ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2003
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ЛОКАЛЬНОЙ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КАФЕДРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

А.Ф.Андреев, Ю.Н.Бибиков

Кафедра дифференциальных уравнений
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет
198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д.2
e-mail: anna@AZ1918.spb.edu

В обзоре излагаются результаты исследований поведения решений в окрестности особой точки (или вообще инвариантного множества) системы дифференциальных уравнений, полученные в 70 – 90-е годы сотрудниками и аспирантами кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Характерной особенностью этих исследований является то, что они представляют собой прямое продолжение и развитие работ А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, А. Дюлака, И. Бендиксона, М. Фроммера, А. А. Андронова

[0]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 96–01–00421, 96–01–00404, 97–07–90088, 99–01–00683, 99–01–00753), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96–15–96209) и программы “Университеты России”Министерства образования Российской Федерации. Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы “Интеграция”(проект № 2. 1–326. 53).

и других классиков. Непосредственное влияние на научную работу кафедры по локальным проблемам качественной теории дифференциальных уравнений оказали работы А. М. Ляпунова и, прежде всего, его знаменитая монография “Общая задача об устойчивости движения”.

1. Исследование систем второго порядка

1. 1. Структура множества полутраекторий, примыкающих к особой точке по фиксированному направлению

Рассматривается квазиоднородная (алгеброидная) система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) + p(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) + q(x,y), \tag{1. 1}$$

где P, Q — формы от x и y степени $m \geq 1$, $P^2(x,y) + Q^2(x,y) \not\equiv 0$, $p, q \in C(D)$, $D = \{(x,y) : 0 \leq r = \sqrt{x^2+y^2} < \delta\}$, $\delta > 0$, $p(x,y)$, $q(x,y) = o(r^m)$ при $r \to 0$, D — область единственности для траекторий системы (1. 1), $O = (0,0)$ — ее изолированная особая точка.

Произведем в системе (1. 1) замену координат по формулам

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi, \quad \tau = \int\limits_0^t r^{m-1}(s)\,ds. \tag{1. 2}$$

Замена (1. 2) преобразует систему (1. 1) в систему

$$\frac{dr}{d\tau} = r\left(G(\varphi) + g(r,\varphi)\right), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = F(\varphi) + f(r,\varphi)\,, \tag{1. 3}$$

где F, G — формы степени $m+1$ от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, $F^2(\varphi) + G^2(\varphi) \not\equiv 0$, $f, g \in C(D)$, $f(0,\varphi) \equiv g(0,\varphi) \equiv 0$. Если $F(\varphi_0) = 0$, то направление $\varphi = \varphi_0$ называется исключительным направлением системы (1. 3) (и, что то же самое, системы (1.1)) в точке O (а именно: обыкновенным исключительным, если $G(\varphi_0) \neq 0$, и особым исключительным, если $G(\varphi_0) = 0$).

Полутраектория системы (1. 3) $L^{+(-)} : r = r(\tau) > 0, \varphi = \varphi(\tau)$, $\tau \geq 0$ ($\tau \leq 0$), обладающая свойством $r(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty(-\infty)$, называется $O^{+(-)}$-кривой системы (1. 1); если при этом $\varphi(\tau) \to \varphi_0 \in \mathbb{R}$, то $L^{+(-)}$ называется $TO^{+(-)}$-кривой системы (1. 1), а направление $\varphi = \varphi_0$ является исключительным для системы (1. 1) в точке O. Таким образом, чтобы исследовать для системы (1. 1) вопросы о существовании TO-кривых и структуре множества всех таких кривых, достаточно разрешить их для каждого из ее исключительных направлений в точке O.

Данная проблематика активно разрабатывалась в математической литературе в 30 – 60-е годы. Основные результаты этих исследований опубликованы в монографиях [60] и [58]. Существенное дополнение к ним дано, в частности, в статьях [2–4]. В последующие годы исследования в этом направлении продолжались группой А. Ф. Андреева. Их итог подведен в статье [10]. В ней сформулированы следующие общие утверждения, приведены примеры “нетипичных”ситуаций. (Далее $k \geq 1$ — кратность нуля φ_0 функции F $a = F^{(k)}(\varphi_0)(k!G(\varphi_0))^{-1}$.)

Т е о р е м а 1. 1. *Для системы* (1. 1) *к точке* O *по обыкновенному исключительному направлению* 2*-го типа* ($k \geq 1$ *нечетное,* $a < 0$) *примыкает единственная* O*-кривая, если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $k = 1$, $p, q \in C^m(D)$;

2) $p, q \in C^{m+1}(D)$;

3) $p, q \in C^1(D)$, $p(x, y), q(x, y) = o(r^{m+\sigma})$, $\sigma > 0$,

   $p'_x(x, y), \ldots, q'_y(x, y) = o(r^{m-1})$ при $r \to 0$.

Т е о р е м а 1. 2. *Для системы* (1.1) *к точке* O *по любому обыкновенному исключительному направлению* $\varphi = \varphi_0$ 3*-го типа* ($2 \leq k$ *четное*) *примыкает бесконечно много* (*полуоткрытый пучок*) O*-кривых, если в ней* $p, q \in C^{m+1}(D)$.

Т е о р е м а 1. 3. *Если для системы* (1. 1) $F(\varphi) \equiv 0$, *а* p, $q \in C^{m+1}(D)$, *то для нее к точке* O *по любому обыкновенному исключительному направлению* $\varphi = \varphi_0$ ($G(\varphi_0) \neq 0$) *примыкает единственная* O*-кривая.*

Условия 1), 2) теоремы 1.1 и условия гладкости p, q теорем 1. 2 и 1. 3 неулучшаемы без других дополнительных ограничений на эти функции.

Из теорем 1. 1–1. 3 для случаев, когда функция F имеет вещественные нули, и алгоритма А. М. Ляпунова решения проблемы различения центра и фокуса для случая, когда $F(\varphi) \neq 0 \ \forall \varphi \in \mathbb{R}$, вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. 4. *Если для системы* (1. 1) *однородное приближение*

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1. 4}$$

невырожденное (*т. е. формы* P, Q *не имеют общих линейных вещественных множителей*), *а* $p, q \in C^{m+1}(D)$, *то для нее топологический тип* *точки O такой же, как и для системы* (1.4), *исключая разве лишь случай, когда для последней точка O — центр.*

Для случая $m = 1$ эта теорема может быть усилена следующим образом.

Теорема 1.4$'$. *Пусть система* (1.1) *квазилинейна и собственные числа λ_1, λ_2 матрицы коэффициентов ее линейной части* (1.4) *ненулевые. Если при этом:*

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\xi, \eta \in C^1(D)$ *или*

2) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\xi, \eta \in C^2(D)$,

то для системы (1.1) *особая точка O имеет тот же тип Пуанкаре, что и для системы* (1.4), *исключая разве лишь случай, когда* $\lambda_{1,2} = \pm i\,\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.5. *Если для системы* (1.1) $F(\varphi) \equiv 0$, $G(\varphi) \neq 0\ \forall\, \varphi \in \mathbb{R}$, $p(x,y), q(x,y) = O(r^m\omega(r))$ *при* $r \to 0$, *где* $\omega \in C[0,\Delta]$, $\Delta \in (0,\delta)$, $\omega(0) = 0$, $\omega(r) > 0$ *при* $r > 0$, $\displaystyle\int_0^\Delta r^{-1}\omega(r)\,dr < +\infty$, *то для нее к точке O по любому направлению $\varphi = \varphi_0$ примыкает хотя бы одна O-кривая.*

Теорема 1.6. *Пусть для системы* (1.1) :

1) $F(\varphi) \equiv 0$, *существуют* $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ *и* $\beta \in \mathbb{N}$: $G^{(i)}(\varphi_0) = 0$, $i = \overline{0, \beta - 1}$, $G^{(\beta)}(\varphi_0) \neq 0$;

2) $\exists\, k \in \mathbb{N} : p, q \in C^{m+k+1}(D)$, $p(x,y) = P_k(x,y) + o(r^{m+k})$, $q(x,y) = Q_k(x,y) + o(r^{m+k})$, P_k, Q_k — *формы от x и y степени $m + k$*;

3) $F_k(\varphi_0) \neq 0$ $(F_k(\varphi) = \cos\varphi\, Q_k(\cos\varphi, \sin\varphi) - \sin\varphi\, P_k(\cos\varphi, \sin\varphi))$.

Пусть $b = G^{(\beta)}(\varphi_0)(\beta! F_k(\varphi_0))^{-1}$. *Тогда для системы* (1.1) *к точке O по направлению $\varphi = \varphi_0$:*

1) *примыкает единственная O-кривая, если β — четное число;*

2) *примыкают две O-кривые, если β — нечетное число, $b > 0$;*

3) *не примыкает ни одна O-кривая, если β — нечетное число, $b < 0$.*

В статье [13] теорема 1.1 распространена на систему более общего вида. В работах [43, 44] изложены новые подходы к исследованию проблем, трактуемых теоремами 1.1 и 1.2.

