ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2003
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГЛОБАЛЬНОЙ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КАФЕДРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

С.Ю.Пилюгин

Кафедра дифференциальных уравнений
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет
198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д.2
e-mail: sp@spil.usr.pu.ru

1. Структурно устойчивые (грубые) системы

В теории структурной устойчивости изучаются два основных класса динамических систем.

Первый класс — потоки, порождаемые автономными системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x). \tag{1}$$

[0]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 96–01–00421, 96–01–00404, 99–01–00683, 99–01–00753), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96–15–96209). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы “Интеграция”(проект № 2. 1–326. 53).

Системы вида (1) рассматриваются либо на гладком замкнутом многообразии $\mathcal{M}$, либо в ограниченной области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. В последнем случае обычно предполагается, что все траектории входят в область G через ее границу при возрастании времени.

Второй класс — дискретные динамические системы, порождаемые диффеоморфизмами $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (или $T : G \to G$). В теории дифференциальных уравнений вопрос о структурной устойчивости диффеоморфизмов возникает чаще всего при рассмотрении диффеоморфизмов Пуанкаре T, соответствующих периодическим по времени системам дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{2}$$

где $x \in \mathcal{M}$ или $x \in G \subset \mathbb{R}^n$.

Основной проблемой глобальной качественной теории дифференциальных уравнений и динамических систем является задача описания структуры множества их траекторий. В теории структурной устойчивости эквивалентными считаются системы, у которых такие структуры неразличимы с топологической точки зрения.

Говорят, что система (1) и система

$$\dot{x} = \widetilde{F}(x) \tag{3}$$

топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм фазового пространства, отображающий траектории системы (1) на траектории системы (3) с сохранением направления движения.

В случае периодических систем основным отношением эквивалентности является топологическая сопряженность. Диффеоморфизмы Пуанкаре T системы (2) и $\widetilde{T}$ системы

$$\dot{x} = \widetilde{F}(t, x) \tag{4}$$

называются топологически сопряженными, если существует такой гомеоморфизм h фазового пространства, что

$$h \circ T = \widetilde{T} \circ h$$

(легко понять, что в этом случае h отображает траектории диффеоморфизма T на траектории диффеоморфизма $\widetilde{T}$).

Система (1) называется структурно устойчивой (или грубой в терминологии Андронова–Понтрягина), если любая C^1-близкая к ней система

(3) топологически эквивалентна системе (1). Иногда в определение структурной устойчивости включается требование, чтобы гомеоморфизм, осуществляющий топологическую эквивалентность, был C^0-близок к тождественному.

Определение структурной устойчивости периодических по t систем (2) и их диффеоморфизмов Пуанкаре формулируется аналогично.

Основные определения и результаты теории структурной устойчивости до 1988 г. изложены в [26] (отметим, что это первая отечественная книга по структурной устойчивости).

1.1. Условия структурной устойчивости

Одной из важнейших проблем глобальной качественной теории, начиная с 60-х годов, являлась проблема нахождения необходимых и достаточных условий структурной устойчивости.

Для плоских автономных систем решение этой проблемы оказалось относительно несложным (оно было дано А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [7] в 1937 г. одновременно с введением ими понятия грубости). Этот факт связан с тем, что, как легко показать, неблуждающее множество структурно устойчивой плоской автономной системы состоит из конечного множества точек покоя и замкнутых траекторий.

В то же время из работ М. Картрайт и Дж. Литтлвуда [68, 69] 40-х годов следовало, что уже периодические системы вида (2) с двумерным вектором x могут обладать сложными (в частности, содержащими бесконечно много периодических точек преобразования Пуанкаре T) инвариантными множествами, структура которых сохраняется при малых изменениях системы.

Во второй половине 60-х годов С. Смейл [88] сформулировал гипотезу о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости. Достаточность условий Смейла была доказана сравнительно быстро (это сделали Дж. Роббин [84] и К. Робинсон [86] для диффеоморфизмов и К. Робинсон [85] — в случае автономных систем).

