{2} + 1\right] + 2\delta_0\delta_3(\varepsilon_0) + æT\delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0\frac{\mu}{2}, \\
&F_2(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0), \delta_3(\varepsilon_0), \mu, \delta_0) = \frac{6}{\mu}\Big[\|Ab_0\|^2T^2 + \|b_0\|^2 + \delta_2(\varepsilon_0)|\xi_*|^2\|b_0\|^2T^2 + \\
&+\delta_1(\varepsilon_0)\|b_0\|^2T^2\Big] + æT + \frac{1}{\mu} + \delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0\|c^*\|\ \|b_0\|^2T^2\frac{1}{2\mu} + \\
&+2\delta_3(\varepsilon_0)\delta_0\|b_0\|^2T^2 + æ\delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0T\left[\|b_0\|T + \frac{1}{2\mu}\right], \\
&F_3(\mu) = \frac{\mu}{2}
\end{aligned}$$

Известно [5], что для любой абсолютно непрерывной функции ζ с $\dot{\zeta} \in L_2[\alpha, \beta]$ и любого $\widetilde{t} \in [\alpha, \beta]$ справедливо неравенство Виртингера

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}[\zeta(\widetilde{t}) - \zeta(t)]^2\,dt \leq \frac{4(\alpha - \beta)^2}{\pi^2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}|\dot{\zeta}(t)|^2\,dt, \tag{18}$$

С помощью этого неравенства оценим выражение

$$S_n = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}|\sigma - \overline{\sigma}|^2dt \tag{19}$$

Из (10) имеем:

$$S_n \le S_n^1 + S_n^2 + S_n^3,$$

где

$$S_n^1 = 3 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} |c^* y(\widetilde{t}_n) - c^* y(t)|^2 dt,$$

$$S_n^2 = 3 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} |\rho\eta(t) - \rho\eta(\widetilde{t}_n)|^2 dt,$$

$$S_n^3 = 3 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} æ^2 |u(t) - u(\widetilde{t}_n)|^2 dt,$$

В силу (9) и (18) S_n^1 оценивается следующим образом

$$S_n^1 \le \frac{12T^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} |c^* \dot{y}|^2 dt \le$$

$$\le \frac{12T^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} |c^* Ay + c^* Ab_0 u + c^* b_0 v + c^* b_1(x,\sigma)\xi + c^* a(x,\sigma)|^2 dt$$

Отсюда и из неравенства (16) получаем соотношение

$$S_n^1 \le G_1^1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0)) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|y\|^2 dt + G_2^1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0)) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} v^2 dt,$$

где

$$G_1^1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0)) = \frac{60T^2}{\pi^2} \Bigg[\|c^* A\|^2 + 2\delta_2(\varepsilon_0) \|c\|^2 |\xi_*|^2 + 2\delta_1(\varepsilon_0) \|c\|^2 \Bigg],$$

$$G_2^1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0)) = \frac{60T^2}{\pi^2} \Bigg[|c^* Ab_0|^2 T^2 + |c^* b_0|^2 +$$

$$+2\|c\|^2 \|b_0\|^2 T^2 \Bigg(\delta_2(\varepsilon_0) |\xi_*|^2 + \delta_1(\varepsilon_0) \Bigg) \Bigg]$$

Аналогичным образом получаем неравенство

$$S_n^2 \le \frac{12T^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} |\rho\dot{\eta}|^2 dt \le \frac{12T^2\rho^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} [v + \alpha(x,\sigma)]^2 dt \le$$

$$\le \frac{24T^2\rho^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} [v^2 + \delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0^2\|y + b_0 u\|^2] dt \le$$

$$\le G_1^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|y\|^2 dt + G_2^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} v^2 dt,$$

где

$$G_1^2(\delta_3(\varepsilon_0)) = \frac{48T^2\rho^2\delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0^2}{\pi^2}$$

$$G_2^2(\delta_3(\varepsilon_0)) = \frac{24T^2\rho^2}{\pi^2}[1 + 2\delta_3(\varepsilon_0)\varepsilon_0^2\|b_0\|^2 T^2],$$

а также оценку

$$S_n^3 \le G_2^3 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} v^2 dt,$$

где $G_2^3 = 12æ^2 T^2$.