1.2. Разработка и обоснование метода Фроммера исследования изолированной особой точки

1.2.1. Разработка метода. Рассматривается произвольная вещественно-аналитическая система

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x,y), \tag{1.5}$$

для которой $O = (0,0)$ — изолированная точка покоя. Для нее топологические типы расположения траекторий в малой окрестности точки O в случае, когда матрица Якоби правых частей в точке $(0,0)$ A невырожденная, выяснили А. Пуанкаре (с точностью до подслучая чисто мнимых собственных чисел матрицы A), в случае, когда матрица A имеет одно нулевое собственное число, — И. Бендиксон, а в случае, когда матрица A, не будучи нулевой, имеет два нулевых собственных числа, — А. Ф. Андреев [1] и Н. Б. Хаимов [61]. И. Бендиксон показал также, что в общем случае тип особой точки O системы (1.5) может быть определен (с точностью до различения центра и фокуса) с помощью конечной последовательности подстановок Брио и Буке:

$$y_k = x_k y_{k+1},\ x_k = y_k x_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N},\ x_0 = x,\ y_0 = y.$$

В монографии [7] для этого детально разработан другой метод, приводящий к цели гораздо быстрее. Его идея была предложена М. Фроммером и восходит к А. Дюлаку. Она состоит в следующем. Сначала находятся все возможные асимптотики TO-кривых системы в точке O. Затем для каждой из этих асимптотик выявляются все TO-кривые, ею обладающие. При этом совокупность всех TO-кривых системы разбивается на упорядоченную круговую последовательность пучков TO-кривых (открытых и замкнутых). На основе этой информации строится локальная схема точки O в терминах (конечной) круговой последовательности примыкающих к ней эллиптических (E), гиперболических (H) и параболических (P) секторов Бендиксона.

Эта идея реализуется в [7] следующим образом. Доказывается, что каждая O-кривая системы (1.5), отличная от спирали, является TO-кривой, а каждая TO-кривая, не лежащая ни на одной из координатных полуосей, в достаточной близости от O представима в виде

$$y = y(x),\ y(x) \neq 0\, \forall\, x \in (0,\delta) \text{ или } (-\delta,0),\ \ y(x) \to 0 \text{ при } x \to 0, \tag{1.6}$$

где $y(x)\,(x \in (0,\delta)$ или $(-\delta,0))$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}. \tag{1.7}$$

В предположении, что O-кривая (1.6) системы (1.5) (уравнения (1.7)) является O_1-кривой, т.е. лежит в первой координатной четверти (что не ограничивает общности), она представляется в виде

$$y = x^{\nu(x)},\ 0 < x < \delta_1 \leq \delta,\ \nu(x) = \frac{\ln y(x)}{\ln x} > 0, \tag{1.8}$$

и доказывается, что для нее существует $\lim\limits_{x\to 0} \nu(x) = \nu_0 \in [0, +\infty]$. Величина ν_0 называется порядком кривизны этой кривой в точке O.

Если $\nu_0 \in (0, +\infty)$, то кривая (1.8) представляется в виде

$$y = u(x)\, x^{\nu_0},\ 0 < x < \delta_1, \tag{1.9}$$

и доказывается, что для нее существует $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \gamma_0 \in [0, +\infty]$. Величина γ_0 называется мерой кривизны кривой (1.9) в точке O.

Излагается способ отыскания возможных порядков кривизны ν_0 O_1-кривых (таких порядков конечное число, причем среди возможных конечных порядков различаются обыкновенные и особые), а для любого $\nu_0 \in (0, +\infty)$ — способ отыскания возможных мер кривизны γ_0 O_1-кривых с порядком ν_0 (для обыкновенного порядка ν_0 таких мер конечное число, для особого — бесконечное число; среди $\gamma_0 \in (0, +\infty)$ различаются обыкновенные и особые, последних — конечное число). Даются критерии существования O_1-кривых уравнения (1.7): а) с $\nu_0 = 0$; б) с $\nu_0 = +\infty$); в) с $\nu_0 \in (0, +\infty)$, $\gamma_0 = 0$; г) с $\nu_0 \in (0, +\infty)$, $\gamma_0 = +\infty$; д) с особым порядком ν_0 и неособыми мерами γ_0; в случае их существования выясняется структура множества таких кривых (показывается, что они в каждом из случаев а) — г) образуют один открытый пучок, а в случае д) — один или несколько открытых пучков).

Наконец, изучается вопрос о существовании O_1-кривых, соответствующих характеристическим парам (ν_0, γ_0), т.е. парам типа обыкновенный порядок — конечная мера или особый порядок — особая мера. Таких пар конечное число. Для каждой из них $\nu_0 = p_0/q_0$ ($p_0, q_0 \in \mathbb{N}$ и взаимно просты) и в уравнении (1.7) производится замена

$$x = x_1^{q_0}, \quad y = (\gamma_0 + y_1)x_1^{p_0}. \tag{1.10}$$

Замена (1.10) преобразует (1.7) в уравнение того же вида с изолированной особой точкой $(0, 0)$. Полученные таким образом производные уравнения изучаются по той же схеме, что и уравнение (1.7).

Доказывается, что этот процесс конечен и даются оценки числа его шагов; он позволяет выявить все O_1-кривые, а значит, и все TO-кривые системы (1.5) (вместе с их асимптотикой в точке O), или убедиться в их отсутствии; при наличии у системы (1.5) TO-кривых их совокупность распадается на конечное число элементарных пучков (пучков TO-кривых с одинаковой асимптотикой в точке O), каждый из которых открыт или состоит из единственной TO-кривой, что позволяет построить локальную схему точ ки O и тем самым установить ее топологический тип. В случае отсутствия у системы (1.5) TO-кривых для ее особой точки O возникает проблема различения центра и фокуса.

В статье [11] детально изучен вопрос об аналитическом представлении TO-кривых системы (1.5) со всеми возможными порядками и мерами кривизны (в том числе с нулевыми и бесконечными). Из полученных результатов выведено, в частности, следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Для аналитической системы* (1.5) *касательная к любой ее TO-кривой, дополненной точкой O, непрерывна в точке O* (см. об этом в [58. С. 559].)

В статье [8] метод Фроммера распространен на системы вида (1.5) класса C^∞, удовлетворяющие неравенству Лоясевича: существуют $c > 0$, $n > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$X^2(x,y) + Y^2(x,y) \geq c(x^2+y^2)^n \text{ при } x^2+y^2 < \delta^2.$$

В статьях [54–56] метод Фроммера распространен на квазианалитические системы.

1.2.2. Применение метода. В 50-е годы А. Ф. Андреев и Н. Б. Хаимов (независимо друг от друга), применив начала метода Фроммера, исследовали особую точку $O = (0,0)$ аналитической системы (1.5) с 1-струей $y\dfrac{\partial}{\partial x}$ (с точностью до решения проблемы различения центра и фокуса, которая иногда возникает для такой точки). Этим было завершено изучение (с указанной точностью) особой точки O для аналитических систем с ненулевым линейным приближением в точке O (для A_1-систем по терминологии А. Н. Берлинского). Наступила очередь локального исследования A_2-систем, т. е. аналитических систем с нулевым линейным и ненулевым квадратичным приближением в особой точке O. Согласно теореме 1.4 для A_2-системы с невырожденным квадратичным приближением топологический тип точки O совпадает с таковым для ее квадратичного укорочения. Он может быть полностью определен с помощью теорем 1.1–1.3.

В работах [37, 39] методом Фроммера проведено локальное исследование A_2-системы вида (1.1) ($m = 2$, $p, q \in C^a(D)$) для всех случаев вырожденности ее квадратичного приближения. В них отдельно рассмотрены случаи, когда форма $U(x, y) = xQ(x, y) - yP(x, y)$, определяющая исключительные направления системы в точке O, имеет следующие линейные вещественные множители, общие для форм P и Q : 1) один простой; 2) два простых; 3) один двукратный; 4) один простой и один двукратный; 5) один трехкратный, а также случай, когда $U(x, y) \equiv 0$. Для каждого из этих случаев выявлены все TO-кривые системы и построена локальная схема точки O в терминах секторов Бендиксона E, H, P.

1.3. Проблема различения центра и фокуса

Если для системы (1.1) (в форме (1.3)) $F(\varphi) \neq 0$ $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, то для ее особой точки O возникает проблема различения центра, фокуса и центрофокуса. Если при этом в (1.1) p, q — ряды по степеням x и y, сходящиеся в области D, то для нее проблема различения центра и фокуса решается методом А. М. Ляпунова, т. е. путем построения для системы (1.3) на луче $\varphi = 0$, $r \geq 0$ аналитической функции последования $r_1 = d(r)$.

Упомянутая проблема возникает для системы (1.1) и в том случае, когда она (при наличии у $F(\varphi)$ вещественных нулей) не имеет TO-кривых. В частности, она возникает в такой ситуации для аналитической системы вида (1.1)

$$\frac{dx}{dt} = y + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = q(x, y), \tag{1.11}$$

для которой $F(\varphi) = -\sin^2 \varphi$. А. М. Ляпунов показал, что для этой системы (в случае монодромности точки O) на луче $\theta = 0$, $\rho \geq 0$ также может быть построена аналитическая функция последования $\rho_1 = d(\rho)$, если предварительно перейти в ней к специальным обобщенным полярным координатам ρ, θ.

В 50 — 60-е годы этим методом проблема различения центра и фокуса была решена для систем вида

$$\frac{dx}{dt} = y + X_{2n+1}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y_{2n+1}(x, y), \tag{1.12}$$

где X_{2n+1} и Y_{2n+1} — произвольные формы от x и y степени $2n + 1$, $n = 1, 2$, обеспечивающие монодромность точки O: при $n = 1$ — А. Ф. Андреевым, при $n = 2$ — А. П. Садовским (см., например, [59. С. 129]). Позднее система (1.12) с монодромной особой точкой O при произвольном n изучалась в работах [25, 26]. Их автор разработал для этой системы эффективный метод составления необходимых условий центра, допускающий компьютерную реализацию, получил необходимые и достаточные условия центра Андреева и Садовского и нашел первые восемь необходимых условий центра для случая $n = 3$, а для частного класса таких систем решил задачу различения центра и фокуса полностью.

В статье [15] рассмотрена на тот же предмет полиномиальная система

$$\dot{x} = ax^k - (l+1)y^l, \quad \dot{y} = (m+1)x^m + by^n, \tag{1.13}$$

где $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, l, m нечетные, $a, b \in \mathbb{R}$. Для нее при выполнении одного из условий:

1) $\dfrac{m}{n} < \dfrac{m+1}{l+1} < \dfrac{k}{l}$;

2) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m+1}{l+1} < \dfrac{k}{l}$, $m(l+1)u^{l+1} + nbu^n + (m+1)n > 0 \, \forall \, u \in \mathbb{R}$

точка O монодромна.