Первым существенным продвижением в обосновании необходимых условий структурной устойчивости стала работа В. А. Плисса [39], в которой была доказана гипотеза Смейла о конечности множества устойчивых периодических решений в структурно устойчивой системе вида (2). Следует отметить, что подход, развитый в [39], использовался практически во всех последующих исследованиях по условиям структурной устойчивости.

Отметим тесно связанную с [39] работу В. А. Плисса [42], в которой построен пример системы дифференциальных уравнений, имеющей счетное множество устойчивых периодических решений, располагающихся в ограниченном по переменной x множестве и обладающих равномерно отделенными от нуля характеристическими показателями (конечно, как следует из [39], такая система не может быть структурно устойчивой).

Главный результат В. А. Плисса в этом направлении — доказательство необходимости основного условия Смейла (гиперболичность неблуждающего множества Ω диффеоморфизма Пуанкаре T) для двумерных периодических систем (2) при условии

$$\operatorname{mes}\Omega = 0.$$

Для получения этого результата [40] В. А. Плиссом был разработан метод грубых последовательностей линейных периодических систем дифференциальных уравнений [35, 36, 38], а также доказан вариант леммы о замыкании [37]. Эти работы легли в основу монографии В. А. Плисса [43].

Обоснование В. А. Плиссом необходимости гиперболичности множества Ω для структурной устойчивости существенно повлияло на доказательство гипотезы Смейла. Вслед за работами В. А. Плисса появились работы других авторов, в которых независимо была доказана необходимость гиперболичности для структурной устойчивости в случае произвольного двумерного диффеоморфизма. Отметим, что одним из них был А. А. Кадыров — аспирант В. А. Плисса. Окончательно гипотеза Смейла была обоснована Р. Мане [75] в 1988 г. для случая диффеоморфизмов и Ш. Хаяси [72]–Л. Веном [90] в 1996 г. для случая автономных систем дифференциальных уравнений.

Развитые В. А. Плиссом методы [44, 45] позволили построить теорию структурной устойчивости для систем дифференциальных уравнений с произвольной зависимостью от времени.

Рассмотрим две неавтономные системы вида (2) и (4) и предположим, что фазовая переменная x изменяется в ограниченной области G пространства $\mathbb{R}^n$. Будем измерять C^1-расстояние между системами (2) и (4) величиной

$$\rho_1(F, \widetilde{F}) = \sup_{t\in\mathbb{R},\, x\in G} \left\{ |F(t,x) - \widetilde{F}(t,x)| + \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(t,x) \right\| \right\}.$$

В. А. Плиссом были установлены необходимые и достаточные условия [46] для того, чтобы система (2) с произвольной зависимостью от времени обладала следующим свойством: по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если для системы (4) выполнено неравенство

$$\rho_1(F, \widetilde{F}) < \delta,$$

то:

— для любого решения $x(t)$ системы (2) существует решение $\tilde{x}(t)$ системы (4) такое, что

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}\,; \tag{5}$$

— для любого решения $\tilde{x}(t)$ системы (4) найдется решение $x(t)$ системы (2), для которого выполняется неравенство (5).

В. А. Плисс показал [47], что если система (2) периодична по t, то найденные в [46] условия равносильны условиям Смейла.

В монографии [43] В. А. Плисс ввел и изучил свойство π-устойчивости. Сформулируем его для случая периодической по t системы (2).

Будем говорить, что точка p принадлежит множеству, порождающему периодические решения системы (2) (множеству π), если по любой окрестности $\mathcal{U}$ точки p и по любому числу $\varepsilon > 0$ можно указать систему (4) и точку $r \in \mathcal{U}$ такие, что выполняется неравенство

$$\rho_1(F, \widetilde{F}) < \varepsilon,$$

а через точку r проходит периодическая траектория диффеоморфизма Пуанкаре $\widetilde{T}$ системы (4). В [43] показано, что если множества периодических точек всех диффеоморфизмов Пуанкаре $\widetilde{T}$ систем (4), близких к системе (2), равномерно ограничены, а множество π гиперболично относительно диффеоморфизма Пуанкаре T системы (2), то система (2) обладает свойством π-устойчивости (аналогом свойства структурной устойчивости для множества π).

