ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИСТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ: СЛУЧАЙ ПОСТРОЕНИЯ ЗА КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ

Александр Георгиевич Ченцов

Россия, 620219, Екатеринбург, С.Ковалевской, д.16,
Институт математики и механики. Уральское отделение Российской Академии Наук
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Кирилл Валерьевич Корляков

Россия, 620083, Екатеринбург, пр.Ленина, д.51,
Уральский государственный университет,
Кафедра прикладной математики,
e-mail: kkorlyakov@microtest.ru

Аннотация.

Рассматривается простейший пример задачи управления с помехой. Исследуется прямая, в смысле построения управляющих процедур (многозначных квазистратегий), версия известного метода программных итераций, который использовался ранее для построения функции цены дифференциальной игры и стабильного моста в смысле Н.Н.Красовского. Особенностью рассматриваемого примера является возможность такого выбора параметров управляемой системы, при котором построение квазистратегии управления удается осуществить после выполнения любого наперед

заданного числа итераций в смысле упомянутой прямой версии метода итераций.

Введение

Настоящая работа является продолжением [1], где рассматривался пример построения квазистратегии управления посредством метода программных итераций (МПИ), причем данную квазистратегию, разрешающую задачу управления, оказалось невозможным реализовать после исполнения любого конечного числа итераций. В настоящей работе, напротив, указана возможность построения такой квазистратегии за любое наперед выбранное число итераций. Это достигается рациональным выбором ограничений на управления: полезное и помеховое. Тем самым, в сочетании с результатами [1], получается исчерпывающее представление возможных случаев реализации (прямой версии) МПИ для целей непосредственного построения управляющих процедур.

Известно, что для исследования дифференциальных игр (ДИ) исключительно важную роль играет удачный выбор формализации. Наиболее плодотворное направление здесь, как представляется, связано с формализацией Н.Н.Красовского (см.,например, [2-6]), в рамках которой предусматривается построение полезного управления по принципу обратной связи. Эта формализация позволяет проводить качественное исследование ДИ, и, вместе с тем, определяет естественный способ инженерной реализации в схемах с пошаговым формированием управлений в дискретные моменты времени. В рамках этой формализации была установлена основополагающая теорема существования решения позиционной ДИ (теорема об альтернативе Н.Н.Красовского, А.И.Субботина), определена структура разрешающих стратегий в терминах конструкций экстремального прицеливания и экстремального сдвига, а также указан класс так называемых регулярных ДИ, для которых упомянутые стратегии можно построить на основе вспомогательных программных конструкций, связанных в идейном отношении с принципом максимума Л.С.Понтрягина; см. в этой связи [2-6]. Одна из процедур построения полезного управления в [3,4,6,7] связана с использованием так называемого поводыря или модели, что обеспечивает, в частности, устойчивость процедуры к малым информационным помехам (см.[3,4]). Для построения модели (поводыря) можно использовать так называемые квазистратегии [7-9], в том числе и многозначные [10-17]. Нахождение квазистратегий, гарантированно разрешающих задачу управления, важно, стало быть, и с точки зрения эффективного построения реализуемых управляющих процедур; разумеется, решение ДИ в классе квазистратегий представляет и самостоятельный интерес (см. [7,8,15-17]).

Построение квазистратегий управления возможно, в принципе, на основе (более ранних) непрямых версий МПИ; см. в частности, [11,14], а также [18, с.181,182]. В частности, можно применить МПИ для построения стабильного моста в смысле Н.Н.Красовского, на основе которого затем, путем решения программных задач управления с фазовыми ограничениями, удается построить многозначную квазистратегию, гарантирующую наведение всех своих траекторий на целевое множество. Представляет, однако, интерес и соответствующая прямая версия МПИ, непосредственно конструирующая многозначную квазистратегию: см. [19-24]. Более того, непрямая и прямая версии МПИ тесно связаны; точнее, они находятся в двойственности: см. [25,26]. Используя эту двойственность, в [1] был построен вышеупомянутый пример итерационной реализации разрешающей квазистратегии за бесконечное число итераций. Здесь эта двойственность [25,26] применяется для другой цели, связанной с моделированием ДИ, требующих для своего решения заданного конечного числа итераций. Известно [11,14,18], что такие ДИ возникают при построении моделей управляемых процессов в некоторых механических системах, таких, например, как материальная точка с трением. Поэтому исследование ДИ, в которых решение достигается после выполнения конечного числа итераций (в схемах МПИ), представляет практический интерес.

1 Пример задачи управления с невыпуклым целевым множеством

Мы рассматриваем ниже простейшую задачу конфликтного управления, ориентируясь на [1,15]. Полагаем, что геометрические ограничения на выбор управления и помехи определяются одним и тем же множеством, а именно, отрезком $[-\alpha, \alpha]$, где $\alpha \in \mathcal{N} \doteq \{1; 2; ...\}$ (здесь и ниже $\doteq$ - равенство по определению). Рассматриваем скалярную систему Σ

$$\dot{x} = u + v, \ |u| \leq \alpha, \ |v| \leq \alpha, \tag{1.1}$$

в (1.1) u - полезное управление, а v - помеха. Функционирование Σ (1.1) рассматривается либо на основном промежутке времени $[0, 1]$, либо на отрезках вида $[t_*, 1], t_* \in [0, 1]$. Предполагается заданной начальная позиция

$z_0 \doteq (t_0, x_0)$, где $t_0 = 0, x_0 = 1$, а также целевое множество

$$M \doteq \{(1, x) : x \in \mathbf{R}, |x| \geq 1\} \tag{1.2}$$

первого игрока, формирующего управление $u = u(t)$. Мы полагаем, что при этом формировании используется многозначная квазистратегия [10,11], т.е. неупреждающий отклик на помеховую реализацию $v = v(t)$. Мы полагаем, что полезное управление $u(\cdot) = (u(t), 0 \leq t \leq 1)$ и помеха $v(\cdot) = (v(t), 0 \leq t \leq 1)$ могут выбираться из множества $\mathbf{B}$ всех борелевских функций, действующих из $[0, 1]$ в $[-\alpha, \alpha]$. Итак, возможности игроков, формирующих $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ одинаковы. Разумеется, для $t_* \in [0, 1]$, $x_* \in \mathbf{R}$, $u(\cdot) \in \mathbf{B}$ и $v(\cdot) \in \mathbf{B}$ функция $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ вида

$$t \to x_* + \int\limits_{t_*}^{t} u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_*}^{t} v(\tau)d\tau : \ [t_*, 1] \to \mathbf{R} \tag{1.3}$$

есть траектория Σ (1.1), соответствующая использованию (t_*, x_*) в качестве начальной позиции; в (1.3) интегралы понимаются так же, как и в [1]. Обозначим через

$$\mathbf{D} \doteq [0, 1] \times \mathbf{R} = \{(t, x) : \ t \in [0, 1], \ x \in \mathbf{R}\}$$

пространство позиций, через $\mathcal{D}$ - семейство всех подмножеств $\mathbf{D}$, а через $\mathcal{F}$ - семейство всех замкнутых множеств из $\mathcal{D}$. Данные соглашения также соответствуют [1]. Разумеется, $M \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{D} \in \mathcal{F}$. Первый игрок стремиться определить многозначную квазистратегию (см.[5, гл.IV], [8-11,13,14]), гарантирующую приведение всех своих движений на M. В данном случае решение этой задачи очевидно: первому игроку достаточно выбрать постоянное программное управление $u(t) \equiv 1$ и (для начальной позиции z_0) предоставить второму игроку право произвольного выбора помехи $v(\cdot) \in \mathbf{B}$.

В настоящей работе мы исследуем возможности МПИ для построения квазистратегии управления, т.е. мы рассматриваем работу общего метода решения ДИ, каковым является МПИ, в условиях задачи с известным ответом. Правда МПИ обеспечит нам "более свободную" реакцию на возможную помеху. Однако, как и в [1], здесь для нас более принципиальным является изучение возможностей самого МПИ. При этом будем ориентироваться на непосредственное построение квазистратегии методом программных итераций [18-24], который реализуется в бесконечномерном пространстве мультифункций, действующих в $\mathbf{B}$. Для исследования работоспособности этой версии МПИ мы используем двойственность [25,26], позволяющую применить более простые конструкции МПИ, восходящие к [10,14]. С этой целью введем оператор программного поглощения (ОПП) $\mathcal{A}_M$, действующий в $\mathcal{D}$ подобно [1]: если $H \in \mathcal{D}$, то $\mathcal{A}_M(H)$ есть множество всех позиций $(t, x) \in H$ таких, что $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}\ \ \exists u(\cdot) \in \mathbf{B}$:

$$\begin{gathered}(|x(1, t, x, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1)\ \& \\ \&\ ((\xi, x(\xi, t, x, u(\cdot), v(\cdot))) \in H\ \ \forall \xi \in [t, 1[)\end{gathered} \tag{1.4}$$

Если $H \in \mathcal{F}$, то последнее требование в (1.4) можно заменить следующим: $(\xi, x(\xi, t, x, u(\cdot), v(\cdot))) \in H\ \ \ \forall \xi \in [t, 1]$. В (1.4) мы имеем определение, подобное [18, гл.IV], [12,14], а также весьма общему определению [26] для абстрактной управляемой системы. Напомним, что $\mathcal{F}$ - есть инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}_M$, т.е. $\mathcal{A}_M(F) \in \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{F}$. Мы рассматриваем (в качестве вспомогательной) итерационную процедуру

$$(W_0 \doteq \mathbf{D})\ \&\ (W_k = \mathcal{A}_M(W_{k-1})\ \ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{1.5}$$