А. Ф. Андреев и П. Д. Ходы-Заде разработали для этой системы специальную (отличную от ляпуновской) систему обобщенных полярных координат и, записав в них систему (1.13), нашли для нее весьма широкие достаточные условия как для того, чтобы точка O была центром, так и для того, чтобы она была фокусом.

А. В. Скитовичем [50, 51] впервые была предпринята попытка разработать алгоритм решения проблемы различения центра и фокуса для монодромной особой точки O произвольной вещественно-аналитической системы (1.1), имеющей в этой точке исключительные направления. Автор [50] сначала формулирует критерий монодромности точки O системы (1.1) в терминах k-кратного полярного раздутия точки O по А. П. Воробьеву [24, 28] в монодромный снаружи сепаратрисный цикл Γ производных систем с конечным числом простых седел на нем. Затем А. В. Скитович [51] решает поставленную задачу для системы (1.1) в предположении, что эта система имеет в точке O одну пару исключительных направлений, а точка O для нее монодромна и растягивается в цикл Γ указанного вида с помощью двукратного полярного раздутия.

Делается это следующим образом. Опираясь на идеи А. Дюлака [63] и используя аппарат А. П. Воробьева, А. В. Скитович [52] строит для совокупности производных систем функцию последования $P(s)$ вдоль цикла Γ ($s \geq 0$ — параметр на внешней полутрансверсали к Г) в виде асимптотического ряда по степеням s и s^β, если β иррационально, и по степеням $s^{1/q}$ и $s^p \ln s$, если $\beta - p/q$ рационально (β — общий в рассматриваемом случае параметр седел на Г). Далее, следуя А. Дюлаку, он пытается применить этот ряд к исследованию внешней полуокрестности цикла Г, но А. Ф. Андреев [4] замечает некорректность в этом пункте рассуждений А. Дюлака (факт, широко известный теперь по статье Ю. С. Ильяшенко [29]). Поэтому А. В. Скитович отклоняется здесь от пути, указанного А. Дюлаком, а именно, находит условия абсолютной сходимости построенного им для ряда $P(s)$, предполагает их выполненными для рассматриваемой системы и лишь после этого утверждает, что для ее особой точки O необходимое и достаточное условие центра состоит в равенстве нулю всех коэффициентов ряда, представляющего функцию $P(s) - s$. При этом А. В. Скитович доказывает, что каждый из упомянутых коэффициентов определяется конечным числом членов тейлоровских разложений в точке O правых частей системы (1.1) и эти коэффициенты могут быть вычислены последовательно.

В статье [53] А. В. Скитович дополнил новыми свои прежние результаты о сходимости интегралов Дюлака.

В статьях [40, 41] В. П. Ноздрачева, также опираясь на работы А. Дюлака, изучила отображение соответствия между трансверсалями к сепаратрисам простого седла C^2-системы и на этой основе получила асимптотические представления функции последования на трансверсали к особому предельному циклу такой системы, содержащему лишь особенности типа простых седел, и времени обхода этого цикла по асимптотическим к нему траекториям системы. Эти ее результаты используются как при решении проблемы различения центра и фокуса для двумерных систем (в том числе, конечногладких), так и при изучении поведения трехмерных систем в окрестности особых инвариантных фокусов (см. п. 2. 2 данного обзора).

1. 4. Периодический аналог проблемы центра и фокуса

В работе Ю. Н. Бибикова [66] (см. также [70, 73]) изучался периодический аналог системы (1.1) при $m = 1$ в случае центра у линейной части системы, т. е. система

$$\dot{x} = \lambda y + p(x, y, t), \quad \dot{y} = -\lambda x + q(x, y, t), \tag{1.14}$$

где p, q — сходящиеся ряды по степеням x, y с 2π-периодическими коэффициентами без свободных и линейных членов. В полярных координатах

$x = r\cos\varphi$, $y = -r\sin\varphi$ система (1.14) принимает вид

$$\dot r = R(r,\varphi,t), \quad \dot\varphi = \lambda + \Phi(r,\varphi,t), \tag{1.15}$$

где $R = O(r^2)$, $\Phi = O(r)$. Пусть λ — иррациональное число. Тогда система (1.15) формально эквивалентна системе вида

$$\dot r = P(r), \quad \dot\varphi = \lambda + Q(r), \tag{1.16}$$

где P, Q — формальные ряды с постоянными коэффициентами.

А. Пуанкаре и А. М. Ляпунов показали, что если $P(r) \not\equiv 0$, то положение равновесия асимптотически устойчиво или неустойчиво в зависимости от знака первого ненулевого коэффициента ряда $P(r)$. Случай $P \equiv 0$ оставался не исследованным (для неавтономной системы (1.14)), хотя именно этот случай имеет место для важных приложений гамильтоновых и обратимых систем. В 1961 г. В. И. Арнольд доказал, что если система (1.14) гамильтонова, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Ю. Н. Бибиков исследовал данную задачу в общей постановке. Он доказал, что если в (1.16) $P(r) \equiv 0$, $Q(r) \not\equiv 0$, то нулевое решение системы (1.15) устойчиво по Ляпунову. Как частный случай отсюда вытекает устойчивость по Ляпунову нулевого решения дифференциального уравнения

$$\ddot x + \lambda^2 x = f(x,\dot x,t), \tag{1.17}$$

где $f = O\left((x+\dot x)^2\right)$, и выполняется условие обратимости

$$f(x,\dot x,t) = f(x,-\dot x,-t). \tag{1.18}$$

При этом условие иррациональности λ можно ослабить до условия отсутствия первых пяти резонансов.

Как уже упоминалось, проблема различения центра и фокуса возникает также в системах вида (1.11). В работах [76, 79] был исследован периодический аналог указанной проблемы в случае, когда $q(x,y,t) = -x^{2m-1} + Q(x,y,t)$, где $m \ge 2$ целое, а порядок малости $Q(x,y,t)$ по x, y не ниже $2m$, если переменной y приписывать порядок m. А. М. Ляпунов исследовал указанную проблему в случае, когда p и q не зависят от t. В обобщенных полярных координатах Ляпунова r,φ рассматриваемая система имеет вид

$$\dot r = R(r,\varphi,t), \quad \dot\varphi = r^{m-1} + \Phi(r,\varphi.t), \tag{1.19}$$

где $R = O(r^{m+1})$, $\Phi = O(r^m)$. Ю. Н. Бибиковым была разработана процедура осреднения правой части первого уравнения (1.19) [76], после выполнения которой оно приобретает вид $\dot r = P(r)$, где $P(r)$ — формальный ряд с постоянными коэффициентами. Как и ранее, ответ на вопрос об устойчивости решения в случае $P(r) \not\equiv 0$ дается с помощью знака первого ненулевого коэффициента $P(r)$. Для гамильтоновой системы (1.11), как и для уравнения

$$\ddot{x} + x^{2m-1} = f(x, \dot{x}, t) \qquad (1.20)$$

при выполнении условия обратимости (1.18), $P(r) \equiv 0$. В этом случае нулевое решение неасимптотически устойчиво по Ляпунову [69]. В частности, такое утверждение справедливо и для консервативного уравнения

$$\ddot{x} + x^{2m-1} = f(x, t). \qquad (1.21)$$

Задача об устойчивости бесконечно удаленного решения уравнения (1.21) приводит к вопросу об ограниченности его решений. В работе [69] показано, что если $f(x,t)$ полином степени m с периодическими коэффициентами, то все решения уравнения (1.21) ограничены. Отсюда вытекает справедливость гипотезы Дж. Литтлвуда [80] об ограниченности решений уравнения $\ddot{x} + g(x) = p(t)$ в указанном частном случае (в общем случае гипотеза неверна).

Проблема различения центра и фокуса в системе (1.1) при $m = 1$ и в системе (1.11) тесно связана с задачей о бифуркации положения равновесия в однопараметрических семействах систем указанного типа при прохождении параметра системы через критическую точку нуль. Впервые такая задача была поставлена в начале 1930-х годов А. А. Андроновым для автономной системы (1.1) при $m = 1$. В этом случае имеет место бифуркация рождения периодического решения. В 1961 г. Ю. И. Неймарк изучил периодический аналог бифуркации Андронова и доказал, что имеет место бифуркация рождения инвариантного тора, одна из угловых переменных которого является угловой переменной в полярных координатах, а другая — факторизованным по $\bmod 2\pi$ временем. В работе [76] была изучена бифуркация положения равновесия уравнения

$$\ddot{x} + x^3 + \varepsilon\, a\, x = f(x, \dot{x}, t, \varepsilon), \qquad (1.22)$$

где $a > 0$, f — 2π-периодическая функция t, имеющая четвертый порядок малости, если переменной x приписывать первый порядок малости, а переменным $\dot{x}, \varepsilon$ — второй, ε — малый неотрицательный параметр. Иначе говоря, рассматривается однопараметрическое возмущение уравнения (1.20) при $m = 2$. Особенностью этой бифуркации по сравнению с бифуркацией Андронова — Неймарка является то, что в ответвляющемся двумерном торе скорость изменения угловой переменной имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$ по отношению ко времени. Как и в бифуркации Андронова, рождение инвариантного тора происходит при смене характера устойчивости положения равновесия при прохождении ε через точку нуль. В последнее время [77] были исследованы малые периодические возмущения осциллятора $\ddot{x} + x^{1/3} = 0$. Однако в этом случае, в отличие от предыдущего, на инвариантном торе угловая переменная изменяется в $\sqrt{\varepsilon}$ раз быстрее времени.