Кроме того, В. А. Плиссом была проанализирована внутренняя структура условий Смейла. Первое из условий Смейла — "аксиома A— состоит из двух требований (сформулируем их для диффеоморфизма Пуанкаре T системы (2)): неблуждающее множество Ω должно быть гиперболично, а периодические точки T должны быть плотны в Ω. В. А. Плисс показал [41], что если выполнено второе условие Смейла (строгое условие трансверсальности, состоящее в том, что устойчивые и неустойчивые многообразия неблуждающих точек T пересекаются трансверсально), то условие плотности периодических точек в Ω вытекает из гиперболичности Ω.

Отметим еще один результат В. А. Плисса, связанный с общей теорией структурно устойчивых систем.

Пусть T — диффеоморфизм Пуанкаре структурно устойчивой системы (2). Обозначим через $W^s(p)$ и $W^u(p)$ устойчивое и неустойчивое многообразия точки $p \in \Omega$. В [48] показано, что существует константа $a > 0$, обладающая следующим свойством: по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если для двух точек $p, q \in \Omega$ найдутся точки $x \in W^u(p)$, $y \in W^s(q)$ с $|x - y| < \delta$, то $W^u(p)$ и $W^s(q)$ содержат диски Δ^u, Δ^s размера a, пересекающиеся в точке z, для которой выполнены неравенства $|x - y| < \varepsilon, \quad |y - z| < \varepsilon$, и при этом угол между касательными пространствами к дискам Δ^u, Δ^s в точке z не меньше a.

1. 2. Конкретные системы с гиперболическим поведением

Известно весьма немного конкретных систем дифференциальных уравнений, обладающих свойством структурной устойчивости или его аналогами, например, свойством Ω-устойчивости, т. е. свойством структурной устойчивости на неблуждающем множестве Ω, и отличных от плоских автономных систем типа Андронова–Понтрягина.

К концу 60-х годов множество таких систем по существу исчерпывалось геодезическими потоками на многообразиях отрицательной кривизны, изученными Д. В. Аносовым [8], или системами с инвариантным множеством типа подковы Смейла (С. Смейл [88], В. М. Алексеев [1]).

Как уже отмечалось в п. 1. 1, системы со сложным инвариантным множеством, сохраняющимся при малых возмущениях, были изучены М. Картрайт и Дж. Литтлвудом [68, 69], однако их работы вследствие чрезвычайной сложности техники не получили широкой известности.

Н. Левинсон [74] изучил "модельное"уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + \varepsilon x = b\sin t, \tag{6}$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } |x| < 1, \\ 1 & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

ε — положительный параметр, а число b лежит в интервале $(0, 1)$. Поведение решений этого уравнения во многом аналогично поведению решений уравнения Картрайт–Литтлвуда, а соответствующие доказательства более наглядны.

Ω-устойчивость уравнения Левинсона (6) была исследована А. В. Осиповым [14–16]. В частности, были в явном виде указаны системы $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ подынтервалов промежутка $(0.1, 0.9)$ такие, что:

— при всех $b \in \mathcal{J}_1$ уравнение (6) имеет конечное число периодических решений, а соответствующий диффеоморфизм Пуанкаре структурно устойчив;

— при $b \in \mathcal{J}_2$ уравнение (6) имеет бесконечное множество периодических решений, а соответствующий диффеоморфизм Пуанкаре Ω-устойчив.

В. А. Плисс изучал [50–52] системы дифференциальных уравнений вида

$$\mu \frac{dx}{dt} = F(x) + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

где μ — малый параметр, а функция $f(t)$ периодична с периодом ω, т. е.

$$f(t) = \overline{f}(t - m\,\omega) \text{ при } m\,\omega \le t \le (m+1)\,\omega.$$

Частный случай систем вида (7) был исследован А. В. Осиповым и В. А. Плиссом [18] при изучении одного уравнения, моделирующего радиотехнические конструкции.