где $\mathcal{N} \doteq \{1; 2; ...\}$. Для удобства обозначений введем $\mathcal{N}_0 \doteq \mathcal{N} \cup \{0\}$. Последовательность $(W_k)_{k \in \mathcal{N}_0}$ реализуется в $\mathcal{F}$, а тогда при $k \in \mathcal{N}$ имеем свойство: W_k есть множество всех $(t, x) \in W_{k-1}$ таких, что $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}\ \exists u(\cdot) \in \mathbf{B}$:

$$(|x(1, t, x, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1)\ \ \&\ ((\xi, x(\xi, t, x, u(\cdot), v(\cdot))) \in W_{k-1}\ \ \forall \xi \in [t, 1])$$

Известно [10,14], что последовательность $(W_k)_{k \in \mathcal{N}_0}$ сходится монотонно к множеству W_∞ позиционного поглощения: W_∞ есть пересечение всех множеств $W_k,\ k \in \mathcal{N}_0$. Это утверждение гарантируется общими положениями теории МПИ (см.[12,14,18,26]). Введем

$$\mathcal{W} \doteq \{(t, x) \in \mathbf{D} \mid 1 \leq |x|\} \in \mathcal{F} \tag{1.6}$$

Мы используем далее соглашение $[0, \vartheta] = \emptyset$ при $\vartheta \in]-\infty, 0[$. Пусть (см.(1.6)) $\mathbf{H} :] - \infty, 1] \to \mathcal{F}$ есть такое отображение, что $\forall \vartheta \in] - \infty, 1]$

$$\mathbf{H}(\vartheta) \doteq W \cup ([0, \vartheta] \times \mathbf{R}) \tag{1.7}$$

Разумеется $\mathbf{H}(\vartheta) = W$ при $\vartheta < 0$; $\mathbf{H}(1) = \mathbf{D} = W_0$. В (1.7) задается некоторая "функция формы". Конкретная реализация МПИ переносится в данном случае в промежуток $] - \infty, 1]$, как и в [24]. Мы воспроизведем соответствующую последовательность $(\vartheta_k)_{k \in \mathcal{N}_0} = (\vartheta_k)_{k=0}^{\infty}$ посредством дополнительной итерационной процедуры на основе отображения

$$\gamma :] - \infty, 1] \to] - \infty, 1]$$

для которого $\gamma(\vartheta) \doteq \vartheta - 1/\alpha = (\vartheta\alpha - 1)/\alpha \;\; \forall\vartheta \in]-\infty, 1]$. Разумеется $\gamma(\vartheta) < \vartheta$ при $\vartheta \leq 1$. Упомянутая дополнительная процедура определяется как

$$(\vartheta_0 \doteq 1) \;\&\; (\vartheta_k = \gamma(\vartheta_{k-1}) \;\; \forall k \in \mathcal{N}) \tag{1.8}$$

В терминах (1.7), (1.8) наша ближайшая цель состоит в том, чтобы показать совпадение $W_k \equiv \mathbf{H}(\vartheta_k)$. Для этого мы покажем, следуя в идейном отношении конструкции [24,25], что при $\vartheta \in]-\infty, 1]$

$$\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta)) = \mathbf{H}(\gamma(\vartheta)) = (\mathbf{H} \circ \gamma)(\vartheta) \tag{1.9}$$

Если в (1.9) $\vartheta < 0$, то в силу (1.7) имеем совпадение $\mathbf{H}(\vartheta) = \mathcal{W}$ и, кроме того, $\gamma(\vartheta) \leq \vartheta < 0$, а тогда $\mathbf{H}(\gamma(\vartheta)) = \mathcal{W}$. С другой стороны из (1.1) и (1.6) следует, что $\mathcal{A}_M(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$; данное простое свойство связано с возможностью парировать в системе (1.1) любое помеховое управление, реализуя зануление фазовой скорости. В итоге (1.9) реализуется при $\vartheta < 0$ с очевидностью. Пусть теперь $\vartheta \in [0, 1]$. Выберем произвольную позицию $(t_*, x_*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$. Тогда $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta)$ и $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B} \; \exists u(\cdot) \in \mathbf{B}$:

$$\begin{gathered}(|x(1, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1) \;\& \\ \& \; ((\xi, x(\xi, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \;\; \forall \xi \in [t_*, 1])\end{gathered} \tag{1.10}$$

Здесь мы учли тот факт, что $\mathbf{H}(\vartheta) \in \mathcal{F}$ (см.(1.7)). Кроме того, в силу (1.7)

$$((t_*, x_*) \in \mathcal{W}) \cup (t_* \in [0, \vartheta]) \tag{1.11}$$

С другой стороны имеем равенство

$$\mathbf{H}(\gamma(\vartheta)) = \mathcal{W} \cup ([0, \gamma(\vartheta)] \times \mathbf{R}) \tag{1.12}$$

Поэтому $((t_*, x_*) \in \mathcal{W}) \Rightarrow ((t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\gamma(\vartheta)))$; см.(1.12). Допустим, что $(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}$, т.е. $|x_*| < 1$. Из (1.11) имеем свойство $t_* \in [0, \vartheta]$. Фиксируем $\overline{u} \in \mathbf{B}$ и, с учетом (1.10), подбираем $\overline{u} \in \mathbf{B}$ так, что при этом

$$\begin{gathered}(|x(1, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))| \geq 1) \;\& \\ \& \; ((t, x(t, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \quad \forall t \in [t_*, 1])\end{gathered} \tag{1.13}$$

В частности, последнее в (1.13) положение верно при $t \in]\vartheta, 1]$, что означает в силу (1.7) справедливость положения

$$1 \leq |x(\xi, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))| \;\; \forall \xi \in]\vartheta, 1] \tag{1.14}$$

(мы учли в (1.14) тот факт, что для $t \in]\vartheta, 1]$ непременно имеет место $(t, x(t, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))) \in \mathcal{W}$; см.(1.7)). Из первого положения в (1.13) и

(1.14) вытекает, что $1 \leq |x(t, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))|$ при $t \in]\vartheta, 1] \cup \{1\}$. С учетом непрерывности траектории $x(\cdot, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$ мы получаем, что

$$1 \leq |x(\vartheta, t_*, x_*, \overline{v}(\cdot), \overline{v}(\cdot))| \qquad (1.15)$$

Вместе с тем, $x(t_*, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot)) = x_*$, $|x_*| < 1$, а потому $t_* < \vartheta$. В силу (1.3), (1.15) мы имеем следующее свойство ($\overline{v}(\cdot) \in \mathbf{B}$ выбиралось произвольно); именно $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}\ \exists u(\cdot) \in \mathbf{B}$:

$$|x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v(\tau)d\tau| \geq 1 \qquad (1.16)$$

Для отдельного рассмотрения выделяем следующие два случая:

1) $\exists v(\cdot) \in \mathbf{B}:\ x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v(\tau)d\tau = 0$;

2) $|x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v(\tau)d\tau| > 0\ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$.

Целесообразно рассмотреть сначала случай 2). Введем $v_*(\cdot) = (v_*(t),\ 0 \leq t \leq 1) \in \mathbf{B}$ по правилу $v_*(t) \equiv -\alpha sgn(x_*)$, где для определенности $sgn(\xi) \doteq -1$ при $\xi < 0$ и $sgn(\xi) \doteq 1$ при $\xi \geq 0$. В этом случае

$$x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v_*(t)dt = [|x_*| - \alpha(\vartheta - t_*)]sgn(x_*)$$

где $\vartheta - t_* > 0$. Допустим, что $|x_*| - \alpha(\vartheta - t_*) < 0$, т.е.

$$0 \leq \tfrac{|x_*|}{\vartheta - t_*} < \alpha \qquad (1.17)$$

Пусть $v_{**} = (v_{**}(t),\ 0 \leq t \leq 1) \in \mathbf{B}$ определяется условием

$$v_{**}(t) \equiv -\tfrac{x_*}{\vartheta - t_*}$$

корректность определения $v_{**}(\cdot)$ обеспечена в (1.17). Имеем

$$x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v_{**}(t)dt = 0$$

что невозможно в рассматриваемом случае 2). Остается допустить, что $|x_*| - \alpha(\vartheta - t_*) \geq 0$, а тогда

$$|x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v_*(t)dt| = |x_*| - \alpha(\vartheta - t_*)$$

и, с учетом (1.16), для некоторого

$$u`(\cdot) = (u`(t),\ 0 \le t \le 1) \in \mathbf{B}$$

$$|x_*| - \alpha(\vartheta - t_*) + |\int\limits_{t_*}^{\vartheta} u`(\tau)d\tau| =$$

$$= |x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v_*(t)dt| + |\int\limits_{t_*}^{\vartheta} u`(t)dt| \ge$$

$$\ge |x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v_*(t)dt + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} u`(t)dt| \ge 1$$

и, тем более,

$$|x_*| \ge |x_*| - \alpha(\vartheta - t_*) + |\int\limits_{t_*}^{\vartheta} u`(t)dt| \ge 1$$

что невозможно при рассматриваемом условии $(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}$. Итак, случай 2) невозможен и остается рассмотреть случай 1). Пусть $\widehat{v}(\cdot) \in \mathbf{B}$ удовлетворяет условию

$$x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \widehat{v}(t)dt = 0$$

Вновь используя (1.16), мы получаем для некоторого $\widehat{u}(\cdot) \in \mathbf{B}$ свойство

$$\alpha(\vartheta - t_*) \ge |\int\limits_{t_*}^{\vartheta} \widehat{u}(t)dt| = |x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \widehat{u}(t)dt + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \widehat{v}(t)dt| \ge 1$$

и, как следствие, $t_* \le \vartheta - \frac{1}{\alpha}$ или $t_* \le \gamma(\vartheta)$. Данное неравенство установлено при $(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}$. Учитывая (1.11), мы получаем свойство

$$((t_*, x_*) \notin \mathcal{W}) \Rightarrow ((t_*, x_*) \in [0, \gamma(\vartheta)] \times \mathbf{R})$$