1.5. Глобальное исследование некоторых классов систем

В работах [32–34] Е. Ю. Карданова рассмотрела класс квадратичных систем, для каждой из которых $O = (0, 0)$ — особая точка с одним нулевым характеристическим корнем. Она исследовала поведение траекторий систем этого класса в круге Пуанкаре, а именно, нашла для них конечные и бесконечно удаленные особые точки и определила их типы, изучила проблему существования и числа предельных циклов (с точностью до их возникновения или исчезновения через уплотнение траекторий), установила поведение сепаратрис седел и седлоузлов, описала бифуркационные поверхности, разбивающие пространство параметров на области, соответствующие грубым системам, построила фазовые портреты последних.

В работе [38] Л. Н. Лебедева провела полное глобальное качественное исследование одного класса кубических A_2-систем.

М. П. Григорьевым [27] так же был исследован один класс систем вида (1.11) с центром в точке O.

2. Исследование n-мерных систем

2.1. Проблемы различения для исключительных направлений

Рассматривается квазиоднородная система

$$\frac{dx}{dt} = P(x) + p(x), \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, P — ненулевая векторная форма от $x_1, \ldots, x_n$ степени $m \geq 1$, $p \in C(D)$, $D : |x| < \delta\,(\delta > 0)$ — область единственности для траекторий системы, $|p(x)| = o(r^m)$ при $r = |x| \to 0$, $O(0, \ldots, 0)$ — изолированная особая точка системы. Предполагается, что $u = u_0$ — изолированное исключительное направление системы в точке O (здесь $u, u_0 \in S^{n-1} : |x| = 1$), т. е. $x = u_0 r$, $r > 0$, — изолированный инвариантный луч однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x). \tag{2. 1$_0$}$$

Ставятся вопросы о существовании у системы (2. 1) O-кривых, примыкающих к точке O по направлению $u = u_0$, и (в случае их существования) о размерности множества $M \subset D \setminus O$, покрытого точками таких кривых.

Для обыкновенного исключительного направления ($u = u_0 r$, $r > 0$, — неособый инвариантный луч системы (2. 1_0)) эти вопросы исследовались в работах [5, 6, 16–18]. В них авторы рассмотрели исключительные направления системы (2. 1) в точке O и для каждого ее типа нашли условия k-мерности множества M $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для особых исключительных направлений квазилинейной системы (2. 1) класса C^1 с одним нулевым характеристическим корнем в точке O эти вопросы исследованы в работах [14] и [47]. В них авторы предложили простые способы определения поведения траекторий системы на центральном инвариантном многообразии точки O при $n = 2$ и $n \geq 3$ соответственно.

2. 2. Исследование окрестности инвариантного многообразия

2. 2. 1. Квазиоднородные системы. Рассматривается квазиоднородная система (2. 1) при $n = 3$. Замена (сферическое раздутие)

$$x = ur, \quad r = |x|, \quad \tau = \int\limits_0^t r^{m-1}(s)\, ds$$

преобразует ее в систему вида

$$\frac{dr}{d\tau} = r(G(u) + g(r, u)), \quad \frac{du}{d\tau} = F(u) + f(r, u), \tag{2. 2}$$

где F — векторная, G — скалярная формы от u_1, u_2, u_3, $f, g \in C(D')$, $D' = [0, \delta) \times S^2$, $f(0, u) \equiv 0$, $g(0, u) \equiv 0$. При этом особая точка O системы (2. 1) раздувается в сферу $S_0^2 = \{0\} \times S^2$, которая инвариантна для системы (2. 2). Траектории системы (2. 2) на S_0^2 описываются уравнениями $r = 0$ и

$$\frac{du}{d\tau} = F(u). \tag{2. 3}$$

В статье [9] для системы (2.2) изучаются: а) структура ω-предельного множества $\Omega(L^+)\,(\subset\ S_0^2)$ произвольной фиксированной полутраектории

$$L^+ : r = r(\tau),\, u = u(\tau),\, \tau \geq 0,\, r(\tau) \to 0 \quad \text{при } \tau \to +\infty; \qquad (2.4)$$

б) структура множества M, покрытого полутраекториями L^+, имеющими фиксированное ω-предельное множество $\Omega\,(\subset\ S_0^2)$. Доказывается следующий предельный аналог "плоской"теоремы Пуанкаре–Бендиксона.

Теорема 2.1. *Пусть* $u_0\,(\in S^2)$ — *обыкновенная точка системы* (2.3), $\ell_{u_0} : u = u(\tau),\, \tau \in \mathbb{R},\, u(0) = u_0,$ — *траектория этой системы,* L^+ — *полутраектория системы* (2.2) *вида* (2.4). *Если точка* $(0, u_0) \in \Omega(\text{Ł}^+)$, *то либо* ℓ_{u_0} — *замкнутая траектория, либо* $A(\ell_{u_0})$ *и* $\Omega(\ell_{u_0})$ *состоят из точек покоя системы* (2.3).

Далее здесь ряд теорем Р. Гомори распространяется на неаналитический случай [64]. В частности, доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть* $\ell\,(\subset S^2)$ — *замкнутая траектория или точка покоя типа "центр"системы* (2.3), L^+ — *та же, что и выше; пусть в* (2.1) $p \in C^{m+1}(D)$. *Если* $\ell_0 = \{0\} \times \ell \subset \Omega(L^+)$, *то* $\Omega(L^+) = \ell_0$.

В работах [9, 19] доказываются теоремы об условиях сохранения (с точностью до гомеоморфизма) инвариантного конуса $\Pi = (0, \delta) \times \ell$ однородной системы (2.1_0) ($\ell \subset S^2$ — цикл системы (2.3)) при переходе от системы (2.1_0) к системе (2.1).

В статье [46] изучены проблема топологической эквивалентности системы вида (2.2), заданной на $\mathbb{R} \times S$, где S — произвольное компактное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и ее укорочения (2.2_0) (см. далее) в некоторой окрестности подмногообразия $S_0 = \{0\} \times S$ в $\mathbb{R} \times S$. Доказана следующая общая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть функции* $F,\ G,\ f,\ g \in C^3(\mathbb{R} \times S)$, $G(u) < 0$ $\forall u \in S$. *Если* $\forall\, \tau \in (0, \delta)$, $\delta > 0$, *и* $\forall\, u \in S$

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\tau, u) \right)^{-1} \right| \exp \int\limits_0^\tau G(\varphi(\tau, u))d\tau \leq \lambda(\tau) < 1,$$

где $\varphi(\tau, u)$ — *решение системы* (2.3), $\varphi(0, u) = u$, *а* $|A| = \max\limits_{|u|=1} |Au|$, *то система* (2.2) *топологически эквивалентна системе* (2.2_0) *в некоторой окрестности* S_ε *многообразия* S_0 *в* $\mathbb{R} \times S$.

Эта теорема применена автором для получения достаточных условий эквивалентности систем (2. 1) и $(2.\,1_0)$ в окрестности инвариантных многообразий (лучей, конусов) системы $(2.\,1_0)$.

В статье [45] автор изучил для системы $(2.\,1_0)$ порядка $n \geq 2$ с $P(x) \neq 0$ при $x \neq 0$ гомотопический инвариант $J = \deg v(u)$, где $v(u) = P(u) \,/\, |P(u)| \, : \, S^{n-1} \to S^{n-1}$, и установил для него зависимости от m и n : 1) $J \equiv m \,(\mathrm{mod}\; 2)$; 2) $J \leq m^{n-1}$; 3) $J = 0$ при четном m и нечетном n.

2. 2. 2. Однородные системы. В $\mathbb{R}^3$ рассматривается однородная система $(2.\,1_0)$. В координатах r, u, τ она имеет вид

$$\frac{dr}{d\tau} = rG(u), \quad \frac{du}{d\tau} = F(u). \tag{$2.\,2_0$}$$

Предполагается, что у системы на сфере S^2 (2. 3) существует цикл или особый цикл П, являющийся ω-предельным множеством ее траекторий, начинающихся хотя бы в одной из его полуокрестностей, и, следовательно, система $(2.\,2_0)$ имеет инвариантный конус $K = (0, +\infty) \times \Pi$. При этом возникает задача о возможных типах ω-предельных множеств траекторий системы $(2.\,2_0)$, начинающихся в соответствующей полуокрестности конуса K, и об условиях одновременной реализации того или иного набора этих типов множеств для конкретной системы вида $(2.\,2_0)$.

Для случая, когда П — цикл, эта задача рассмотрена в статье [12]. Здесь авторы существенно усилили результаты, полученные ранее по этой проблеме К. Колеманом [62].

Для случая, когда П — особый цикл, во всех особых точках которого функция $G(u)$ принимает значения с одним и тем же знаком, задача решается элементарно. В противоположной ситуации она становится весьма трудной. Принципиальных успехов в ее исследовании, и притом первой, достигла В. П. Ноздрачева [40–42]. Прежде всего ею был разработан адекватный поставленной задаче математический аппарат (см. п. 1. 3 настоящего обзора). Затем с помощью этого аппарата она полностью решила задачу для случая двух простых седел на П. Эти исследования продолжила Е. О. Кох [35, 36]. Применяя аппарат В. П. Ноздрачевой, она полностью решила задачу для случаев трех и четырех седел на П.

2. 3. Исследование особых точек с тройным нулевым характеристическим корнем

Рассматривается система класса C^∞

$$\frac{dx}{dt} = Ax + p(x), \tag{2.5}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, A — ненулевая постоянная матрица, имеющая тройное нулевое собственное число, $|p(x)| = o(|x|)$ при $|x| \to 0$. Предполагается, что $O = (0, 0, 0)$ — изолированная особая точка системы. Ставится задача: выяснить возможные топологические типы расположения траекторий системы в малой окрестности точки O и условия их реализации.