В. А. Плисс показал, что при выполнении определенных условий, налагаемых на семейство автономных систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{d\theta} = F(x) + \overline{f}(\tau)$$

с параметром $\tau \in [0, \omega]$, можно доказать, что неблуждающее множество системы (7) гиперболично [50, 51] и выполняется строгое условие трансверсальности [52], т. е. система (7) структурно устойчива.

1. 3. Глобальная динамика структурно устойчивых систем

1.3.1. Инвариантные множества двумерных диссипативных диффеоморфизмов. Предположим, что все решения двумерной периодической по t системы вида (2) входят с возрастанием времени в некоторую ограниченную область плоскости $\mathbb{R}^2$ и остаются в ней (системы с таким свойством называются диссипативными). В этом случае диффеоморфизм Пуанкаре T системы (2) обладает максимальным ограниченным инвариантным множеством I (его называют характеристическим множеством, или глобальным аттрактором диффеоморфизма T), при этом для любого $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено соотношение

$$\operatorname{dist}(T^k(x), I) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Предположим, что множество I содержит отталкивающую неподвижную точку O диффеоморфизма T (таким свойством обладает, например, уравнение Левинсона (6)). Пусть

$$H = \{\, x : \operatorname{dist}(T^k(x), O) \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \,\}, \quad \mathcal{J}_1 = I \setminus H,$$

а $\mathcal{J}$ — множество точек, в любой окрестности которых содержатся как точки множества $\mathbb{R} \setminus I$, так и точки множества H.

Множество $\mathcal{J}$ может иметь, вообще говоря, весьма сложную топологическую структуру. В. А. Плисс изучил в работах [32, 33] структуру множеств $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}$ при условии, что диффеоморфизм T является диффеоморфизмом Морса–Смейла (т. е. он структурно устойчив и имеет лишь конечное число периодических точек). Из результатов В. А. Плисса следует, что множества $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}$ состоят из конечного числа неустойчивых многообразий периодических точек, множество $\mathcal{J}$ не может быть представлено в виде конечного числа элементарных континуумов (следовательно, оно не содержит в себе неразложимого континуума), а внутреннее и внешнее числа вращения по Биркгофу на $\mathcal{J}$ совпадают и рациональны.

Инвариантные множества структурно устойчивого плоского диффеоморфизма T, обладающего свойством сжатия площадей, были исследованы В. А. Плиссом и В. Е. Чернышевым [55–57]. Ими были получены проверяемые условия, при которых T имеет счетное множество периодических точек.

Вопрос о сложности структуры компактного инвариантного множества диффеоморфизма Пуанкаре T двумерной периодической системы вида (2) был решен В. А. Плиссом в монографии [43].

Предположим, что как сама система (2), так и все близкие к ней в смысле метрики ρ_1, введенной в п. 1. 1, системы не имеют периодических решений с нулевыми характеристическими показателями (легко понять, что структурно устойчивая система обладает сформулированным свойством). Если $\mathcal{J}$ — компактное инвариантное асимптотически устойчивое множество T, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{mes} \mathcal{J} = 0,$$

то $\mathcal{J}$ содержит в себе неразложимый континуум тогда и только тогда, когда множество периодических точек, лежащих в $\mathcal{J}$, бесконечно.