Таким образом, имеем следующую оценку величины (19)

$$S_n \le \left[G_1^1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0)) + G_1^2(\delta_3(\varepsilon_0))\right] \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|y\|^2 dt +$$

$$+ \left[G_2^1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0)) + G_2^2(\delta_3(\varepsilon_0)) + G_2^3\right] \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} v^2 dt$$

Из полученной оценки для S_n и неравенства (17) следует соотношение:

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} M \le L_1(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0), \delta_3(\varepsilon_0), \mu, \delta_0) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|y\|^2 dt + \\ + L_2(\delta_1(\varepsilon_0), \delta_2(\varepsilon_0), \delta_3(\varepsilon_0), \mu, \delta_0) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} v^2 dt, \end{aligned} \qquad (20)$$

где

$$L_1(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)=F_1(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)+$$
$$+F_3(\mu)\left[G_1^1(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0))+G_1^2(\delta_3(\varepsilon_0))\right]$$
$$L_2(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)=F_2(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)+$$
$$+F_3(\mu)\left[G_2^1(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0))+G_2^2(\delta_3(\varepsilon_0))+G_2^3\right]$$

Из (14) и (20) получаем соотношение

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\dot V dt\le -\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\|y\|^2dt-\frac{1}{\delta'(\delta_0)}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}|v|^2dt+\\ +L_1(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\|y\|^2dt+\\ +L_2(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}|v|^2dt\end{aligned}\tag{21}$$

Введем обозначения: $y_n=y(t_n)$, $\eta_n=\eta(t_n)$, $V_n=V(y(t_n),\eta(t_n))$.

Из (21) вытекает следующее неравенство

$$\begin{aligned}V_{n+1}-V_n\le(-1+L_1(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\|y\|^2dt+\\ +(-\frac{1}{\delta'(\delta_0)}+L_2(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}|v|^2dt\end{aligned}\tag{22}$$

Выберем μ таким образом, чтобы $1>L_1(0,0,0,0)$, и будем считать, что δ_0 и ε_0 столь малы, что

$\lambda_1=1-L_1(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)>0,$

$\lambda_2=\dfrac{1}{\delta'(\delta_0)}-L_2(\delta_1(\varepsilon_0),\delta_2(\varepsilon_0),\delta_3(\varepsilon_0),\mu,\delta_0)>0.$

Тогда неравенство (22) примет вид

$$V_{n+1}+\lambda_1\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\|y\|^2dt+\lambda_2\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}|v|^2dt\le V_n$$

Просуммировав по n от 0 до $N-1$, получаем для произвольного N равномерную относительно N оценку

$$V_N + \lambda_1 \int\limits_0^{t_N} \|y\|^2 dt + \lambda_2 \int\limits_0^{t_N} |v|^2 dt \leq V_0 \tag{23}$$

Воспользуемся этим неравенством для доказательства устойчивости по Ляпунову.

Согласно (8) $y(0) = x(0)$, $\eta(0) = \zeta(0)$.

Поэтому из (23) вытекает, что при всех n справедливо соотношение

$$\|y_n\| + |\eta_n| \leq \nu(\nu_0), \tag{24}$$

причем $\nu(\nu_0) \to 0$ при $\nu_0 = \|x(0)\| + |\zeta(0)| \to 0$.
Оценим теперь $\|y(t)\|$ и $|\eta(t)|$ при $t_n < t < t_{n+1}$.

Введя вектор-функцию

$$z(t) = \left\| \begin{array}{c} y(t) \\ \eta(t) \end{array} \right\|$$

запишем при $t_n < t < t_{n+1}$ систему (9) в виде

$$\dot{z} = \Phi, \tag{25}$$

где $\|\Phi\|$ оценивается следующим образом

$$\|\Phi\| \leq \lambda_3 \|z\| + \lambda_4 |v_n|, \tag{26}$$

где постоянные λ_3 и λ_4 не зависят от n.

Из (23) вытекает неравенство $\lambda_2(t_{n+1} - t_n) v_n^2 \leq V_0$.

Отсюда, согласно (3)

$$v_n^2 \leq \frac{V_0}{\vartheta T \lambda_2} \tag{27}$$

В силу (25) и (26) справедливо неравенство

$$\|\Phi\| \leq \lambda_3 \|z\| + \lambda_0, \tag{28}$$

где $\lambda_0 \to 0$ при $\nu_0 \to 0$.