2. 3. 1. Случай, когда жорданова форма матрицы A состоит из одной клетки. В указанном случае поставленная задача была исследована В. Б. Пилюгиной [48, 49]. Сначала, рассматривая произвольную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \tag{2.6}$$

$X \in C^\infty(D)$, $O \in D \subset \mathbb{R}^3$, с вырожденной изолированной особой точкой O, В. Б. Пилюгина предложила новый метод разрешения особенности O — обобщенный σ-процесс ($\tilde\sigma$-процесс). Он состоит в раздутии точки O в проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ или сферу S^2 следующим способом. Берутся числа $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ такие, что дроби p/q и r/s несократимы. Если p, q, r, s нечетны, то рассматривается расслоение $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \setminus O \to \mathbb{RP}^2$, слоями которого являются параболы

$$\begin{gathered} x_2 = u x_1^{p/q}, \quad x_3 = v x_1^{r/s}, \quad x_1 \neq 0, \\ x_1 = 0, \quad x_3 = w x_2^{qr/ps}, \quad x_2 \neq 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

и прямая $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \neq 0$, где $u, v, w \in \mathbb{R}$. График Γ этого расслоения в $(\mathbb{R}^3 \setminus O) \times \mathbb{RP}^2$ покрывается картами U_i с локальными координатами x_i, u_i, v_i, $i = 1, 2, 3$, которые связаны с x_1, x_2, x_3 формулами

$$x_j = u_i x_i^{\nu_i},\ x_k = v_i x_i^{\mu_i},\ x_i \neq 0,\ u_i, v_i \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

(где $j = i + 1$, $k = j + 1$, $x_4 = x_1$, $\nu_1 = p/q$, $\mu_1 = r/s$, пары (ν_i, μ_i), $i = 1, 2$, согласованы с (ν_1, μ_1)), и превращается, таким образом, в C^a-многообразие. Векторное поле (2. 6) с помощью формул (2. 8) переносится из области $D \setminus O$ на ее образ $E \subset \Gamma$. Это новое поле V (после перехода на каждой карте к орбитально эквивалентному) индуцирует поле $\tilde V$ на $E \cup \mathbb{RP}^2$ ($\subset \Gamma \cup \mathbb{RP}^2 = \overline{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^2$), т. е. в δ-окрестности $\mathbb{P}_\delta$ проективной плоскости $\mathbb{P} = O \times \mathbb{RP}^2$. При этом особая точка O поля (2. 6) раздувается в проективную плоскость $\mathbb{P}$, которая инвариантна для поля $\tilde V$. Если параметры

$\nu = p/q$ и $\mu = r/s$ расслоения $\mathcal{R}$ удается выбрать так, что поле $\tilde{V}$ имеет на $\mathbb{P}$ несколько (не менее двух) особых точек, то каждая из них оказывается менее вырожденной, чем исходная особая точка O поля (2.6), и, следовательно, особенность O разрешается. Остается исследовать поведение траекторий поля $\tilde{V}$ на $\mathbb{P}$ и в $\mathbb{P}_\delta$ и применить $\tilde{\sigma}^{-1}$-процесс, т.е. рассмотреть естественную проекцию $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$, которая и отобразит траектории поля $\tilde{V}$, лежащие в E, на траектории поля (2.6), лежащие в $D \setminus O$. При $p = q = r = s = 1$ $\tilde{\sigma}$-процесс совпадает с σ-процессом [57. С. 17].

Если среди чисел p, q, r, s есть четные, то точка O раздувается в сферу S^2. Для этого рассматривается расслоение $\mathcal{R}^+ : \mathbb{R}^3 \setminus O \to S^2$ на полупараболы вида (2.7) (с заменой в необходимых случаях под знаком степени x_i на $|x_i|$, $i = 1, 2$) и полупрямые $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \neq 0$. Его график Γ^+ в $(\mathbb{R}^3 \setminus O) \times S^2$ покрывается шестью соответствующими локальными картами и превращается в C^a-многообразие. Поле (2.6) переносится из $D \setminus O$ на подмногообразие $E \subset \Gamma^+$. Это новое поле V индуцирует поле $\tilde{V}$ на $E \cup S^2$, т.е. на внешней δ-полуокрестности сферы S^2. Последняя является образом точки O при этом $\tilde{\sigma}$-процессе. Она инвариантна для поля $\tilde{V}$.

Затем В. Б. Пилюгина преобразовала систему (2.5), для которой $p \in C^\infty(D)$, в систему вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = X_3(x_1, x_2, x_3), \tag{2.9}$$

где

$$X_3(x_1, x_2, x_3) = f_0(x_1) + f_1(x_1)x_2 +$$

$$+(f_2(x_1) + Q_0(x_1, x_2))x_2^2 + (f_3(x_2) + Q_1(x_1, x_2, x_3))x_3,$$

$$f_i(x_1) = x_1^{\alpha_i}(a_i + F_i(x_1)),\ \alpha_i \geq 0,\ a_i \in \mathbb{R},\ F_i(0) = 0,$$

$$\alpha_0 \geq 2,\ \alpha_1, \alpha_3 \geq 1, a_0 a_1 \neq 0,\ F_i,\ Q_i \in C^\infty(D),\ i = 0, \ldots, 3.$$

Она применила к системе (2.9) $\tilde{\sigma}$-процесс и полностью выяснила поведение ее траекторий в окрестности точки O для случаев, когда параметры правых частей удовлетворяют одному из следующих условий:

1) $3\alpha_1 + 2 < 2\alpha_0$, $\alpha_1 < 2\alpha_2 + 2$, $\alpha_1 < 2\alpha_3$, $a_1 > 0$;

2) $3\alpha_3 + 1 < \alpha_0$, $2\alpha_3 < \alpha_1$, $\alpha_3 < \alpha_2 + 1$, $a_0 a_1 a_3 \neq 0$
(исключая подслучаи $\alpha_0 + \alpha_3 < 2\alpha_1 + 1$, $\alpha_0 - \alpha_3$ нечетно, $\frac{a_0}{a_3} > 0$ и $\alpha_0 + \alpha_3 = 2\alpha_1 + 1$, $4a_0 a_3 > \frac{a_1^2}{\alpha_1 - \alpha_3 + 1}$);

3) α_0 четное, $2\alpha_0 < 3\alpha_1 + 2$, $\alpha_0 < 3\alpha_2 + 4$, $\alpha_0 < 3\alpha_3 + 1$, $a_0 \neq 0$.

Для каждого из этих случаев строится отдельный $\tilde{\sigma}$-процесс, обеспечивающий разрешимость особенности O системы (2.9). В случаях 1) и 3) результаты достигаются при $F_i \in C^1(D)$, $i = 0, \ldots, 3$, $Q_i \in C^2(D)$, $i = 0, 1$, в случае 2) — при $F_i \in C^3(D)$, $i = 0, \ldots, 3$, $Q_i \in C^4(D)$, $i = 0, 1$.

2.3.2. Случай, когда жорданова форма матрицы A состоит из двух клеток. Этот случай, также применяя $\tilde{\sigma}$-процесс, исследовал А. Я. Капитанов [30, 31]. Он привел систему (2.5) к системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f_1(x) + f_2(x)y + f_3(x)z + \ldots, \\ \dot{z} &= g_1(x) + g_2(x)y + g_3(x)z + g_4(x)y^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $f_i(x) = x^{\alpha_i}(a_i + \ldots)$, $g_i(x) = x^{\beta_i}(b_i + \ldots)$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ — целые числа, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$, если $f_i(x) \not\equiv 0$, $b_i \neq 0$, если $g_i(x) \not\equiv 0$, $i = 1, \ldots, 4$, $\alpha_1, \beta_1 \geq 2$, $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \geq 1$, $\beta_4 \geq 0$ (многоточие означает совокупность членов высшего порядка относительно x или y, z). Затем он разбил множество M допустимых точек $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ на попарно непересекающиеся подмножества M_k, $k = 1, \ldots, 6$, и $\forall\, k = 1, \ldots, 5$ построил для системы класса M_k разрешающий особенность O $\tilde{\sigma}$-процесс, раздувающий точку O в сферу S^2 с несколькими особыми точками на ней нового поля $\tilde{V}$. При $k \in \{1, 2, 3\}$ в ряде случаев он полностью выяснил возможные топологические типы точки O системы (2.10) класса M_k и условия их реализации. В других случаях он нашел новые достаточные признаки асимптотической устойчивости, неустойчивости точки O, а в некоторых ситуациях и критерии асимптотической устойчивости точки O системы (2.10) класса M_k.

2.3.3. Выбор параметров $\tilde{\sigma}$-процесса. В аннотированных работах В. Б. Пилюгиной и А. Я. Капитанова выбор параметров ν, μ $\tilde{\sigma}$-процесса разрешения особенности O системы (2.5) происходил на эвристическом уровне. М. Р. Бортковская [20 − 23] предприняла попытку разработать для этой цели регулярный метод.

Рассматривая систему (2.5) при условиях п. 2.3.2, М. Р. Бортковская сначала формально преобразует ее в систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= Y_1(x, z) + Y_2(x, z)y \equiv Y(x, y, z), \\ \dot{z} &= Z(x, z), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где Y, Z — формальные ряды по степеням x, y, z без свободных и линейных членов, а затем для аналитической системы вида (2. 11) указывает способ выбора параметров $\tilde{\sigma}$-процесса.