и, с учетом (1.7), имеем, как следствие, свойство

$$([t_*, x_*) \notin \mathcal{W}) \Rightarrow ((t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\gamma(\vartheta)))$$

Используя (1.12), мы имеем теперь во всех случаях свойство $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\gamma(\vartheta))$; итак, вложение

$$\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta)) \subset \mathbf{H}(\gamma(\vartheta)) \tag{1.18}$$

полностью доказано. На самом деле в (1.18) имеет место равенство. Действительно, пусть $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\gamma(\vartheta))$. По определению γ имеем $\gamma(\vartheta) \le \vartheta$ и, в силу (1.7), $\mathbf{H}(\gamma(\vartheta)) \subset \mathbf{H}(\vartheta)$. Стало быть, у нас $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\vartheta)$. Кроме того, из (1.7) имеем

$$((t^*, x^*) \in \mathcal{W}) \cup (t^* \in [0, \gamma(\vartheta)]) \tag{1.19}$$

Первый случай в (1.19) является наиболее простым: при $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$ достаточно полагать $u^* \doteq \alpha sgn(x^*)$, и $u^*(\cdot) \in \mathbf{B}$ определить в виде $u^*(t) \equiv u^*$. Тогда (при $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$) $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$ $\forall t \in [t^*, 1]$

$$|x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))| = |x^* + \alpha(t - t^*)sgn(x^*) + \int\limits_{t^*}^{t} v(\tau)d\tau| =$$

$$= |(|x^*| + \alpha(t - t^*))sgn(x^*) - (-\int\limits_{t^*}^{t} v(\tau)d\tau)| \geq |x^*| + \alpha(t - t^*) - |\int\limits_{t^*}^{t} v(\tau)d\tau| \geq$$
$$\geq |x^*| + \alpha(t - t^*) - \alpha(t - t^*) = |x^*| \geq 1$$

Это означает, что в первом (из рассматриваемых в (1.19)) случае $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$

$$(1 \leq |x(1, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))|) \ \& \ ((t, x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \ \ \forall t \in [t^*, 1]))$$

Последнее означает (тем более), что

$$((t^*, x^*) \in \mathcal{W}) \Rightarrow ((t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))) \tag{1.20}$$

Рассмотрим подробнее случай $(t^*, x^*) \notin \mathcal{W}$, что, в силу (1.19), означает: $t^* \in [0, \gamma(\vartheta)]$. Кроме того, у нас $|x^*| < 1$ и $\gamma(\vartheta) < \vartheta$. Пусть $\tilde{v}(\cdot) \in \mathbf{B}$ и

$$y^* \doteq x^* + \int\limits_{t^*}^{\vartheta} \tilde{v}(\tau)d\tau$$

полагаем, что $\tilde{u}(\cdot) \in \mathbf{B}$ имеет вид $\tilde{u}(t) \equiv a\ sgn(y^*)$. Ясно, что (см.(1.7))

$$(t, x(t, t^*, x^*, \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \ \ \forall t \in [t^*, \vartheta] \tag{1.21}$$

Если $t \in [\vartheta, 1]$, то в силу полугруппового свойства

$$x(t, t^*, x^*, \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)) = x(t, \vartheta, x(\vartheta, t^*, x^*, \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)), \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)) =$$
$$= y^* + \int\limits_{t^*}^{t} \tilde{u}(\tau)d\tau + \int\limits_{\vartheta}^{t} \tilde{v}(\tau)d\tau = [|y^*| + a(t - t^*)]sgn(y^*) + \int\limits_{\vartheta}^{t} \tilde{v}(\tau)d\tau$$

Из последнего выражения получаем оценку

$$\begin{aligned} |x(t, t^*, x^*, \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot))| &= |[|y^*| + \alpha(t - t^*)]sgn(y^*) - (-\int\limits_{\vartheta}^{t} \tilde{v}(\tau)d\tau)| \geq \\ &\geq |y^*| + \alpha(t - t^*) - |\int\limits_{\vartheta}^{t} \tilde{v}(\tau)d\tau| \geq |y^*| + \alpha(t - t^*) - \alpha(t - \vartheta) = \\ &= |y^*| + \alpha(\vartheta - t^*) \geq |y^*| + \alpha(\vartheta - \gamma(\vartheta)) = |y^*| + \alpha \times \tfrac{1}{\alpha} = |y^*| + 1 \geq 1 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Поскольку выбор $t \in [\vartheta, 1]$ был произвольным, то

$$(\bar{t}, x(\bar{t}, t^*, x^*, \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot))) \in \mathcal{W} \ \ \forall \bar{t} \in [\vartheta, 1]$$

С учетом (1.7), (1.21) получаем, что

$$(t, x(t, t^*, x^*, \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \ \ \forall t \in [t^*, 1]$$

Поскольку выбор $\tilde{v}(\cdot)$ был произвольным, с учетом (1.22) установлено, что (и при $(t^*, x^*) \notin \mathcal{W}$)

$$\begin{gathered}(|x(1, t^*, x^*, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1)\ \& \\ \&\ ((t, x(t, t^*, x^*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \ \ \forall t \in [t^*, 1])\end{gathered} \tag{1.23}$$

мы учли здесь, что $\vartheta \leq 1$. Коль скоро $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\vartheta)$, из (1.4) и (1.23) имеем:

$$((t^*, x^*) \notin \mathcal{W}) \Rightarrow ((t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta)))$$

С учетом (1.20) имеем окончательно свойство $(t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$. Поскольку выбор $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\gamma(\vartheta))$ был произвольным, вложение

$$\mathbf{H}(\gamma(\vartheta)) \subset \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$$

установлено, что, в сочетании с (1.18), означает справедливость (1.9) при $\vartheta \in [0, 1]$, а при $\vartheta < 0$ свойство (1.9) было установлено ранее. Итак,

$$\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta)) = \mathbf{H}(\gamma(\vartheta)) \ \ \forall \vartheta \in] - \infty, 1] \tag{1.24}$$

Вернемся к (1.5): имеем $\mathbf{H}(1) = \mathbf{H}(\vartheta) = \mathbf{D} = W_0$. Пусть $n \in \mathcal{N}_0$, таково, что $\mathcal{W}_n = \mathbf{H}(\vartheta_n)$. Тогда

$$W_{n+1} = \mathcal{A}_M(W_n) = \mathcal{A}_m(\mathbf{H}(\vartheta_n)) = \mathbf{H}(\gamma(\vartheta_n)) = \mathbf{H}(\vartheta_{n+1})$$

мы учли здесь (1.8) и (1.24). Тем самым, по индукции установлено, что

$$W_k = \mathbf{H}(\vartheta_k) = \mathcal{W} \cup ([0, \vartheta_k] \times \mathbf{R}) \ \ \forall k \in \mathcal{N}_0 \tag{1.25}$$

В этом случае имеем

$$W_\infty = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} W_k = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathbf{H}(\vartheta_k) \tag{1.26}$$

Из (1.25), (1.26) легко извлекается свойство: W_∞ совпадает с W_k при некотором $k \in \mathcal{N}$. В самом деле,

$$\vartheta_k = 1 - k\alpha^{-1} \tag{1.27}$$

при всех $k \in \mathcal{N}_0$ (при $k = 0$ равенство очевидно; если оно верно при $k = m \in \mathcal{N}_0$; то

$$\vartheta_{k+1} = \vartheta_{m+1} = \gamma(\vartheta_m) = \vartheta_m - \tfrac{1}{\alpha} = 1 - \tfrac{m}{\alpha} - \tfrac{1}{\alpha} = 1 - \tfrac{m+1}{\alpha}$$

чем и доказывается требуемое свойство $\vartheta_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$). Напомним, что $\alpha \in \mathcal{N}$, а тогда в силу (1.27) можно определить $\vartheta_\alpha \in]-\infty, 1]$ и $\vartheta_\alpha = 0$. Пусть при этом

$$\vartheta_{\alpha+1} = 0 - \tfrac{1}{\alpha} < 0$$

а тогда $W_{\alpha+1} = \mathbf{H}(\vartheta_{\alpha+1}) = \mathcal{W}$, т.к. $[0, \vartheta_{\alpha+1}] = \emptyset$. С другой стороны, если $k \in \mathcal{N}_0$ и $k < \alpha$, то в силу (1.7) и (1.27)

$$W_k = \mathbf{H}(\vartheta_k) = \mathcal{W} \cup ([0, \vartheta_k] \times \mathbf{R}) \neq \mathcal{W} \tag{1.28}$$

т.к. $\vartheta_k > 0$. Тогда, с одной стороны, $\mathcal{W} \subset W_\infty$ (см.(1.25), (1.26)), а с другой $W_\infty \subset W_{\alpha+1} = \mathcal{W}$ и, как следствие, $W_\infty = \mathcal{W}$ (см. также [27]). Далее, $W_\alpha = \mathcal{W} \cup (\{0\} \times \mathbf{R}) \neq \mathcal{W}$; W_α отличается от $W_\infty = \mathcal{W}$ "перемычкой" $\{0\} \times \mathbf{R}$. Стало быть, $\alpha + 1 \in \mathcal{N}$ есть первый номер $k \in \mathcal{N}$, для которого $W_\infty = W_k$.

