*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 3, 2003*
*Электронный журнал,*
*рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal*
*e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

*Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

И.Е.ЗУБЕР

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2,
Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: zuber@EZ7332.spb.edu

**Аннотация.**

В статье рассматривается класс нелинейных систем с запаздывающим аргументом. Производятся два решения задачи стабилизации выделенного класса систем, каждое решение базируется на сформированном нелинейном преобразовании подобия, обеспечивающем матрице замкнутой преобразованной системы или матрице объекта преобразованной системы форму Фробениуса.

## 1 Введение

В настоящее время количество работ по системам с запаздыванием очень велико и продолжает возрастать. В предлагаемой статье рассматривается

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N НШ-2257.2003.1 Совета по грантам президента РФ и гранта N E 02-1,0-13.

класс систем с запаздыванием, часто встречающихся при формировании моделей систем управления физическими и биологическими процессами [1]. Расчет параметров модели как правило производится в момент времени, сдвинутый на величину $\tau$ относительно текущего момента $t$. Поэтому целесообразно ввести в рассмотрение класс нелинейных по состоянию систем, т.е. нелинейных по $x(t)$ и $x(t-\tau)$. Зависимость от управления предполагается линейной. Решение задачи стабилизации таких систем будем строить по аналогии с решением задачи стабилизации нелинейных систем, вводя в рассмотрение аналоги преобразований подобия, рассмотренные в [2, 3, 4].

## 2 Постановка задачи

Рассматривается нелинейная система управления с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = A(x(t-\tau), x(t))x(t) + b(x(t-\tau), x(t))u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $A(x(t-\tau), x(t))$ — заданная равномерно ограниченная $n \times n$-матрица объекта, $b(x(t-\tau), x(t))$ — заданный равномерно ограниченный вектор распределения управления.

Предполагается существование частных производных от $A(x(t-\tau), x(t))$, $b(x(t-\tau), x(t))$ по всем аргументам порядка до $2n-1$ включительно и их равномерная ограниченность.

Допустимым предполагается управление обратной связью по состоянию

$$u = s^*(X_{n-1})x(t), \tag{2}$$

где $X_k$ — набор векторов $x(t), x(t-\tau), \ldots, x(t-k\tau)$.

**Цель:** Определить вектор обратной связи $s(X_{n-1})$, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость в целом замкнутой системе (1), (2).

## 3 Основные результаты

Решение поставленной задачи будем производить, вводя в рассмотрение последовательно два преобразования подобия специального вида. Рассмотрим

$$y(t) = T(X_{n-1})x(t), \tag{3}$$

обеспечивающее матрице объекта $\widetilde{A}(y)$ преобразованной системы

$$\dot{y}(t) = \widetilde{A}(y)y + \widetilde{b}(y)u \tag{4}$$

форму Фробениуса с последней функциональной строкой $\alpha^*(y) = (\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y))$,

$$\widetilde{A}(y) = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1(y) & \alpha_2(y) & & \ldots & \alpha_n(y) \end{array} \right|, \tag{5}$$

а вектору распределения управления $\widetilde{b}(y(t))$ вид последнего единичного орта, т.е.

$$b(y) = (0, \ldots, 0, 1)^* = e_n. \tag{6}$$

Формирование искомого преобразования производится следующим построением:

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & (y_1(t), \ldots, y_n(t))^*, \\ y_1(t) & = & m^*(X_{n-1})x(t), \\ y_2(t) & = & \frac{d}{dt}y_1(t), \\ \vdots & & \vdots \\ y_n(t) & = & \frac{d}{dt}y_{n-1}(t), \end{array} \tag{7}$$

где дифференцирование производится в силу однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(x(t-\tau), x(t))x(t) = A(X_1)x(t), \tag{8}$$

т.е. система (7) имеет вид

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & m^*(X_{n-1})x(t), \\ y_2(t) & = & \frac{dm^*}{dt}x(t) + m^*\frac{dx}{dt} \\ \vdots & & \vdots \\ y_n(t) & = & \Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}m^*(X_{n-1}) + C_{n-1}^1\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}m^*(X_{n-1})L_1(X_1) + \cdots + \\ & & C_{n-1}^{n-2}\frac{d}{dt}m^*(X_{n-1})L_{n-2}(X_{n-2}) + m^*(X_{n-1})L_{n-1}(X_{n-1})\Big)x(t), \end{array} \tag{9}$$