Любая O-кривая такой системы вблизи точки O представима в виде

$$y = y(x),\ z = z(x),\ x \in (0, \Delta] \text{ или } x \in [-\Delta, 0),\ \Delta > 0, \tag{2. 12}$$

где (2. 12) есть O-решение (O-кривая) системы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y, z)}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z(x, z)}{y}. \tag{2. 13}$$

Для выявления O-кривых системы (2. 13) М. Р. Бортковская развивает пространственный аналог метода Фроммера: вводит для них понятие векторного порядка кривизны (ν, μ) в точке O, $\nu, \mu \in [0, +\infty]$, а для $O^{(\nu,\mu)}$-кривых с $\nu, \mu \in (0, +\infty)$ — понятие векторной меры кривизны (γ, δ) в точке O, $\gamma, \delta \in [-\infty, +\infty]$, предлагает способы отыскания возможных порядков и возможных мер кривизны O-кривых системы (2. 13) и исследует проблему существования O-кривых с этими порядками и мерами кривизны. Из ее результатов следует, что для разрешения особенности O системы вида (2. 11) с помощью $\tilde{\sigma}$-процессов в качестве их векторных параметров (ν, μ) необходимо выбирать именно возможные конечные порядки кривизны O-кривых соответствующей системы (2. 13). При этом, по крайней мере для так называемых простых порядков кривизны, разрешение особенности всегда достигается (с точностью до полного решения задачи глобального качественного исследования траекторий поля $\tilde{V}$ на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ или на сфере S^2).

2. 4. Существование инвариантных торов в окрестности особой точки

Рассмотрим систему (2. 1) при $m = 1$, т. е. систему

$$\dot{x} = Ax + p(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2. 14}$$

где A — постоянная матрица, $p(x)$ — векторнозначная функция, координатные функции которой суть сходящиеся ряды без свободного и линейного членов. Предполагается, что $\det A \neq 0$ и что матрица A допускает существование m пар чисто мнимых собственных чисел $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_m$, причем остальные (если $n > 2m$) собственные числа имеют ненулевые действительные части.

В работах [65, 68, 70, 78] (результаты обобщены в монографии [73]) рассматривалась задача дальнейшего развития положений теории А. Н. Колмогорова – В. И. Арнольда – Ю. Мозера (КАМ-теории) о существовании инвариантных торов в окрестности положения равновесия гамильтоновой системы (2. 14) при $n = 2m$ и распространении ее результатов на обратимые системы, в частности, на системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_k + 2a_k\dot{x}_k + b_k x = f_k(x, \dot{x}),\ b_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, d, \tag{2.15}$$

где f_k — вещественно аналитические функции, не содержащие свободных и линейных членов, которые переходят в себя при замене t на $-t$. Доказано, что при отсутствии резонансов первых пяти порядков для чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ гамильтонова система (2. 14) и обратимая система (2. 15) имеют в любой окрестности нулевого решения инвариантные m-мерные торы. Тем самым положения КАМ-теории распространены на системы, имеющие некритические переменные, соответствующие гиперболической части спектра матрицы A.

Указанные результаты можно интерпретировать следующим образом. Систему (2. 14) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_k = i\alpha_k y_k + Y(y, \overline{y}, z),\\
&\dot{\overline{y}}_k = -i\alpha_k \overline{y}_k + \overline{Y}(y, \overline{y}, z),\\
&\dot{z} = Bz + Z(y, \overline{y}, z),\ k = 1, \ldots m,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где черта означает комплексную сопряженность, а матрица B гиперболическая.

Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ несоизмеримы. Тогда система (2. 16) формально эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_k = y_k(i\,\alpha_k + P_k(y_1\overline{y}_1, \ldots, y_m\overline{y}_m)) + Y^*_k(y, \overline{y}, z),\\
&\dot{\overline{y}}_k = \overline{y}_k(-i\,\alpha_k + \overline{P}_k(y_1\overline{y}_1, \ldots, y_m\overline{y}_m)) + \overline{Y}^*_k(y, \overline{y}, z),\\
&\dot{z} = Bz + Z^*(y, \overline{y}, z),\ k = 1, \ldots m,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $Y^*_k(y, \overline{y}, 0) = \overline{Y}^*_k(y, \overline{y}, 0) = 0$, $Z^*(y, \overline{y}, 0) = 0$. Предположим, что выполняется условие нейтральности

$$P_k(y_1\overline{y}_1, \ldots, y_m\overline{y}_m) = i\,H(y_1\overline{y}_1, \ldots, y_m\overline{y}_m), \tag{2.18}$$

где H — ряд с вещественными коэффициентами. Система (2.17) при условии (2.18) имеет интегральные поверхности

$$z = 0, \quad y_k \overline{y}_k = c_k > 0, \quad k = 1, \dots m, \tag{2.19}$$

являющиеся инвариантными m-мерными торами. Если бы эквивалентность систем (2.16) и (2.17) была не только формальной, но и аналитической, то указанным торам соответствовали бы инвариантные торы системы (2.16). Оказывается, что, несмотря на расходимость нормализующих преобразований, "большинству"в определенном смысле инвариантных торов (2.19) действительно соответствуют инвариантные торы системы (2.16), а значит, и системы (2.14). Условие (2.18) автоматически выполняется для гамильтоновых и обратимых систем. Более того, для этих классов систем условие несоизмеримости чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ можно ослабить до требования отсутствия резонансов первых пяти порядков.

Далее рассматривалось однопараметрическое семейство достаточно гладких диссипативных систем вида (2.14), т. е. системы

$$\dot{x} = Ax + p(x, \varepsilon), \tag{2.20}$$

где ε — малый неотрицательный параметр, $p = O(x_1 + \dots + x_n + \varepsilon)^2$. В работах [71, 72] (см. также [73]) была изучена бифуркация нулевого положения равновесия системы (2.20) с ответвлением инвариантного тора при прохождении параметра ε через критическую точку нуль. Полученные результаты являются далеко идущими обобщениями бифуркации Андронова рождения предельного цикла. Разработана процедура, состоящия из конечного числа N шагов, приводящая в случае отличия от нуля некоторых детерминантов к построению инвариантных торов различных размерностей $l \geq m$. На s-м шаге добавляются угловые переменные, скорость изменения которых имеет порядок ε^{s-1}. Бифуркация Андронова соответствует случаю $N = m = l = 1$.

В работе [75] в том же ключе была изучена задача сохранения и бифуркации инвариантного тора с ответвлением инвариантного тора бóльшей размерности в предположении, что система в вариациях, соответствующая невозмущенному инвариантному тору, приводима.

2.5. Развитие метода нормальной формы исследования изолированной особой точки

Результаты, описанные в п. 1.4 и 2.4, были получены с использованием понятия нормальной формы системы дифференциальных уравнений, восходящего к А. Пуанкаре. При наличии некритических переменных была применена разработанная Ю. Н. Бибиковым (см. [70]) модификация понятия нормальной формы, называемая нормальной формой на инвариантной поверхности. Основной для введения этого понятия является идея о нормализации дифференциальных уравнений только по части переменных, соответствующих избранным характеристическим числам, скажем, чисто мнимым характеристическим числам. Примером нормальной формы на инвариантной поверхности является система (2. 17). Другой модификацией понятия нормальной формы является так называемая квазинормальная форма (см. [70]), которая специально приспособлена для исследования критических случаев теории устойчивости движения. С использованием понятия квазинормальной формы в работе [66] была решена задача об устойчивости положения равновесия периодической системы в критическом трансцендентном случае двух чисто мнимых характеристических показателей при наличии характеристических показателей с отрицательными действительными частями.

В известной монографии К. Л. Зигеля “Лекции по небесной механике” (см. § 25) был поставлен вопрос о наличии аналитической эквивалентности между аналитической системой второго порядка и ее нормальной формой в случае негрубого фокуса. В диссертации В. В. Басова (1978, см. [73, дополнение 1]) на этот вопрос был дан отрицательный ответ. В работе [67] Ю. Н.Бибиков доказал, что тем не менее существует C^1-гладкое преобразование системы в систему в нормальной форме. Наконец, в диссертации С. П. Токарева (1977, см. [73, дополнение 2]) было доказано наличие C^∞-эквивалентности в задаче Зигеля.

3. Исследование линейных и квазилинейных систем

3. 1. Сохранение квазипериодических решений линейных систем при квазипериодических возмущениях

Рассмотрим линейную неоднородную систему с квазипериодической неоднородной функцией $q(t)$:

$$\dot{x} = Ax + q(t), \tag{3. 1}$$

где A — постоянная матрица с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Если число базисных частот $q(t)$ равно единице, т. е. $q(t)$ — периодическая функция, и отсутствуют резонансы, то по известной теореме Пуанкаре система

(3. 1) имеет единственное периодическое решение, сохраняющееся и при малых периодических возмущениях системы (3. 1) с тем же периодом. Более точно, система

$$\dot{x} = Ax + q(t) + \varepsilon f(x,t), \tag{3. 2}$$

при всех достаточно малых $|\varepsilon|$ имеет единственное периодическое решение, стремящееся к периодическому решению системы (3. 1) при $\varepsilon \to 0$.

Ю. Н. Бибиков в работе [74] исследовал квазипериодические возмущения (3. 1), т. е. систему (3. 2), где $q(t), f(x,t)$ — квазипериодические функции с базисными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Условие отсутствия резонансов принимает вид неравенств

$$\left| i\sum_{k=1}^{m} p_k\omega_k + \sum_{j=1}^{m} l_j\lambda_j \right| > \gamma|p|^{-\tau}, \tag{3. 3}$$

где $\gamma > 0$, $\tau > 0$, p_k, l_j — целые числа, $|p| = |p_1| + \cdots + |p_m| > 0$, $|l| = |l_1| + \cdots + |l_m| \le 2$, $|l_1 + \cdots + |l_m| \le 1$.

Им было показано, что при диссипативных возмущениях $f(x,t)$ квазипериодические решения невозмущенной системы сохраняются при всех достаточно малых $|\varepsilon|$. В случае гамильтоновых и обратимых возмущений это утверждение остается справедливым для большинства в смысле меры Лебега значений малого параметра ε.

3. 2. Изменение спектра правильной линейной системы второго порядка при малых возмущениях коэффициентов

Рассмотрим правильную систему

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbb{R}^2 \tag{3. 4}$$

и возмущенную систему

$$\dot{x} = [A(t) + Q(t)]x, \tag{3. 5}$$

где $A, Q \in C(R_+)$, $\sup\limits_{t\in R_+} \|A(t)\| \le M$, $\sup\limits_{t\in R_+} \|Q(t)\| \le \delta$.