2 Реализация прямой итерационной процедуры в пространстве мультифункций

Рассмотрим конкретизацию общих положений [19,21,22] для нашей простейшей задачи управления (см. также [29, гл.6]): имеется ввиду итерационная процедура в пространстве мультифункций, реализующая в пределе многозначную квазистратегию. Известно [25, 26], что данная процедура находится в двойственности с уже построенной в разделе 1 непрямой итерационной процедурой. Используя эту двойственность, можно исследовать более сложную прямую итерационную процедуру, привлекая свойства (1.25), (1.27). Совсем кратко напомним итерационную конструкцию [19-22] применительно к нашему примеру. Для краткости обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0, 1]: \quad \mathbf{C} = C([0, 1])$. Условимся, как и в [26], рассматривать в качестве траектории только отображения на $[0, 1]$ (здесь - аналогия с определением $\mathbf{B}$ раздела 1). Поэтому для $(t_*, x_*) \in \mathbf{D}$, $u(\cdot) \in \mathbf{B}$ и $v(\cdot) \in \mathbf{B}$ функцию

$$x_\leftarrow(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = (x_\leftarrow(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)),\ 0 \leq t \leq 1) \in \mathbf{C} \tag{2.1}$$

определяем следующим условием:

$$
\begin{gathered}
(x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \doteq x_* \ \forall t \in [0, t_*]) \ \& \\
\& \ (x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = x_* + \int\limits_{t_*}^{t} u(\tau) d\tau + \int\limits_{t_*}^{t} v(\tau) d\tau \ \forall t \in [t_*, 1])
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

итак, мы продолжаем траекторию (1.3) влево константой x_*. В согласии с [26] полагаем, при $(t_*, x_*) \in \mathbf{D}$ и $v(\cdot) \in \mathbf{B}$,

$$
S((t_*, x_*), v(\cdot)) \doteq \{x_{\leftarrow}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) : \ u(\cdot) \in \mathbf{B}\} \tag{2.3}
$$

Разумеется (2.1)-(2.3) введены здесь для единообразия с [26], хотя для наших целей основное значение имеет случай

$$
(t_* = 0) \ \& \ (x_* = 1) \tag{2.4}
$$

для которого $x_{\leftarrow}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) =$ $= x(\cdot, 0, 1, u(\cdot), v(\cdot)) \ \forall u(\cdot) \in \mathbf{B} \ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$. Стало быть, пучок $S((0,1), v(\cdot))$, где $v(\cdot) \in \mathbf{B}$, конкретизирующий (2.3) для основного случая (2.4), есть "обычный"пучок классических траекторий системы (1.1) для фиксированной начальной позиции (0,1) (см.(2.4)). Следуя [19-22] (см. также [29]) введем целевую мультифункцию. Именно по аналогии с [1] введем отображение

$$
\mathcal{C} : \ \mathbf{B} \to \mathcal{P}(\mathbf{C}) \tag{2.5}
$$

где $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ - семейство всех подмножеств $\mathbf{C} : \ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$

$$
\mathcal{C}(v(\cdot)) \doteq \{\mathbf{x} \in S((0,1), v(\cdot)) \mid 1 \leq |\mathbf{x}(1)|\} \tag{2.6}
$$

Мультифункция (2.5), (2.6) является многозначным аналогом псевдостратегии [17]. В связи с [26] полезно упомянуть одну интерпретацию $\mathcal{C}$ (2.5), полагая, что в построениях [26] $N \doteq \mathbf{D}$. Тогда

$$
\begin{gathered}
\mathcal{C}(v(\cdot)) = \{\mathbf{x} \in S((0,1), v(\cdot)) \mid \exists \vartheta \in [0,1] : \\
((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in M) \ \& \ (\forall t \in [0, \vartheta[: \ (t, \mathbf{x}(t)) \in N)\}
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

что согласуется с теоретическими конструкциями [26]. Через $\mathbf{M}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ обозначаем, как и в [1], множество всех отображений из $\mathbf{B}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{C})$, т.е. множество всех мультифункций из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$; см. также [25, 26]. Имеем, в частности, $\mathcal{C} \in \mathbf{M}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$. Попытаемся, следуя идеям [19-22] и [29], выделить у $\mathcal{C}$ "наибольшую неупреждающую часть". С этой целью введем конкретизацию оператора Г упомянутых работ. Для этого введем сначала ростки произвольных функций из $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$: если $t \in [0,1]$, то

$$
\begin{gathered}
(\Omega^0(w_1|t) \doteq \{w_2 \in \mathbf{B} \mid w_1(\tau) = w_2(\tau)\ \forall \tau \in [0,t]\}\ \forall w_1 \in \mathbf{B})\ \& \\
\&\ (Z_0(h_1|t) \doteq \{h_2 \in \mathcal{C} | h_1(\tau) = h_2(\tau)\ \forall \tau \in [0,t]\}\ \forall h_1 \in \mathbf{C})
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

по смыслу первое представление в (2.8) относится к росткам функций из $\mathbf{B}$, а второе - к росткам (непрерывных) функций из $\mathbf{C}$. В соответствии с [19-22], [29] оператор Γ действует в $\mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C})$ по правилу: $\forall \alpha \in \mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C})\ \forall w \in \mathbf{B}$

$$
\Gamma(\alpha)(w) \doteq \{f \in \alpha(w) \mid \alpha(\tilde{w}) \cap Z^0(f|t) \neq \emptyset\ \forall t \in [0,1]\ \forall \tilde{w} \in \Omega^0(w|t)\} \tag{2.9}
$$

С оператором Γ естественно связывается последовательность $(\Gamma^k)_{k \in \mathcal{N}_0}$ всех конечных степеней Γ, а также оператор Γ^∞ - бесконечная степень Γ; в этих определениях мы следуем [20-24]. Каждый из операторов $\Gamma^s,\ s \in \mathcal{N}_0,\ \Gamma^\infty$ действует в $\mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C})$. Разумеется, $\Gamma^0(\alpha) \equiv \alpha$ и $\Gamma^{k+1} = \Gamma \circ \Gamma^k\ \forall k \in \mathcal{N}_0$. Оператор Γ^∞ сопоставляет мультифункции $\alpha \in \mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C})$ мультифункцию $\Gamma^\infty(\alpha)$, у которой при $v(\cdot) \in \mathbf{B}$ множество $\Gamma^\infty(\alpha)(v(\cdot))$ есть пересечение всех множеств $\Gamma^k(\alpha)(v(\cdot)),\ k \in \mathcal{N}_0$. Нас интересует в данной работе только преобразование целевой мультифункции $\mathcal{C}$, которое определяется итерационной процедурой, реализующей $\mathcal{C}_s \doteq \Gamma^s(\mathcal{C})\ s \in \mathcal{N}_0$, и $\mathcal{C}_\infty \doteq \Gamma^\infty(\mathcal{C})$ по следуюшему правилу:

$$
(\mathcal{C}_0 \doteq \mathcal{C})\ \&\ (\mathcal{C}_k = \Gamma(\mathcal{C}_{k-1})\ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{2.10}
$$

$\mathcal{C}_\infty \in \mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C})$ имеет вид

$$
\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathcal{C}_k(v(\cdot))\ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B} \tag{2.11}
$$

В согласии [23, 24] на $\mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C})$ определяем поточечный порядок $\sqsubseteq$: для $\alpha_i \in \mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C}),\ i = 1,2$, условие $\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2$ тождественно свойству $\alpha_1(v(\cdot)) \subset \alpha_2(v(\cdot))\ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$. Тогда у нас $\mathcal{C}_k \sqsubseteq \mathcal{C}_{k-1}$ при $k \in \mathcal{N}$, а $\mathcal{C}_\infty$ есть монотонный в смысле [20-24] предел последовательности $(\mathcal{C}_s)_{s \in \mathcal{N}}$:

$$
(\mathcal{C}_s)_{s \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}_\infty
$$

У множества $\mathbf{N}$ всех неподвижных точек оператора Γ выделяем часть

$$
\mathbf{N}_0[\mathcal{C}] \doteq \{\alpha \in \mathbf{N} | \alpha \sqsubseteq \mathcal{C}\} \tag{2.12}
$$

всех неупреждающих мультиселекторов $\mathcal{C}$; среди последних находятся искомые квазистратегии, разрешающие основную задачу. К процедуре (2.10), (2.11) мы относимся как к способу определения наибольшего в $(\mathbf{M}(\mathbf{B},\mathbf{C}),\sqsubseteq)$

элемента множества (2.12); (см.[29]). Этот элемент $(na)[\mathcal{C}]$ есть отображение [22, с.259]

$$v(\cdot) \longmapsto \bigcup_{\alpha\in\mathbf{N}_0[\mathcal{C}]} \alpha(v(\cdot)) : \ \mathbf{B} \to \mathcal{P}(\mathbf{C}) \tag{2.13}$$

Стало быть, у нас $(na)[\mathcal{C}] \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}]$ и $\alpha \sqsubseteq (na)[\mathcal{C}]$ $\forall \alpha \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}]$. Рассмотрим теперь вопрос о совпадении $\mathcal{C}_\infty$ и $(na)[\mathcal{C}]$ (2.13). Для этого заметим, что при $v(\cdot) \in \mathbf{B}$ в силу (2.2), (2.3) и определения $\mathbf{B}$ у нас $S((0,1), v(\cdot))$ есть непустой компакт в топологии равномерной сходимости пространства $\mathbf{C}$; из (2.6) следует, что $\mathcal{C}(v(\cdot))$ компакт в аналогичном смысле. Итак, $\mathcal{C}$ есть компактнозначное отображение из $\mathbf{B}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{C})$; топология $\mathbf{C}$ соответствует при этом равномерной сходимости. Эта топология сильнее топологии поточечной сходимости $\mathbf{C}$ (см.[30]), а тогда $\mathcal{C}$ компактнозначно в смысле топологии поточечной сходимости, что существенно для конструкций [20-24] (см. также главу 6 [29]). Поэтому (см. теорему 5.1 [22])

$$\mathcal{C}_\infty = \Gamma^\infty(\mathcal{C}) = (na)[\mathcal{C}] \tag{2.14}$$

Итак, согласно [20-24] $\mathcal{C}_\infty$ есть неупреждающий мультиселектор $\mathcal{C}$. На самом же деле (2.14) есть многозначная квазистратегия, т.к.

$$\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) \neq \emptyset \ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B} \tag{2.15}$$