где дифференцирование производится в силу (8), $L_i(X_i)$ — $i$-я производная от вектора $x(t)$ в силу системы (8), иногда называемая производной Ли. Отметим, что формирование производных Ли в силу системы с запаздывающим аргументом (8) отличается от формирования тех же производных для системы без запаздывания $\dot{x} = A(x)x$. Для тех и других систем имеем

$$L_1(\cdot) = A(\cdot),$$
$$L_j(\cdot) = \Big(\frac{d}{dt} + A(\cdot)\Big)L_{j-1}(\cdot),$$

где "$(\cdot)$"означает аргумент. При этом аргумент $L_j$ в системе без запаздывания от индекса $j$ не зависит. Однако для систем с запаздывающим аргументом имеем $L_2(X_2)$, … $L_{n-1}(X_{n-1})$, поскольку дифференцирование по $x(t-\tau)$ включает в рассмотрение матрицу $A(X_2)$ и т.д.

По построению системы (7), (9) матрица преобразованной системы (4) есть матрица Фробениуса с последней функциональной строкой $\alpha^*(y) = (\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y))$.

Определим теперь вектор $m(X_{n-1})$ условиями тождественности

$$T(X_{n-1})b(X_1) = e_n. \tag{10}$$

Перенумеруем тождества (10), обозначая их $(10_1), \ldots, (10_n)$. Сформируем последовательно производные от системы (10), обозначая $10_i^{(j)}$ — $j$-ю производную от тождества $10_i$. Введем в рассмотрение следующие разности тождеств:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = (10_2) - (10_1^{(1)}) = m^*(X_{n-1})f_1(X_1),\\
&\Delta_2 = (10_3) - 2\Delta_1^{(1)} - (10_1^{(2)}) = m^*(X_{n-1})\Big(f_2(X_2) - 2\frac{df_1}{dt}(X_1)\Big),\\
&\Delta_3 = (10_4) - 3\Delta_2^{(1)} - 3\Delta_1^{(2)} - (10_1^{(3)}) = m^*(X_{n-1})\Big(f_3 - 3\frac{df_2}{dt} - 3\frac{d^2 f_1}{dt^2}\Big),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta_k = (10_{k+1}) - C_k^1\Delta_{k-1}^{(1)} - C_k^2\Delta_{k-2}^{(2)} - \cdots - (10_1^{(k)}),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $f_k(X_k) = \Big(L_k(X_k) - \frac{d^k}{dt^k}\Big)b(X_1)$,

$$\begin{aligned}
&\Delta_k = m^*(X_{n-1})b_k, \quad b_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \frac{d^j}{dt^j} f_{k-j},\\
&\Delta_k = 0 \quad \text{при} \quad k \le n-1, \qquad \Delta_n = 1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\Delta_i^{(j)}$ — $j$-я производная от разностного уравнения $\Delta_i$, $C_k^j$ — биномиальные коэффициенты.

Справедливость равенств (11), (12) проверяется методом математической индукции, при этом формулы (12) совпадают с формулами аналогичного преобразования для нелинейной системы без запаздывания [3] при

$\tau = 0$. Таким образом, вектор $m(X_{n-1})$ получается решением линейного алгебраического уравнения

$$m^*(X_{n-1}) = B^{-1}(X_{n-1})e_n,$$

$B = \|b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\|$, $\quad b_0(X_1) = b(X_1)$, $\quad b_k(X_k)$, $k = \overline{1, n-1}$ определяются формулами (12), т.е.

$$T(X_{n-1}) = \left| \begin{array}{l} e_n^* B^{-1}(X_{n-1}) \\ \dfrac{d}{dt}(e_n^* B^{-1}(X_{n-1})) + e_n^* B^{-1}(X_{n-1}) L_1(X_1) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1} C_{n-j}^j \dfrac{d^j}{(dt)^j} e_n^* B^{-1}(X_{n-1}) L_{n-1-j}(X_{n-1-j}) \end{array} \right|, \qquad (13)$$

Для того, чтобы устойчивость исходной системы следовала из устойчивости преобразованной (13) системы, необходимо и достаточно, чтобы преобразование (13) было преобразованием типа Ляпунова [3], т.е. одно-однозначно и равномерно ограниченным вместе со своей первой производной и своим обратным преобразованием $T^{-1}(X_{n-1})$.