Проинтегрировав (25), получим равенство

$$z(t) = z(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t} \Phi dt$$

Отсюда в силу (28) вытекает оценка

$$\|z(t)\| = \|z(t_n)\| + \lambda_0 T + \lambda_3 \int\limits_{t_n}^{t} \|z\| dt$$

Согласно (24) следует неравенство

$$\|z\| \le \mu_0 + \lambda_3 \int\limits_{t_n}^{t} \|z\| dt,$$

где $\mu_0 = \nu(\nu_0) + \lambda_0 T$.

Обозначив правую часть этого неравенства через $p(t)$, получим соотношение

$$\dot{p} = \lambda_3 \|z\| \le \lambda_3 p$$

Отсюда вытекает оценка

$$p(t) \le e^{\lambda_3 T} p(t_n) = e^{\lambda_3 T} \mu_0$$

Таким образом получим неравенство

$$\|z(t)\| \le e^{\lambda_3 T} \mu_0,$$

из которого следует, что $\|y(t)\| + |\eta(t)| \to 0$ при $|\zeta(0)| + \|x(0)\| \to 0$.

В силу (8) устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $x = 0, \zeta = 0$ доказана.

Покажем теперь, что $\|x(t)\|, |\zeta(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$, если $\|x(0)\|, |\zeta(0)|$ достаточно малы.

В силу (23) справедливы свойства

$$\|y\| \in L_2[0, +\infty),\ v \in L_2[0, +\infty) \tag{29}$$

Поскольку функция $v(t)$ постоянна на промежутке $[t_n, t_{n+1})$, то из (3) и (29) вытекает асимптотика

$$v(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{30}$$

Следовательно, согласно (15) и $u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. В силу доказанного выше $\|y(t)\|$ и $|v(t)|$ равномерно ограничены. Отсюда в силу уравнения (9) вытекает равномерная ограниченность $\|\dot{y}\|$. Поэтому согласно (29) справедливо свойство

$$\|y(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{31}$$

В силу (30), (11), (10) и свойств функции $k(|\sigma|)$ следует соотношение

$$\eta(\widetilde{t}_n) \to 0 \quad \text{при} \quad \widetilde{t} \to +\infty \tag{32}$$

Убедимся, что

$$\eta(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{33}$$

Предположим, что существует такое $q > 0$ и такая последовательность t'_{n_k}, что $t'_{n_k} \in [t_{n_k}, t_{n_{k+1}})$, $t'_{n_k} \to +\infty$ и $|\eta(t'_{n_k})| > q$.

По формуле конечных преращений запишем $\eta(t'_{n_k})$ следующим образом $\eta(t'_{n_k}) = \eta(\widetilde{t}_{n_k}) + \dot{\eta}(\hat{t}_{n_k})(t'_{n_k} - \widetilde{t}'_{n_k})$, где $\hat{t}_{n_k} \in [t_{n_k}, \widetilde{t}_{n_k}]$.

Согласно (9), (30) и (5) справедливо свойство

$$\dot{\eta}(\hat{t}_{n_k}) \to 0 \quad \text{при} \quad \hat{t}_{n_k} \to +\infty$$

Поэтому и в силу (32) и (3) получаем, что

$$\eta(t'_{n_k}) \to 0 \quad \text{при} \quad t'_{n_k} \to +\infty,$$

что противоречит предположению.

В силу (8), (30), (31)

$$x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{34}$$

Из (33), (31) и (30) вытекает соотношение

$$\sigma(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

Отсюда и в силу соотношений (2) и (34)

$$\zeta(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

Таким образом доказано следующее утверждение

Теорема. Пусть матрица A — гурвицева, выполнены свойства 1)–5) и условия (5),(6),(7) и (11)

Тогда состояние равновесия $x = 0, \zeta = 0$ системы (1),(2) асимптотически устойчиво.

Список литературы

[1] Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М., 1973, 414с.

[2] Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев: Наука, 1970.

[3] Гелиг А.Х., Кабриц М.С. Асимптотическая устойчивость нелинейных импульсных систем. //Вестник СПбГУ, Сер. 1. 2003. Вып. 2.

[4] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1950, 472с.

[5] Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб, 1993, 266с.