Введем $\mathbf{U}_\uparrow \in \mathbf{B}$ по правилу: $\mathbf{U}_\rightarrow(t) \equiv \alpha$. Определяем оператор $\mathcal{U}$ из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ по правилу: $\mathcal{U}(v(\cdot)) \doteq x(\cdot, 0, 1, \mathbf{U}_\uparrow, v(\cdot))$ $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$. Тогда $\mathcal{U}(v(\cdot)) \in S((0,1), v(\cdot))$ $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$. При этом

$$\mathcal{U}(v(\cdot))(t) = 1 + \alpha t + \int\limits_0^t v(\tau) d\tau \geq 1 + \alpha t - \alpha t = 1$$

В силу (2.6) имеем $\mathcal{U}(v(\cdot)) \in \mathcal{C}(v(\cdot))$ $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$. Из (1.3) и определения $\mathcal{U}$ вытекает свойство неупреждаемости: если $v_1(\cdot) \in \mathbf{B}$ $t \in [0,1]$ и $v_2(\cdot) \in \Omega^0(v_1(\cdot)|t)$, то

$$(\mathcal{U}(v_1(\cdot))|[0,t]) = (\mathcal{U}(v_2(\cdot))|[0,t]) \tag{2.16}$$

Введем теперь оператор V из $\mathbf{B}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ по правилу: $V(v(\cdot)) = \{\mathcal{U}(v(\cdot))\}$. Далее, учтем (2.10), (2.11) и (2.16). Имеем с очевидного $\Gamma(V)(v(\cdot)) = V(v(\cdot))$ $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$. Итак, $V = \Gamma(V)$, т.е. $V \in \mathbf{N}$. Далее $V(v(\cdot)) \subset \mathcal{C}(v(\cdot))$ $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$. Это означает, что $V \sqsubseteq \mathcal{C}$, т.е. $V \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}]$ в силу (2.12). Из (2.13) получаем теперь $V(v(\cdot)) \subset (na)[\mathcal{C}](v(\cdot))$ при $v(\cdot) \in \mathbf{B}$. Как следствие, у нас $\mathcal{U}(v(\cdot)) \in \mathcal{C}_\infty(v(\cdot))$ $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$, чем и доказано (2.15). Итак, $\mathcal{C}_\infty$ есть многозначная квазистратегия, разрешающая задачу наведения. Если $H \in \mathcal{D}$,

$t_* \in [0,1]$, $x_* \in \mathbf{R}$ и $z_* = (t_*, x_*)$, то $\forall v(\cdot) \in \mathbf{B}$

$$\Pi(v(\cdot)|z_*, H) \doteq \{h \in S(z_*, v(\cdot)) | \exists \vartheta \in [t_*, 1] :$$
$$((\vartheta, h(\vartheta)) \in M) \ \& \ ((t, h(t)) \in H \ \forall t \in [t_*, \vartheta[)\} = \tag{2.17}$$
$$= \{h \in S(z_*, v(\cdot)) | (|h(1)| \geq 1) \ \& \ ((t, h(t)) \in H \ \forall t \in [t_*, 1[)\}$$

Данное определение соответствует [26]; в этой связи, снова в согласии с [26], имеем следующее определение оператора $\mathbf{A}$, действующего в $\mathcal{D}$: при $H \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{A}(H) \doteq \{z \in H \mid \Pi(v(\cdot) \mid z_*, H) \neq \emptyset \ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B}\} \tag{2.18}$$

Используя (2.17), (2.18), мы принимаем язык работ [26]. С учетом (1.4), (2.2), (2.3) и (2.17) имеем $\forall H \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{A}_M(H) = \{(t_*, x_*) \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathbf{B} \ \exists u(\cdot) \in \mathbf{B} :$$
$$(|x_{\leftarrow}(1, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1) \ \& \ ((\xi, x_{\leftarrow}(\xi, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in H \ \forall \xi \in [t_*, 1[)\} =$$
$$= \{(t_*, x_*) \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathbf{B} \ \exists h \in S((t_*, x_*), v(\cdot)) :$$
$$(|h(1)| \geq 1) \ \& \ ((t, h(t)) \in H \ \forall t \in [t_*, 1[)\} =$$
$$= \{z \in H \mid \Pi(v(\cdot) \mid z, H) \neq \emptyset \ \forall v(\cdot) \in \mathbf{B}\}$$

Итак (см.(2.18)), $\mathcal{A}_M(H) = \mathbf{A}(H) \ \forall H \in \mathcal{D}$. Иными словами, $\mathcal{A}_M = \mathbf{A}$. Поэтому (1.4) сводится к виду

$$(W_0 = \mathbf{D}) \ \& \ (W_k = \mathbf{A}(W_{k-1}) \ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{2.19}$$

С учетом (1.25) и (2.19) получили представление

$$\mathbf{H}(\vartheta_k) = \mathbf{A}(\mathbf{H}(\vartheta_{k-1})) = (\mathbf{A} \circ \mathbf{H})(\vartheta_{k-1}) \ \forall k \in \mathcal{N} \tag{2.20}$$

В (2.19), (2.20) имеем представление непрямой процедуры на основе МПИ в терминах [26].

3 Построение разрешающей квазистратегии за конечное число Γ-итераций

Мы возвращаемся к основной нашей цели: обоснованию того, что прямая итерационная процедура доставляет многозначную квазистратегию $\mathcal{C}_\infty$ после исполнения α итераций вида (2.10). Итак, мы покажем, что, в отличие от [1], имеет место

$$(\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}_\alpha) \ \& \ (\mathcal{C}_\infty \neq \mathcal{C}_k \ \forall k \in \overline{0, \alpha - 1}) \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. В силу (3.1) мы имеем возможность реализовать по любому наперед заданному натуральному числу s пример процедуры (2.10) сходящейся в точности за s итераций; этой цели мы добиваемся надлежащим выбором параметра α.

В (2.3) фактически введено отображение S из $\mathbf{D}\times\mathbf{B}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{C})$, удовлетворяющее всем требованиям работ [26]. В этой связи мы получаем возможность использовать установленную в [26] двойственность прямой и непрямой версии МПИ. Тогда, в частности,

$$\Gamma(\Pi(\cdot|(0,1),H)) = \Pi(\cdot|(0,1),\mathbf{A}(H)) \tag{3.2}$$

Конкретизацией общих утверждений [26] является

Предложение 3.1. $\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot|(0,1),\mathbf{H}(\vartheta_k))\ \forall k\in\mathcal{N}_0$

Разумеется, мы используем здесь представление (1.25). Наряду с конечными степенями $\mathbf{A}$, введем $\mathbf{A}^\infty$ - бесконечную степень $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^\infty$ действует в $\mathcal{D}$ по правилу

$$\mathbf{A}^\infty(H) \doteq \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0}\mathbf{A}^k(H)\ \forall k\in\mathcal{N}_0$$

В силу построений [26]

$$\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot|(0,1),\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D})) \tag{3.3}$$

По определению $\mathbf{A}^\infty$ имеем: $\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D})$ есть пересечение всех множеств $\mathbf{A}^k(\mathbf{D})$, $k\in\mathcal{N}_0$. В силу (2.19) получаем также равенство

$$\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D}) \doteq \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} W_k$$

откуда с учетом (1.26) и последующих положений раздела 1 получаем равенства

$$\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D}) = W_\infty = \mathcal{W} = W_{\alpha+1} \tag{3.4}$$

Здесь полезно учесть представление (1.25). Из (3.3), (3.4) имеем конкретное представление

$$\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot|(0,1),\mathcal{W}) \tag{3.5}$$

многозначной квазистратегии, определяемой в виде предела прямой итерационной процедуры (2.10), свойства которой являются предметом нашего исследования. Из (1.25) вытекает, что $\forall k\in\mathcal{N}_0\ v(\cdot)\in\mathbf{B}$

$$\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) = \Pi(v(\cdot)|(0,1),\mathcal{W}) \subset \Pi(v(\cdot)|(0,1),W_k) \tag{3.6}$$

В частности, (3.6) у нас имеет место при $k=\alpha$, т.е. (с учетом (1.25)) имеет место

$$\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) \subset \Pi(v(\cdot)|(0,1),\mathbf{H}(\vartheta_\alpha))\ \forall v(\cdot)\in\mathbf{B}$$

С учетом предложения 3.1 получаем $\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) \subset \mathcal{C}_\alpha(v(\cdot))\ \forall v(\cdot)\in\mathbf{B}$, т.е. $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{C}_\alpha$

Теорема 3.1. Справедливо представление 3.1.