Перейдем к определению условий существования равномерно ограниченного обратного преобразования (13). Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, проведенные в [4], для пары $A(X_1), b(X_1)$ убеждаемся в том, что преобразование

$$z(t) = P^{-1}(X_{n-1})x(t), \qquad (14)$$

где $P(X_{n-1})$ — матрица управляемости пары $A(X_1), b(X_1)$,

$$P(X_{n-1}) = |b(X_1), L_1(X_1)b(X_1), \ldots, L_{n-1}(X_{n-1})b(X_1)|,$$

обеспечивает матрице $\widetilde{\widetilde{A}}(z)$ преобразованной системы

$$\dot{z} = \widetilde{\widetilde{A}}(z)z + \widetilde{\widetilde{b}}(z)u, \quad u = \widetilde{\widetilde{s}}^*(z)z \qquad (15)$$

вертикальную форму Фробениуса, т.е.

$$\widetilde{\widetilde{A}} = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \ldots & & \beta_1(\cdot) \\ 1 & 0 & & & \beta_2(\cdot) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \beta_n(\cdot) \end{array} \right|, \qquad (16)$$

и выполнение условия

$$\widetilde{\widetilde{b}}(z) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^*. \tag{17}$$

Переходим от переменной $x(t)$ к переменной $y(t)$ преобразованием $T(X_{n-1})$, а от переменной $y(t)$ к переменной $z(t)$ преобразованием вида (14). Отметим, что матрица управляемости $P_1(y)$ системы (1), преобразованной (3), (13), т.е. системы (4), имеет треугольную форму с единицами по второй диагонали, а следовательно, равномерно невырождена. Таким образом, преобразование (3), (13) $T(X_{n-1})$ может быть записано в виде

$$T(X_{n-1}) = P^{-1}(X_{n-1})P_1(y),$$

т.е. для равномерной невырожденности преобразования с матрицей $T(X_{n-1})$ и преобразования ему обратного достаточно требовать равномерную невырожденность матрицы управляемости системы (1).

Таким образом, доказана

**Теорема 1** *Пусть система* (1) *равномерно управляема в целом, т.е. существует $\gamma > 0$, такая, что $|\det P(X_{n-1})| > \gamma$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $P(X_{n-1})$ — матрица управляемости системы* (1)*, определяемая формулой*

$$P(X_{n-1}) = |b(X_1), L_1(X_1)b(X_1), \dots, L_{n-1}(X_{n-1})b(X_1)|.$$

*Тогда существует и определяется формулами* (3), (13) *преобразование, обеспечивающее замкнутой системе* (1), (2) *и преобразованной системе один и тот же вид устойчивости.*

Отметим, что равномерная ограниченность матрицы $T(X_{n-1})$ следует из условий на параметры системы (1) и их частные производные.

Перейдем к решению задач стабилизации системы (1), используя два преобразования, (3), (13) и (14). Отметим, что преобразование (3), (13) обеспечивает форму Фробениуса и матрице объекта преобразованной системы (4), и матрице замкнутой системы

$$\widetilde{D}(y) = \widetilde{A}(y) + e_n\widetilde{s}^*(y). \tag{18}$$

Обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4)–(6) с матрицей (18), очевидно, можно, положив

$$\widetilde{s}(y) = -\alpha(y) + \xi, \tag{19}$$

где $\xi$ — произвольный постоянный вектор, компоненты которого совпадают с коэффициентами гурвицева полинома. В этом случае замкнутая система (1), (2) при

$$s^*(X_{n-1}) = \widetilde{s}^*(y)T(X_{n-1}), \tag{20}$$

где $\widetilde{s}^*(y)$ задан формулой (19), подобна линейной стационарной системе. Можно обеспечить экспоненциальную устойчивость в целом системе (4), а следовательно, и (1), (2), (20), не превращая матрицу (18) в постоянную.