Получены следующие достаточные условия устойчивости характеристических показателей системы (3. 4).

I. Пусть существуют решения $x_1(t)$ системы (3. 4) и $x_2(t)$ системы (3. 5) такие, что выполнено одно из двух условий:

1) $\sin^2 \measuredangle(x_1(t), x_2(t)) \le c^2\delta^2$, $t \in R_+$;

2) $\sin^2 \measuredangle(x_1(t), x_2(t)) \ge 1 - c^2\delta^2$, $t \in R_+$, $c \in \mathbb{R}$.

Тогда характеристические показатели систем (3. 4) и (3. 5) отличаются не более чем на величину $R\delta$, где константа R зависит от M, c и δ (см. [82]).

II. Пусть существуют решения $x_1(t)$ системы (3. 4) и $x_2(t)$ системы (3. 5) такие, что $\sin^2 \measuredangle(x_1(t), x_2(t)) \ge s^2$, $t \in R_+$, $s \in \mathbb{R}$, тогда характеристические показатели систем (3. 4) и (3. 5) отличаются не более чем на величину $K\sqrt{\delta}$, где K зависит от M, s и δ (см. [82]).

III. Получен коэффициентный критерий совпадения и устойчивости характеристических показателей системы (3. 4) в предположении правильности возмущенной системы (см. [81]).

3. 3. Описание свойств линейной системы второго порядка в терминах ее коэффициентов

Линейные неавтономные системы не решаются в явном виде, поэтому любая возможность определить свойства системы и характер решений через ее коэффициенты представляется весьма важной.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{3. 6}$$

$x \in \mathbb{R}^2$, $P(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j=1,2}$, $P \in C^1(R_+)$, $\sup\limits_{t \in R_+} \|P(t)\| < \infty$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &z(t) = p_{11}(t) - p_{22}(t), \qquad w(t) = p_{21}(t) + p_{12}(t),\\ &s(t) = (z^2(t) + w^2(t))^{1/2}, \quad \sin\beta = \frac{z(t)}{s(t)}, \quad \cos\beta = \frac{w(t)}{s(t)},\\ &u(t) = p_{21}(t) - p_{12}(t) + \frac{1}{s^2}\left(\dot{z}(t)w(t) - z(t)\dot{w}(t)\right). \end{aligned}$$

В статьях [84] и [85] получены следующие результаты.

Т е о р е м а 3. 1. *Если* $s(t) - |u(t)| \ge \delta > 0$, $t \in R_+$, *то система* (3. 6) *интегрально разделена.*

Из утверждения теоремы следует, что характеристические показатели системы (3. 6) различны, устойчивы, а сама система диагонализуема.

Пусть $s(t) \le M$, тогда при выполнении условий теоремы имеем оценку снизу для старшего показателя λ_1 и оценку сверху для младшего λ_2 :

$$\lambda_1 \geq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{2t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\, d\tau + \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{2\delta}{M} - \frac{\delta^2}{M^2}}\,,$$

$$\lambda_2 \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{2t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\, d\tau - \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{2\delta}{M} - \frac{\delta^2}{M^2}}\,.$$

Пусть в условиях теоремы 3.1 $|u(t)| > 0$, $t \in R_+$. Тогда справедливы оценки нормы линейно независимых решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$

системы (3.6):

$$\sqrt{1-\theta_2^2}\int_0^t s(\tau)\, d\tau \leq 2\ln\frac{\|x_1(t)\|}{\|x_1(0)\|} - \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\, d\tau \leq \sqrt{1-\theta_1^2}\int\limits_0^t s(\tau)\, d\tau,$$

$$-\sqrt{1-\theta_1^2}\ \int_0^t s(\tau)\, d\tau \leq 2\ln\frac{\|x_2(t)\|}{\|x_2(0)\|} - \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\, d\tau \leq$$

$$\leq -\sqrt{1-\theta_2^2}\int_0^t s(\tau)\, d\tau,$$

где $\theta_1 = \inf\limits_{t\in R_+} \dfrac{|u(t)|}{s(t)}$, $\theta_2 = \sup\limits_{t\in R_+} \dfrac{|u(t)|}{s(t)}$.

Теорема 3.2. *Система* (3.6) *имеет два линейно независимых решения, сохраняющих между собой на фазовой плоскости при* $t \in R_+$ *постоянный угол, тогда и только тогда, когда существует число* $\gamma \in (-1, 1)$ *такое, что* $s(t)\gamma + u(t) \equiv 0, \quad t \in R_+$.

В этом случае система (3.6) *интегрируется.*

Теорема 3.3. *Пусть коэффициенты системы* (3.6) *таковы, что:*

1) $s(t) - |u(t)| \geq \delta > 0, \quad t \in R_+$;

2) *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\, d\tau = \Lambda < \infty$;

3) $\dot{s}(t) \neq 0, \quad t \in R_+$.

Тогда система (3.6) *правильна.*

Если система (3.6) правильная и $\int_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\,d\tau < \infty$, то фундаментальная матрица системы (3.6) имеет вид $L(t)\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\,d\tau\right]$, где $L(t)$ — ляпуновская матрица, а характеристические показатели λ_1 и λ_2 равны между собой:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \chi\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ P(\tau)\,d\tau\right]\right\}.$$

3.4. Аппроксимация спектра периодической линейной системы второго порядка

Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.7}$$

с кусочно-непрерывной, ограниченной на R_+ матрицей коэффициентов и характеристическими показателями $\alpha \le \beta$.

По последовательности $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ построим последовательность систем

$$\dot{y} = A_{t_k}(t)y, \tag{3.8}$$

где $A_{t_k}(t) \equiv A(t)$ при $t \in [0, t_k)$ и далее матрица $A_{t_k}(t)$ продолжается вдоль оси t периодически с периодом t_k, ее характеристические показатели $\lambda_1^{(k)} \le \lambda_2^{(k)}$. Будем рассматривать только те последовательности t_k, для которых существует $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_i^{(k)} = \lambda_i$, $i = 1, 2$. Множество точек $P(\lambda_1, \lambda_2)$, порожденных всевозможными последовательностями t_k, назовем спектром Персидского. Последовательность t_k назовем аппроксимирующей, если $(\lambda_1, \lambda_2) = (\alpha, \beta)$.

В [83] получены следующие результаты.

1. Для правильной системы (3.7), где $s = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ A(\tau)\,d\tau$, справедливы утверждения:

а) спектр $P(\lambda_1, \lambda_2)$ содержится в замкнутом отрезке плоскости (λ_1, λ_2), соединяющем точки (α, β) и $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$;

б) верна оценка $\max(|\alpha - \lambda_1|, |\beta - \lambda_2|) \leq \sqrt{2}\left(\beta - \frac{s}{2}\right)$.

2. В случае $A(t+\omega) = A(t)$ показано, что:

а) (α, β) принадлежит спектру $P(\lambda_1, \lambda_2)$;

б) спектр $P(\lambda_1, \lambda_2)$ может быть либо точкой, либо замкнутым отрезком, упомянутым в п. 1а). Даны необходимые и достаточные условия последней ситуации.

3. Для неправильной системы (3.7) справедливо утверждение: аппроксимирующими могут быть только те последовательности, по которым достигается $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \int_0^t \mathrm{Sp}\ A(\tau)\, d\tau$.

В учебном пособии Л. Я. Адриановой [86] рассматриваются структура и поведение решений автономных, периодических и правильных систем, приводимость и почти приводимость, устойчивость решений и оценки их роста через коэффициенты системы, влияние малого возмущения коэффициентов на свойства решений, центральные показатели и интегральная разделенность. Впервые в учебной литературе полностью приводится доказательство необходимых и достаточных условий устойчивости характеристических показателей Ляпунова для двумерной диагональной системы. Английский вариант книги издан в 1995 г. Американским математическим обществом [87].

Литература

1. *Андреев А. Ф.* Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Вестн. Ленингр. ун-та. 1955. № 8. С. 3–25.

2. *Андреев А. Ф.* Теорема единственности для нормальной области Фроммера 2-го типа // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 4. С. 754–757.

3. *Андреев А. Ф.* Усиление теоремы единственности O-кривой в N_2 // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146. № 1. С. 9–10.

4. *Андреев А. Ф.* О проблемах различения Фроммера // Труды 4-го Всесоюз. мат. съезда. Т. 2. Л. 1964. С. 394–402.

5. *Андреев А. Ф.* К проблеме различения для N_2 в R^n // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 5. С. 791–796.

6. *Андреев А. Ф.* Об исключительном направлении системы n-го

порядка в точке покоя // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 187–194.

7. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1979. 135 с.

8. *Андреев А. Ф.* Обоснование метода Фроммера для систем класса C^∞ // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 4. С. 565–572.

9. *Андреев А. Ф.* О предельном поведении O-кривых квазиоднородной R^3-системы // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 9. С. 1475–1480.

10. *Андреев А. Ф.* О проблемах различения для исключительных направлений R^2-системы в особой точке // Нелинейные динамические системы. Вып. 1. СПб. 1997. С. 13–31.

11. *Андреев А. Ф., Глейзер Г. И.* Представления TO-решений уравнения $X(x,y)dy = Y(x,y)dx$ // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 10. С. 1723–1737.

12. *Андреев А. Ф., Заварзина И. А.* Поведение траекторий однородной системы в окрестности инвариантного конуса // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 7. С. 1168–1172.

13. *Андреев А. Ф., Кузнецов В. А.* Теорема единственности O-кривой в N_2-условиях типа условия Осгуда // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 11. С. 2080–2082.

14. *Андреев А. Ф., Пехенько И. В.* О системе с одним нулевым корнем характеристического уравнения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 944–946.

15. *Андреев А. Ф., Ходы-Заде П. Д.* Исследование проблемы центра и фокуса в одном случае // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 187–197.