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathcal{C}_\infty=\mathcal{C}_\alpha$. Для этого выберем и зафиксируем $v(\cdot)\in\mathbf{B}$. С учетом (2.17) и (3.5) получаем, что

$$\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) = \{h\in S((0,1),v(\cdot))|(|h(1)|\geq 1)\ \&\ ((t,h(t))\in\mathcal{W}\ \forall t\in[0,1[)\} \quad (3.7)$$

Из предложения 3.1. имеем равенство $\mathcal{C}_\alpha(v(\cdot))=\Pi(v(\cdot)|(0,1),\mathbf{H}(\vartheta_\alpha))$, а тогда (см.(2.17))

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_\alpha(v(\cdot)) = \{h\in S((0,1),v(\cdot))|(|h(1)|\geq 1)\ \&\\ \&\ ((t,h(t))\in\mathbf{H}(\vartheta_\alpha)\ \forall t\in[0,1[)\}\end{gathered} \quad (3.8)$$

где в силу (1.28) имеет место равенство $\mathbf{H}(\vartheta(\alpha))=\mathcal{W}\cup(\{0\}\times\mathbf{R})$. Мы знаем уже, что

$$\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) \subset \mathcal{C}_\alpha(v(\cdot)) \quad (3.9)$$

Выберем произвольно $h_0\in\mathcal{C}_\alpha(v(\cdot))$: тогда (в силу (3.8)) $h_0\in S((0,1),v(\cdot))$, $|h_0(1)|\geq 1$ и

$$(t,h_0(t))\in\mathcal{W}\cup(\{0\}\times\mathbf{R})\ \forall t\in[0,1[\quad (3.10)$$

Из (3.10) имеем свойство $(t,h_0(t))\in\mathcal{W}\ \forall t\in]0,1[$ и, с другой стороны (см. (2.2)) $h_0(0)=1\in\mathcal{W}$ согласно (1.2). В итоге $(t,h_0(t))\in\mathcal{W}\ \forall t\in[0,1[$. С учетом (3.7) имеем $h_0\in\mathcal{C}_\infty(v(\cdot))$, чем завершается обоснование вложения $\mathcal{C}_\alpha(v(\cdot))\subset\mathcal{C}_\alpha(v(\cdot))$. С учетом (3.9) имеем равенство $\mathcal{C}_\infty(v(\cdot))=\mathcal{C}_\alpha(v(\cdot))$. Стало быть, $\mathcal{C}_\infty=\mathcal{C}_\alpha$. Напомним теперь, что (см. (1.27))

$$0=\vartheta_\alpha<\vartheta_k\ \forall k\in\overline{0,\alpha-1}$$

Фиксируем $j\in\overline{0,\alpha-1}$. Тогда с учетом (1.27) имеем

$$\vartheta_{\alpha-1}=1-\tfrac{\alpha-1}{\alpha}=\tfrac{1}{\alpha}\leq\vartheta_j \quad (3.11)$$

Рассмотрим мультифункцию $\mathcal{C}_j=\Pi(\cdot|(0,1),\mathbf{H}(\vartheta_j))$. Определяем $w_\downarrow(\cdot)\in\mathbf{B}$ по следующему простому правилу: $w_\downarrow(t)\doteq-\alpha\ \forall t\in[0,1]$. С учетом (2.2) и (2.3) имеем

$$x_\downarrow(\cdot)\doteq x(\cdot,0,1,w_\downarrow(\cdot),w_\downarrow(\cdot))\in S((0,1),w_\downarrow(\cdot)) \quad (3.12)$$

Из (2.2) и (3.12) вытекает свойство $x_\downarrow(t) = 1 - 2\alpha t \; \forall t \in [0,1]$. В частности, $x_\downarrow(1) = 1 - 2\alpha \le -1$, т.е. $|x_\downarrow(1)| \ge 1$. Напомним, что в силу (2.17) имеет место

$$\begin{gathered} \mathcal{C}_j(w_\downarrow(\cdot)) = \Pi(w_\downarrow(\cdot)|(0,1), \mathbf{H}(\vartheta_j)) = \{h \in S((0,1), w_\downarrow(\cdot))| \\ (|h(1)| \ge 1) \;\&\; ((t, h(t)) \in \mathbf{H}(\vartheta_j) \; \forall t \in [0,1[)\} \end{gathered} \tag{3.13}$$

При этом согласно (1.25) имеет место равенство

$$\mathbf{H}(\vartheta_j) = W_j = \mathcal{W} \cup ([0, \vartheta_j] \times \mathbf{R}) \tag{3.14}$$

Комбинируя (3.13) и (3.14), мы покажем, что $x_\downarrow(\cdot) \in \mathcal{C}_j(w_\downarrow(\cdot))$. Из (3.14) имеем сразу, что

$$(t, x_\downarrow(t)) \in W_j \; \forall t \in [0, \vartheta_j] \tag{3.15}$$

(в силу (1.27) $[0, \vartheta_j] \subset [0,1]$). Пусть $\bar{t} \in [\vartheta_j, 1]$. Тогда по свойствам $x_\downarrow(\cdot)$ имеем (см. (3.11))

$$x_\downarrow(\bar{t}) = 1 - 2\alpha\bar{t} \le 1 - 2\alpha\vartheta_j \le 1 - 2\alpha\tfrac{1}{\alpha} = -1$$

т.е. $|x_\downarrow(\bar{t})| \ge 1$ и, как следствие, $(\bar{t}, x_\downarrow(\bar{t})) \in \mathcal{W}$; см. (1.6). Поскольку выбор $\bar{t}$ был произвольным, установлено, что (см. (3.14))

$$(t, x_\downarrow(t)) \in W_j \; \forall t \in [\vartheta_j, 1]$$

С учетом (3.15) мы получили утверждение

$$(t, x_\downarrow(t)) \in W_j \; \forall t \in [0,1] \tag{3.16}$$

Мы получили (см. (3.12), (3.16)) что $x_\downarrow(\cdot) \in S((0,1), w_\downarrow(\cdot))$ есть такая траектория, что

$$(|x_\downarrow(1)| \ge 1) \;\&\; ((t, x_\downarrow(t)) \in W_j \; \forall t \in [0,1])$$

В силу (3.13) и (3.14) имеем теперь требуемое свойство

$$x_\downarrow(\cdot) \in \mathcal{C}_j(w_\downarrow(\cdot)) \tag{3.17}$$

С другой стороны, мы имеем в силу (2.17) и (3.5), что

$$\begin{gathered} \mathcal{C}_\infty(w_\downarrow(\cdot)) = \Pi(w_\downarrow(\cdot)|(0,1), \mathcal{W}) = \\ = \{h \in S((0,1), w_\downarrow(\cdot))|(|h(1) \ge 1) \;\&\; ((t, h(t)) \in \mathcal{W} \; \forall t \in [0,1[)\} \end{gathered} \tag{3.18}$$

Покажем, что $x_\downarrow(\cdot) \notin \mathcal{C}_\infty(w_\downarrow(\cdot))$. Поскольку $\alpha \in \mathcal{N}$, то $(2\alpha)^{-1} \in]0, 1/2]$ и, в частности, $(2\alpha)^{-1} \in]0,1[$. При этом

$$x_\downarrow(\tfrac{1}{2\alpha}) = 1 - 2\alpha(\tfrac{1}{2\alpha}) = 0$$

что означает в силу (1.6), что

$$(\tfrac{1}{2\alpha}, x_{\downarrow}(\tfrac{1}{2\alpha})) \notin \mathcal{W}$$

С учетом (3.18) имеем теперь, что

$$x_{\downarrow}(\cdot) \notin \mathcal{C}_{\infty}(w_{\downarrow}(\cdot))$$

т.е., в силу (3.17), $x_{\downarrow}(\cdot) \in \mathcal{C}_j(w_{\downarrow}(\cdot)) \setminus \mathcal{C}_{\infty}(w_{\downarrow}(\cdot))$. Итак,

$$\mathcal{C}_j(w_j(\cdot)) \neq \mathcal{C}_{\infty}(w_{\downarrow}(\cdot)) \tag{3.19}$$

Поскольку $w_{\downarrow}(\cdot) \in \mathbf{B}$, имеем: $\mathcal{C}_j \neq \mathcal{C}_{\infty}$. Но и выбор j был произвольным, а тогда $\mathcal{C}_j \neq \mathcal{C}_{\infty}\ \forall i \in \overline{0, \alpha - 1}$. Тем самым, доказательство (3.1) завершено.

4 Заключение

В [1] и в настоящей работе исследовался случай, когда непрямая процедура МПИ допускает параметризацию (такая возможность была отмечена в [14]). В этом случае, подобно (1.25), мы имеем некоторую функцию, определяющую форму множества, возникающего на очередной итерации; эта функция имела своими аргументами скаляры. Стало быть, последние исполняют роль параметров, при которых реализуются итерации в пространстве множеств; в этом смысле наши построения "копируют"[14]. Возможны, однако, и другие версии упомянутой параметризации; рассмотрим простейший пример. Пусть управляемая система скалярна и имеет вид

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)u + \beta(t)v,\ |u| \leq a,\ |v| \leq b \tag{4.1}$$

где $t \in [0,1]$, $a \in [0, \infty[$, $b \in [0, \infty[$, α и β - суть непрерывные вещественнозначные функции на $[0,1]:\ \alpha \in \mathbf{C}$ и $\beta \in \mathbf{C}$. Через U (через V) обозначаем множество всех борелевских функций из $[0,1]$ в $[-a, a]$ (в $[-b, b]$). Пусть, кроме того, $c \in \mathbf{C}$ и $N \doteq \{(t, x) \in \mathbf{D} \mid x \leq c(t)\}$. Будем рассматривать задачу удержания в N, т.е. требовать гарантированной реализации условия $(t, x(t)) \in N$ при всех t из соответствующего (выбранной начальной позиции) промежутка управления. С формальной точки зрения мы можем рассматривать эту задачу, как частный случай задачи наведения [3]: достаточно определить фиктивное целевое множество $M = \{1\} \times \mathbf{R}$ (оно замкнуто), после чего M и N определяют игру сближения-уклонения в смысле [3, 4]. Можно рассматривать упомянутую проблему удержания и с общих позиций теории МПИ (см. [26]). Будем ориентироваться на построение процедуры типа (1.4), (1.5). Если $(t_*, x_*) \in \mathbf{D}$, $u(\cdot) \in U$ и $v(\cdot) \in V$, то (здесь и ниже) $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = (x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))_{t \in [t_*, 1]}$ есть функция из $[t_*, 1]$ в $\mathbf{R}$ для которой

$$x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = x_* + \int\limits_{t_*}^{t} \alpha(\tau) u(\tau) d\tau + \int\limits_{t_*}^{t} \beta(\tau) v(\tau) d\tau \ \forall t \in [t_*, 1]$$

здесь интегралы понимаются, как и в [1]. Тогда при всяком выборе $H \in \mathcal{D}$ имеем [14] в виде $\mathcal{A}_M(H)$ множество всех $(t, x) \in H$ таких, что $\forall v(\cdot) \in V \ \exists u(\cdot) \in U$:

$$(\xi, x(\xi, t, x, u(\cdot), v(\cdot))) \in H \ \forall \xi \in [t, 1[\tag{4.2}$$