Введем в рассмотрение форму

$$V(y) = y^*Hy, \tag{21}$$

где $H = H^*$ постоянная матрица и матрица $H_1 = H^{-1}$ имеет трехполосную форму

$$H_1 = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad h_{ii} > 0, \quad h_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{h_{ii}h_{jj}}, & j = i-1, \ \ j = i+1, \\ 0, & j < i-1, \ \ j > i+1. \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, $H > 0$. Выпишем производную формы $V(y)$ в силу системы (4)

$$\dot{V}(y) = y^*R(y)y, \quad R(y) = Q(y) + He_n\widetilde{s}^*(y) + \widetilde{s}(y)e_n^*H,$$
$$Q(y) = \widetilde{A}^*(y)H + HA(y).$$

Условие $R(y) < -\alpha H$, где $\alpha > 0$ — произвольно заданное число, эквивалентно условию

$$R_1(y) < -\alpha H_1 \quad \text{или} \quad R_1^\alpha(y) < 0, \quad \text{где} \quad R_1^\alpha(y) = R_1(y) + \alpha H_1, \tag{23}$$

где

$$R_1(y) = H_1R(y)H_1 = Q_1(y) + e_n\widetilde{s}^*(y)H_1 + H_1\widetilde{s}(y)e_n^*,$$
$$Q_1(y) = \widetilde{A}(y)H_1 + H_1\widetilde{A}^*(y).$$

Перейдем к определению вектора $\widetilde{s}(y)$, обеспечивающего выполнение условия (23). Выпишем

$$Q_1^\alpha(y) = Q_1(y) + \frac{\alpha}{2}H_1 = \{q_{ij}^{(1)}\}.$$

Имеем

$$\begin{array}{lcll} q_{ii}^{(1)} & = & 2h_{i\,i+1} + \alpha h_{ii}, & \\ q_{i\,i\mp1}^{(1)} & = & 2h_{i\mp1\,i\mp1}, & \\ q_{i\,i\mp2}^{(1)} & = & h_{i\mp1\,i\mp2}, & \\ q_{ij}^{(1)} & = & 0, & i+2 < j < n, \quad j < i-2, \\ g_{jn}^{(1)} & = & \alpha^*(y)h^j, & \text{где } h^j \text{ — } j\text{-й столбец матрицы } H_1. \end{array}$$

Полагаем

$$\widetilde{s}(y) = -\lambda(y) H e_n. \tag{24}$$

Тогда

$$R_1^\alpha(y) = Q_1^\alpha(y) - 2\lambda(y) e_n e_n^*, \tag{25}$$

т.е. главные диагональные миноры порядка до $(n-1)$ включительно у матриц $Q_1^\alpha(y)$ и $R_1^\alpha(y)$ совпадают. Выбираем теперь числа $h_{ii}$, $i = \overline{i,n}$ так, чтобы в последовательности главных диагональных миноров матрицы $Q_1^\alpha(y)$, $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 2h_{12}+\alpha h_{11}$, …, $\delta_n = \det Q_1^\alpha(y)$ была $n-1$ перемена знаков [5], т.е. $\operatorname{sign}\delta_j = (-1)^j$, $j = \overline{0, n-1}$. Отметим, что в силу (25)

$$\det R_1^\alpha(y) = \det Q_1^\alpha(y) - 2\lambda(\alpha, y)\delta_{n-1}(\alpha, y),$$

т.е. выбором $\lambda(\alpha, y)$ обеспечивается последняя перемена знака в последовательности главных диагональных миноров матрицы $R_1^\alpha(y)$, и, в силу критерия Сильвестра [6], отрицательная определенность матрицы $R_1^\alpha(y)$. Таким образом, доказана следующая

**Теорема 2** *Пусть $\lambda$ удовлетворяет условию*

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \lambda_*(\alpha) < 0, \\ -\frac{1}{2}\lambda_*(\alpha) & \text{при} \quad \lambda_*(\alpha) > 0, \end{cases} \tag{26}$$

*где*

$$\lambda_*(\alpha) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{\det Q_1^\alpha(y)}{\delta_{n-1}}$$

*и $\delta_{n-1}$ — $(n-1)$-й главный диагональный минор матрицы $Q_1^\alpha(y) = \widetilde{A}(y)H_1 + H_1\widetilde{A}^*(y) + \alpha H$.*

*Тогда вектор*

$$s^*(X_{n-1}, \alpha) = \lambda(\alpha) H T(X_{n-1}) \tag{27}$$

*обеспечивает экспоненциальную устойчивость в целом системы* (1), (2), (25), (27) *и существование ее функции Ляпунова*

$$W(X_{n-1}) = x^*(t) T^{-1^*}(X_{n-1}) H T^{-1}(X_{n-1}) x(t),$$

*удовлетворяющей условию*

$$\dot{W}(X_{n-1}) < -\alpha W(X_{n-1}).$$

Решение задачи стабилизации системы (1), (2) на базе преобразования (3), (13) завершено. Перейдем к решению задачи стабилизации системы (1), (2) на базе преобразования (14). Очевидно, что для того, чтобы преобразование (14) было преобразованием типа Ляпунова, т.е. чтобы из устойчивости преобразованной системы следовала устойчивость того же типа исходной системы и обратно, необходима и достаточна равномерная невырожденность матрицы управляемости исходной системы. Таким образом, достаточные условия существования преобразований (3), (13) и (14) совпадают.