16. *Бодунов Н. А.* Признаки единственности для нормальных областей второго типа в $\mathbb{R}^3$ // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 5. С. 778–787.

17. *Бодунов Н. А.* Признаки единственности O-кривой N_2 в $\mathbb{R}^3$ // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 8. С. 1366–1374.

18. *Бодунов Н. А.* О многообразии O-кривых многомерных систем // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 914–917.

19. *Бодунов Н. А.* О локально инвариантных множествах трехмерных автономных систем // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1331–

1334.

20. *Бортковская М. Р.* О нормальной форме трехмерной системы с тройным нулевым характеристическим корнем в особой точке $(0,0,0)$ // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1995. Вып. 2 (№ 8). С. 14–17.

21. *Бортковская М. Р.* Об одном нормализующем преобразовании // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1995. Вып. 3 (№ 15). С. 18–20.

22. *Бортковская М. Р.* Асимптотика O-кривых для одного класса систем дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ / С.-Петерб. ун-т. 1996. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 15. 01. 96. № 140–В96.

23. *Бортковская М. Р.* К вопросу о разрешении сложной особенности R^3-системы // Нелинейные динамические системы. Вып. 1. СПб. 1997. С. 40–46.

24. *Воробьев А. П.* Поведение интегральных кривых в окрестности бесконечно удаленной точки // Весцi АН БССР. Сер. физ.-техн. навук. 1961. № 2. С. 20–30.

25. *Григорьев М. П.* Применение ЭВМ в проблеме различения центра и фокуса // Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных уравнений. Вып. 1. Иркутск. 1975. С. 21–25.

26. *Григорьев М. П.* Решение проблемы центра в одном случае // Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных уравнений. Вып. 2. Якутск. 1977. С. 11–13.

27. *Григорьев М. П.* Качественное исследование интегральных кривых в целом одной системы // Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных уравнений. Вып. 2. Якутск. 1977. С. 14–20.

28. *Грудо Э. И.* Обоснование одного метода исследования сложной особой точки автономной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1972. № 1. С. 23–31.

29. *Ильяшенко Ю. С.* Мемуар Дюлака “О предельных циклах”и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. Вып. 6 (№ 246). С. 41–78.

30. *Капитанов А. Я.* Качественное исследование одной системы в пространстве $\mathbb{R}^3$ // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 229–233.

31. *Капитанов А. Я.* Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в одном критическом случае // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 2. С. 330–331.

32. *Карданова Е. Ю.* Квадратичная система с вырожденной особой точкой // Вестн. Ленингр. ун-та. 1985. Вып. 3 (№ 15). С. 124–125.

33. *Карданова Е. Ю.* О поведении траекторий одной квадратичной системы в круге Пуанкаре / Ленингр. ун-т. 1988. 14 с. Деп. в ВИНИТИ 22. 02. 88. № 1395–В88.

34. *Карданова Е. Ю.* О предельных и особых циклах одного класса квадратичных систем / Ленингр. ун-т. 1989. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 09. 08. 89. № 5394–В89.

35. *Кох Е. О.* Поведение траекторий трехмерной однородной системы в окрестности особого инвариантного конуса // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1996. Вып. 3 (№ 15). С. 117–119.

36. *Кох Е. О.* Поведение траекторий трехмерной однородной системы в окрестности особого инвариантного конуса с четырьмя инвариантными лучами / Ленингр. ун-т. 1996. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 05. 03. 96. № 695–В96.

37. *Лебедева Л. Н.* Качественное исследование A_2-системы частного вида // Вестн. Ленингр. ун-та. 1984. Вып. 4 (№ 19). С. 81–82.

38. *Лебедева Л. Н.* О глобальном поведении одного класса A_2-систем / Ленингр. ун-т. 1985. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 05. 02. 85. № 995–В85.

39. *Лебедева Л. Н.* О локальном поведении A_2-системы в одном особом случае / Ленингр. ун-т. 1985. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 23. 09. 85. № 6846–В85.

40. *Ноздрачева В. П.* Функция соответствия в окрестности грубого седла // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 2. С. 252–261.

41. *Ноздрачева В. П.* Функция последования в окрестности особого цикла // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 3. С. 405–407.

42. *Ноздрачева В. П.* Поведение траекторий трехмерной однородной системы в окрестности особого инвариантного конуса // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 4. С. 619–628.

43. *Осипенко Г. С.* Об устранении особенности дифференциального уравнения в одном случае // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 6. С. 1146–1148.

44. *Осипенко Г. С.* О проблемах Фроммера // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 6. С. 1015–1024.

45. *Осипенко Г. С.* О гомотопическом инварианте // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 6. С. 1139–1140.

46. *Осипенко Г. С.* О топологической эквивалентности дифференциаль-

ных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 8. С. 1366–1374.

47. *Пилюгина В. Б.* Поведение траекторий на центральном многообразии системы с одним нулевым корнем // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1907–1908.

48. *Пилюгина В. Б.* Исследование системы с тройным нулевым характеристическим корнем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1520–1522.

49. *Пилюгина В. Б.* О системе с тройным нулевым корнем характеристического уравнения // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 12. С. 2148–2155.

50. *Скитович А. В.* Условия возникновения проблемы центра и фокуса // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 6. С. 1061–1069.

51. *Скитович А. В.* Проблема центра в случае сложной точки покоя, разложимой на простые седла // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 10. С. 1814–1823.

52. *Скитович А. В.* Проблема центра и фокуса в случае сложной точки покоя: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.: Ленингр. гос. ун-т, 1979. 10 с.

53. *Скитович А. В.* Сходимость рядов Дюлака // Нелинейные динамические системы. Вып. 1. СПб. 1997. С. 220–226.

54. *Степанова Т. В.* О числе операций при исследовании особой точки дифференциального уравнения с дробно-квазианалитической правой частью методом Фроммера // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 12. С. 2208–2214.

55. *Степанова Т. В.* О числе операций при исследовании особой точки обобщенного уравнения Брио и Буке в квазианалитическом случае // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 6. С. 1120–1127.

56. *Степанова Т. В.* Об оценке снизу порядков расщепления в квазианалитическом случае // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 930–933.

57. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

58. *Андронов А. А. и др.* Качественная теория динамических систем. М.: Наука, 1966. 568 с.

59. *Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П.* Нелинейные ко-

лебания в системах второго порядка. Минск: Белорусск. гос. ун-т, 1982. 205 с.

60. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.;Л.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.

61. *Хаимов Н. Б.* Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены // Уч. зап. физ.-мат. ф-та Сталинабад. гос. пед. ин-та. 1952. Т. 2. № 3. С. 27–34.

62. *Coleman C.* A certain class of integral curves in 3-space // Ann. Math. 1959. Vol. 69. № 3.

63. *Дюлак Г.* О предельных циклах. М.: Наука. 1980. 160 с.

64. *Gomory R. C.* Trajectories tending to a critical point in 3-space // Ann. Math. 1955. Vol. 61. № 1. P. 140–153.

65. *Бибиков Ю. Н.* О существовании инвариантных торов в окрестности состояния равновесия // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 1. С. 9–12.

66. *Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости периодических движений в трансцендентных критических случаях // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 11. С. 1927–1945.

67. *Бибиков Ю. Н.* О существовании условно периодических решений систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 8. С. 1347–1356.

68. *Бибиков Ю. Н.* Усиление одной теоремы Мозера // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 4. С. 766–769.

69. *Бибиков Ю. Н.* Применение теоремы Мозера к исследованию дифференциальных уравнений нелинейных колебаний // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 1241–1244.

70. *Bibikov Yu. N.* Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations // Lecture Notes in Math. 1979. Vol. 702. 156 p.

71. *Бибиков Ю. Н.* Бифуркация типа Хопфа для квазипериодических движений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 9. С. 1539–1544.

72. *Бибиков Ю. Н.* Построение инвариантных торов систем дифференциальных уравнений с малым параметром // Труды Ленингр. мат. об-ва. 1991. Т. 1. С. 26–53.

73. *Бибиков Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1991. 144 с.

74. *Бибиков Ю. Н.* О существовании квазипериодических движений

квазилинейных систем // Прикл. мат. и мех. 1995. Т. 59. № 1. С. 21–29.

75. *Бибиков Ю. Н.* Сохранение и бифуркация инвариантного тора векторного поля // Мат. заметки. 1997. Т. 61. № 1. С. 34–54.

76. *Бибиков Ю. Н.* Бифуркация рождения инвариантных торов с бесконечно малой частотой // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 2. С. 81–92.

77. *Бибиков Ю. Н.* Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой и бесконечно малой частотой колебаний // Мат. заметки. 1999. Т. 65. № 3. С. 323–335.

78. *Бибиков Ю. Н., Плисс В. А.* О существовании инвариантных торов в окрестности нулевого решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 11. С. 1864–1881.

79. *Басов В. В., Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости положения равновесия в одном случае периодического возмущения центра // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 1539–1544.

80. *Littlewood J. E.* Some problems in real and complex analysis. Lexington, MA; Heath., 1968. 58 p.

81. *Адрианова Л. Я.* О равномерной устойчивости характеристических показателей последовательности правильных систем // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 10. С. 1739–1745.

82. *Адрианова Л. Я.* О некоторых свойствах правильных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1977. № 19. С. 5–8.

83. *Адрианова Л. Я.* О структуре спектра Персидского линейной системы второго порядка // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 12. С. 2027–2031.

84. *Адрианова Л. Я.* Некоторые коэффициентные характеристики линейной системы второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. Вып. 1 (№ 1). С. 97–100.

85. *Адрианова Л. Я.* Коэффициентный критерий правильности линейной системы второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. Вып. 3 (№ 15). С. 91–92.

86. *Адрианова Л. Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 1992. 240 с.

87. *Adrianova L. Ya.* Introduction to linear systems of differential equations. N.Y.: Amer. Math. Soc. 1995. 204 p.