Мы учли здесь, что множество M фиктивно: все траектории системы приходят на M. Разумеется, на основе $\mathcal{A}_M$ можно, как и в случае (1.5), построить итерационную последовательность $(\mathcal{W}_k)_{k \in \mathcal{N}_0}$ по правилу

$$(\mathcal{W}_0 \doteq N) \ \& \ (\mathcal{W}_k = \mathcal{A}_M(\mathcal{W}_{k-1}) \ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{4.3}$$

Последовательность (4.3) сходится (см.(1.26)) к множеству $\mathcal{W}_\infty$, определяемому в виде пересечения всех множеств $\mathcal{W}_k$, $k \in \mathcal{N}_0$. Теперь среди всех множеств H, которые могут использоваться в (4.2), (4.3) выделим множества определенного типа. Именно, $\forall d \in \mathbf{C}$

$$\Lambda[d] \doteq \{(t, x) \in \mathbf{D} \mid x \leq d(t)\} \in \mathcal{F} \tag{4.4}$$

Нас будет интересовать семейство $\lambda \doteq \{\Lambda[d] : \ d \in \mathbf{C}\}$; имеем $N = \Lambda[c] \in \lambda$. Покажем, что наш итерационный процесс (4.3) локализуется в λ и быстро стабилизируется. Для этого, по аналогии с [14], введем вспомогательный оператор ζ, действующий в $\mathbf{C}$ по следующему правилу: если $d \in \mathbf{C}$, то $\zeta(d) \in \mathbf{C}$ имеем вид

$$\zeta(d)(t) \doteq min_{\xi \in [t,1]} [d(\xi) + a \int\limits_{t}^{\xi} |\alpha(\tau)| d\tau - b \int\limits_{t}^{\xi} |\beta(\tau)| d\tau] \ \ \forall t \in [0, 1] \tag{4.5}$$

Легко видеть, однако, что $\forall d \in \mathbf{C}$

$$\mathcal{A}_M(\Lambda[d]) = \Lambda[\zeta(d)] \tag{4.6}$$

В самом деле, фиксируем $d \in \mathbf{C}$. Имеем $\Lambda[d] \in \mathcal{F}$. Выберем произвольно $(t_*, x_*) \in \mathcal{A}_M(\Lambda[d])$. Тогда (см.(4.2)) $(t_*, x_*) \in \Lambda[d]$ и с учетом замкнутости $\Lambda[d]$ $\forall v(\cdot) \in V \ \exists u(\cdot) \in U$:

$$(\xi, x(\xi, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \Lambda[d] \ \forall \xi \in [t_*, 1] \tag{4.7}$$

Здесь $\Lambda[d]$ соответствует (4.4). Мы получаем, что $(t_*, x_*) \in \mathbf{D}$ и $x_* \le d(t_*)$. Далее, из (4.4), (4.7) вытекает, что

$$\forall v(\cdot) \in V \ \exists u(\cdot) \in U \ \forall \xi \in [t_*, 1]$$
$$x_* + \int\limits_{t_*}^{\xi} \alpha(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_*}^{\xi} \beta(\tau)v(\tau)d\tau \le d(\xi)$$

Тем более, мы имеем $\forall v(\cdot) \in V \ \forall \xi \in [t_*, 1]$

$$x_* - a\int\limits_{t_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau + \int\limits_{t_*}^{\xi} \beta(\tau)v(\tau)d\tau \le d(\xi) \tag{4.8}$$

При обосновании (4.8) мы учитываем, что $\forall u(\cdot) \in U$

$$-\int\limits_{t_*}^{\xi} \alpha(\tau)u(\tau)d\tau \le |\int\limits_{t_*}^{\xi} \alpha(\tau)u(\tau)d\tau| \le \int\limits_{t_*}^{\xi} |\alpha(\tau)| \cdot |u(\tau)|d\tau \le a\int\limits_{t_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau$$

С другой стороны, из непрерывности β следует измеримость этой функции по Борелю. Рассмотрим функцию $v_*(\cdot)$ из $[0, 1]$ в $[-b, b]$, определяемую по правилу

$$v_*(t) \doteq b \cdot sgn(\beta(\tau))$$

где (борелевское) отображение sgn из $\mathbf{R}$ в $\{-1, 1\}$ определяем, как обычно, правилом: $sgn(y) \doteq -1$, если $y \in]-\infty, 0[$, и $sgn(y) \doteq 1$, если $y \in [0, \infty[$. Можно даже рассматривать sgn как ступенчатую функцию на $\mathbf{R}$: sgn есть разность индикатора полупрямой $[0, \infty[$ (это замкнутое подмножество $\mathbf{R}$) и индикатора открытой полупрямой $]-\infty, 0[$. Мы получили в виде $v_*(\cdot)$ суперпозицию борелевских отображений, а потому $v_*(\cdot) \in V$. Поэтому в (4.8) можно полагать $v(\cdot) = v_*(\cdot)$:

$$x_* - a\int\limits_{t_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau + b\int\limits_{t_*}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau =$$
$$= x_* - a\int\limits_{t_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau + \int\limits_{t_*}^{\xi} \beta(\tau)v_*(\tau)d\tau \le d(\xi) \ \ \forall \xi \in [t_*, 1]$$

Иными словами, у нас $\forall \xi \in [t_*, 1]$

$$x_* \le d(\xi) + a\int\limits_{t^*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{t_*}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau \tag{4.9}$$

Функция из $[t_*, 1]$ в $\mathbf{R}$, значения которой используются в правой части (4.9), непрерывна и, поэтому, достигает на компакте $[t_*, 1]$ своего минимума, а тогда из (4.5), (4.9) имеем

$$x_* \leq min_{\xi\in[t_*,1]}[d(\xi) + a\int\limits_{t_*}^{\xi}|\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{t_*}^{\xi}|\beta(\tau)|d\tau] = \zeta(d)(t_*) \tag{4.10}$$

Итак, $(t_*, x_*) \in \mathbf{D}$ удовлетворяет (4.10), откуда, в согласии с (4.4), получаем

$$(t_*, x_*) \in \Lambda[\zeta(d)]$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено вложение

$$\mathcal{A}_M(\Lambda[d]) \subset \Lambda[\zeta(d)] \tag{4.11}$$

Пусть $(t^*, x^*) \in \Lambda[\zeta(d)]$. В силу (4.4) это означает, что

$$(t^*, x^*) \in \mathbf{D} \tag{4.12}$$

и при этом выполняется условие

$$x^* \leq \zeta(d)(t^*) \tag{4.13}$$

В силу (4.5) справедливо равенство

$$\zeta(d)(t^*) = min_{\xi\in[t^*,1]}[d(\xi) + a\int\limits_{t^*}^{\xi}|\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{t^*}^{\xi}|\beta(\tau)|d\tau] \tag{4.14}$$

Введем в рассмотрение функцию $u^*(\cdot) = (u^*(t), 0 \leq t \leq 1)$ из $[0,1]$ в $[-a, a]$, для которой

$$u^*(t) \doteq -a\ sgn(\alpha(t))\ \ \forall t \in [0,1]$$

снова имеем свойство $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$, т.к. $u^*(\cdot)$ можно рассматривать как суперпозицию двух борелевских отображений (sgn есть разность индикатора замкнутой полупрямой $[0,\infty]$ и индикатора открытой полупрямой $]-\infty, 0[$; α есть непрерывная и, в частности, борелевская функция на $[0,1]$). Если теперь $v(\cdot) = (v(t),\ 0 \leq t \leq 1) \in \mathcal{V}$, то $\forall t \in [t^*, 1]$

$$\begin{gathered} x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot)) = x^* + \int\limits_{t^*}^{t}\alpha(\tau)u^*(\tau)d\tau + \int\limits_{t^*}^{t}\beta(\tau)v(\tau)d\tau = \\ = x^* - a\int\limits_{t^*}^{t}|\alpha(\tau)|d\tau + \int\limits_{t^*}^{t}\beta(\tau)v(\tau)d\tau \leq \\ \leq x^* - a\int\limits_{t^*}^{t}|\alpha(\tau)|d\tau + \int\limits_{t^*}^{t}|\beta(\tau)v(\tau)|d\tau \leq \\ \leq x^* - a\int\limits_{t^*}^{t}|\alpha(\tau)|d\tau + b\int\limits_{t^*}^{t}|\beta(\tau)|d\tau \end{gathered} \tag{4.15}$$

С другой стороны, из (4.13), (4.14) вытекает, что

$$x^* \le d(t) + a\int\limits_{t^*}^{t} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{t^*}^{t} |\beta(\tau)|d\tau \ \forall t \in [t^*, 1] \tag{4.16}$$

Из (4.16) получаем систему неравенств

$$x^* - a\int\limits_{t^*}^{t} |\alpha(\tau)|d\tau + b\int\limits_{t^*}^{t} |\beta(\tau)|d\tau \le d(t) \ \forall t \in [t^*, 1] \tag{4.17}$$

Из (4.15) и (4.17) имеем теперь

$$x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot)) \le d(t) \ \forall t \in [t^*, 1] \tag{4.18}$$

Из (4.4) и (4.18) вытекает, что

$$(t, x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))) \in \Lambda[d] \ \forall t \in [t^*, 1]$$

Мы установили, что $\forall t \in [t^*, 1]$

$$(t, x(t, t^*, x^*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \Lambda[d] \tag{4.19}$$

Вернемся к (4.13). Тогда (см.(4.5)) тем более имеем

$$x^* \le d(t^*) + a\int\limits_{t^*}^{t^*} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{t^*}^{t^*} |\beta(\tau)|d\tau = d(t^*)$$