Проведем стабилизацию системы (1), (2), преобразованной формулой (14). Введем в рассмотрение матрицу

$$\Omega_1^\alpha(z) = \widetilde{\widetilde{A}}(z)H_0 + H_0\widetilde{\widetilde{A}}(z)^* + \alpha H_0,$$

где $H_0$ имеет структуру матрицы $H_1$ из (22), и форму

$$\widetilde{\widetilde{V}}(z) = z^* H_0^{-1} z.$$

Рассматриваем главные диагональные миноры матрицы $\Omega_1^\alpha(z)$ и согласно [7] убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Пусть $\Omega_\alpha^i$ — правый нижний блок матрицы $\Omega_1^\alpha(z)$ порядка $i \times i$, $q_{ij}$ — его элементы, $q_i$ — его столбцы, $\delta^i$ — его определитель.

Тогда 1) $q_{ii}$ линейно зависит от $h_{i+1}$ и не зависит от $h_j$ при $j < i+1$;

2) $q_{ij}$ при $i \neq j$ не зависит от $h_k$ при $k < i$;

3) выбором числа $h_{i-1}$ можно обеспечить требуемый знак (и знакопостоянство) $\delta^i$.

Доказательство утверждений 1, 3 содержится в [7]. Выбором числа $\lambda_1$ из условия $\lambda_1 < -\sup_{z\in\mathbb{R}^n}(\det\Omega_1/\delta^{n-1})$ и формируем вектор обратной связи преобразованной системы в виде

$$\widetilde{\widetilde{s}}(\alpha, z) = \lambda_1 H_0 e_1. \tag{28}$$

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 3** *Пусть матрица управляемости системы* (1) *равномерно невырождена. Тогда для системы* (1), (2) *существует равномерно невырожденное и равномерно ограниченное преобразование* (14) *и стабилизирующее управление* (2) *определяется равенством*

$$s^*(X_{n-1}) = \widetilde{\widetilde{s}}^*(\alpha, z)P(X_{n-1}),$$

*где* $\widetilde{\widetilde{s}}(\alpha, z)$ *определяется формулой* (28), $P(X_{n-1})$ — *матрица управляемости системы* (1).

## 4 Заключение

Стабилизация вполне управляемой в целом системы (1), (2) проведена двумя способами. Каждый способ стабилизации определяется преобразованием подобия типа Ляпунова, переводящим систему в форму, позволяющую явное решение задачи стабилизации.

Отметим, что формирование преобразования (3), (13) значительно более трудоемко, чем формирование преобразования (14), однако решение задачи стабилизации преобразованной системы значительно проще при использовании преобразования (3), (13).

Отметим также, что преобразования подобия (3), (13) и (14), приводящие систему (1), (2) в форму, позволяющую получить явное решение задачи стабилизации, имеет тот же вид, что и аналогичные преобразования, используемые для стабилизации нелинейных систем [2, 3, 4].

Отличие полученных здесь преобразований (3), (13) и (14) от известных [2, 3, 4] сводится к отличию в расчете производных Ли для систем с запаздыванием.

## Литература

[1] Михайлов В.В., Решетников Ю.С. Моделирование популяций севанского сига. Ленинград : ВЦ АН СССР, 1988.

[2] Isidory A. Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, London, Paris. 1989.

[3] Зубер И.Е. Спектральная стабилизация нелинейных систем на основе специального преобразования подобия. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2000, вып. 2 (N 8), С. 8–13.

[4] Зубер И.Е. Спектральная стабилизация динамических систем. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2001, вып. 1 (N 1), С. 15–22.

[5] Дубров А.М., Зубер И.Е. Стабилизация нелинейного объекта, представимого в виде последовательного соединения нелинейных одномерных звеньев. // АиТ, 1986, N 2, С. 156–159.

[6] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

[7] Зубер И.Е. Синтез экспоненциально устойчивого наблюдателя для нелинейных систем с одним выходом. // АиТ, 1998, N 3, С. 27–35.