Из (4.4) и (4.12) имеем теперь свойство

$$(t^*, x^*) \in \Lambda[d] \tag{4.20}$$

Из (4.19), (4.20) вытекает (см.(4.2)), что

$$(t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\Lambda[d])$$

Поскольку выбор (t^*, x^*) был произвольным, установлено вложение

$$\Lambda[\zeta(d)] \subset \mathcal{A}_M(\Lambda[d]) \tag{4.21}$$

Из (4.11), (4.21) вытекает требуемое равенство (4.6). Итак,

$$\mathcal{A}_M(\Lambda[d]) = \Lambda[\zeta(d)] \ \forall d \in \mathbf{C} \tag{4.22}$$

Обращаясь к (4.5) заметим, что $(\zeta \circ \zeta)(d) = \zeta(d) \ \forall d \in \mathbf{C}$, т.е. ζ идемпотентное отображение. В самом деле, пусть $\delta \in \mathbf{C}$. Тогда $\mathbf{d} \doteq \zeta(\delta) \in \mathbf{C}$ имеет вид (см.(4.5)): при $t \in [0, 1]$

$$\mathbf{d}(t) = min_{\xi \in [t,1]}[\delta(\xi) + a\int\limits_{t}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{t}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau] \tag{4.23}$$

С другой стороны, $(\zeta \circ \zeta)(\delta) = \zeta(\mathbf{d}) \in \mathbf{C}$ имеет значения для $t \in [0,1]$

$$\zeta(\mathbf{d})(t) = min_{\xi\in[t,1]}[\mathbf{d}(\xi) + a\int\limits_t^\xi |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_t^\xi |\beta(\tau)|d\tau] \tag{4.24}$$

Ясно, что в силу (4.24) выполняется неравенство

$$\zeta(\mathbf{d})(t) \leq \mathbf{d}(t)\ \forall t \in [0,1]$$

(в качестве ξ в (4.24) можно полагать $\xi = t$). Зафиксируем $\tau_* \in [0,1]$. Тогда (см.(4.23), (4.24))

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{d})(\tau_*) &= min_{\vartheta\in[\tau_*,1]}[\mathbf{d}(\vartheta) + a\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} |\beta(\tau)|d\tau] = \\
&= min_{\vartheta\in[\tau_*,1]}[min_{\xi\in[\vartheta,1]}[\delta(\xi) + a\int\limits_{\vartheta}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\vartheta}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau] + \\
&+ a\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} |\beta(\tau)|d\tau] = min_{\vartheta\in[\tau_*,1]}[min_{\xi\in[\vartheta,1]}[\delta(\xi) + \\
&+ a\int\limits_{\vartheta}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau + a\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\vartheta}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} |\beta(\tau)|d\tau]] = \\
&= min_{\vartheta\in[\tau_*,1]}[min_{\xi\in[\vartheta,1]}[\delta(\xi) + a\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau]]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Однако, $[\vartheta, 1] \subset [\tau_*, 1]\ \forall \vartheta \in [\tau_*, 1]$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&min_{\xi\in[\vartheta,1}[\delta(\xi) + a\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau] \geq \\
&\geq min_{\xi\in[\tau_*,1]}[\delta(\xi) + a\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau]
\end{aligned}$$

Следовательно (4.25) внешний минимум достигается при $\vartheta = \tau_*$, а тогда из (4.23) и (4.25) имеем

$$\zeta(\mathbf{d})(\tau_*) = min_{\xi\in[\tau_*,1]}[\delta(\xi) + a\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\alpha(\tau)|d\tau - b\int\limits_{\tau_*}^{\xi} |\beta(\tau)|d\tau = \mathbf{d}(\tau_*) \tag{4.26}$$

Но τ_* выбиралось произвольно, а потому $\zeta(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$. Тогда

$$\zeta(\delta) = \mathbf{d} = \zeta(\mathbf{d}) = \zeta(\zeta(\delta)) = (\zeta \circ \zeta)(\delta) \tag{4.27}$$

Коль скоро, $\delta \in \mathbf{C}$ также выбиралось произвольно, из (4.27) имеем

$$\zeta(d) = (\zeta \circ \zeta)(d) \ \forall d \in \mathbf{C} \tag{4.28}$$

Вернемся теперь к итерационной процедуре (4.3); будем использовать при этом (4.22) и (4.28). Из этих двух соотношений вытекает, что

$$\mathcal{W}_k = \Lambda[\zeta(c)] \ \forall k \in \mathcal{N} \tag{4.29}$$

В самом деле, из (4.3) и (4.22) имеем

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{A}_M(\mathcal{W}_0) = \mathcal{A}_M(N) = \mathcal{A}_M(\Lambda[c]) = \Lambda[\zeta(c)] \tag{4.30}$$

Пусть вообще $n \in \mathcal{N}$ обладает свойством $\mathcal{W}_n = \Lambda[\zeta(c)]$. Тогда согласно (4.3)

$$\mathcal{W}_{n+1} = \mathcal{A}_M(\mathcal{W}_n) = \mathcal{A}_M(\Lambda[\zeta(c)])$$

откуда в силу (4.22) имеем (см.(4.28))

$$\mathcal{W}_{n+1} = \Lambda[\zeta(\zeta(c))] = \Lambda[(\zeta \circ \zeta)(c)] = \Lambda[\zeta(c)]$$

Мы установили импликацию

$$(\mathcal{W}_n = \Lambda[\zeta(c)]) \Rightarrow (\mathcal{W}_{n+1} = \Lambda[\zeta(c)]) \tag{4.31}$$

Поскольку выбор n в (4.31) был произвольным, установлено (по индукции), что (см.(4.30)) справедливо (4.29). Из (4.29) следует, в частности, что

$$\mathcal{W}_k = \mathcal{W}_1 \ \forall k \in \mathcal{N} \tag{4.32}$$

Итак, наш итерационный процесс здесь быстро стабилизируется, что допускает аналогия со свойствами, имеющими место в так называемых регулярных дифференциальных играх с фиксированным временем окончания [2, 3].

Свойство (4.22) подобно (1.28). В обоих случаях определена некоторая функция формы (функция $\mathbf{H}$ в (1.28), Λ в (4.22), (4.29)), а фактический итерационный процесс осуществляется в пространстве ее аргументов (параметров). В одном случае (см. (1.24), (1.28)) параметром является скаляр, а в другом - функция на $[0, 1]$.

Мы получили, стало быть (см. также [14]), что параметризация непрямой версии МПИ есть достаточно общая конструкция, которая может применяться для исследования различных классов дифференциальных игр. В настоящей работе мы исследовали саму итерационную процедуру, реализуемую в условиях параметризации; мы не рассматривали здесь решение нетривиальных дифференциальных игр с помощью МПИ; см. в этой связи [10,11,14,18].

Литература

[1] Корляков К.В., Ченцов А.Г. Об одном примере построения многозначной квазистратегии итерационными методами //ПММ. 2002. Т.66. Вып.5. С.760-774.

[2] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.

[3] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.:Наука, 1974.

[4] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.:Наука, 1985.

[5] Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, I.- Изв. АН СССР (Техн. киберн.), 1973, N 2.

[6] Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, II.- Изв. АН СССР (Техн. киберн.), 1973, N 3.

[7] Roxin E. Axiomatic approach in differential games.-J. Optimiz. Theory & Appl., 1969, 3 N 3, p.153-163.

[8] Elliott R.J., Kalton N.J. The existense of value in differential games //Memoires of the Amer.Math.Soc.-1972.-N126.-67p.

[9] Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games.-SIAM J.Control, 1969, 7, N1, p.141-157.

[10] Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения //Докл. АН СССР. 1975. Т.224. N 6. С.1272-1275.

[11] Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени.-"Мат.сб.", 1976, Т.99, N 3, 394-420.

[12] Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения //Докл. АН СССР. 1976. Т.226. N 1. С.306-308.

[13] Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения к заданому моменту времени.-Изв. АН СССР. Серия матем., 1978, 42, N2.

[14] Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения.-Свердловск, 1979.-102с.-(Рукоп. деп. в ВИНИТИ 4 июля 1979 г.; N1933-79 Деп.)

[15] Ченцов А.Г. Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения-уклонения

[16] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the design of differential games. I.- Probl. Control & Inform. Theory, 1977, 6, N 5-6, p.381-395.

[17] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the design of differential games. I.- Probl. Control & Inform. Theory, 1979, 8, N 1, p.3-11.

[18] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантий в задачах управления. М.:Наука, 1981.

[19] Ченцов А.Г. Итерационная реализация неупреждающих многозначных отображений //Докл. РАН.-1997.-Т.357, N5.-с.595-598.

[20] Ченцов А.Г. К вопросу о параллельной версии абстрактного аналога метода програмных итераций //Докл. РАН.-1998.-Т.362, N5.-с.602-605.

[21] Ченцов А.Г. К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений //Известия ВУЗов, Математика, 2000, N3(454), с.66-76.

[22] A.Chentsov Nonanticipating selectors of set-valued mappings and iterated procedures // FDE 1999, 6, N 3-4, 249-274p.

[23] Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. I. //Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37. N 4. С.470-480.

[24] Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. II. //Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37. N 5. С.679-688. Ченцов А.Г. Дифф.уравнения, 2001, N 5

[25] Ченцов А.Г. К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений //Изв.вузов. Математика. 2000. N 3. С.66-76.

[26] Ченцов А.Г. К вопросу о редукции некоторых нелинейных задач оптимального управления с интегральными ограничениями, Кибернетика, 1990, N 4, с.59-64.

[27] Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Управление с гибкими коррекциями при ограничении на общее число переключений //Гагаринские науч.чтения по космонавтике и авиации. 1987г.: Сб.науч.тр.-М.:Наука, 1988.-с.70-75.

[28] Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Об одном классе линейных дифференциальных игр с ограниченным числом коррекций.-В кн.:Управление и оценивание в динамических системах. Свердловск, 1982, с.9-16.

[29] Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht : London : Kluwer Academic, c2002.

[30] Келли Дж.Л. Общая топология.-М.:Наука, 1981.