1.3.2. Фазовые диаграммы. Одной из важных характеристик системы Морса–Смейла является ее фазовая диаграмма, т.е. конечный ориентированный граф, вершины которого соответствуют траекториям неблуждающего множества Ω, каждой вершине $p \in \Omega$ приписаны величины $\dim W^u(p)$, $\dim W^s(p)$, а также число, характеризующее ориентируемость $\dim W^u(p)$, в том случае когда p — замкнутая траектория, а наличие ребра $p \to q$ для различных траекторий p и q из Ω означает, что

$$W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset.$$

С. Ю. Пилюгин ввел понятие циклов в фазовых диаграммах и изучил в [20, 23] циклическую структуру фазовых диаграмм автономных систем дифференциальных уравнений типа Морса–Смейла в $\mathbb{R}^n$ и на гладком замкнутом многообразии $\mathcal{M}$. В качестве следствий этих результатов он получил новые условия существования замкнутых траекторий у многомерных структурно устойчивых диссипативных систем. Отметим, что первые условия такого рода сформулировал В. А. Плисс в работе [34].

Кроме того, С. Ю. Пилюгиным был изучен вопрос о том, при каких условиях фазовая диаграмма определяет систему с точностью до топологической эквивалентности.

Пусть $G(\mathcal{M})$ — класс структурно устойчивых автономных систем дифференциальных уравнений на многообразии $\mathcal{M}$, не имеющих замкнутых траекторий.

В [22] показано, что система (1) класса $G(\mathbb{S}^n)$, $n \geq 3$ (здесь $\mathbb{S}^n$ — n-мерная сфера), определяется своей фазовой диаграммой с точностью до топологической эквивалентности тогда и только тогда, когда фазовая диаграмма не содержит ребер $p \to q$ таких, что

$$\dim W^u(p) < n, \quad \dim W^u(q) > 0. \tag{8}$$

Отметим, что при $n = 2$ аналогичное утверждение неверно. В той же работе получены необходимые и достаточные условия на абстрактный граф Γ, не содержащий ребер $p \to q$ с условиями (8), при которых Γ реализуем как фазовая диаграмма системы (1) класса $G(\mathbb{S}^n)$.

Кроме того, показано [21], что существуют многообразия $\mathcal{M}$, на которых никакая система (1) класса $G(\mathcal{M})$ не определяется своей фазовой диаграммой с точностью до топологической эквивалентности (например, таким свойством обладает трехмерное вещественное проективное пространство $P_3\mathbb{R}$).

2. Бифуркации

2.1. Особые периодические решения

В 1959 г. В. А. Плисс исследовал вопрос о числе ω-периодических решений скалярного уравнения вида

$$\dot{x} = x^m + p_1(t)x^{m-1} + \ldots + p_m(t) \tag{9}$$

с ω-периодическими коэффициентами $p_1(t), \ldots, p_m(t)$. Он показал, что изменение числа ω-периодических решений уравнения (9) при изменении его коэффициентов связано с появлением так называемых особых периодических решений, т. е. ω-периодических функций $h(t)$ с конечным числом разрывов на периоде и таких, что сужение $h(t)$ на каждый промежуток непрерывности является максимально продолженным решением уравнения (9), стремящимся к бесконечности определенным образом при стремлении t к концам промежутка.

Ю. В. Чурин развил теорию особых периодических решений (о. п. р.) для систем дифференциальных уравнений, близких на бесконечности к однородным.

Рассматриваются системы вида

$$\dot{x} = P(x) + X(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

где вектор-функция $P(x)$ положительно однородная степени $m > 1$, а добавка $X(t,x)$ мала по сравнению с $|x|^m$ в окрестности бесконечности (ясно, что уравнение (9) является частным случаем системы (10) при $n = 1$ с $P(x) = x^m$).

При изучении "укороченной"системы

$$\dot{x} = P(x) \tag{11}$$

рассматривается система

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = P(\varphi) - \langle \varphi, P(\varphi) \rangle \varphi \tag{12}$$

на $(n-1)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{(n-1)}$ (здесь $\langle \cdot \rangle$ — скалярное произведение).

Если $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ — точка покоя системы (12), то ей сопоставляется число

$$\nu(\xi) = \langle\, \xi, P(\xi)\, \rangle,$$

если ξ — замкнутая траектория системы (12), соответствующая T-периодическому решению $\eta(t)$, то ей сопоставляется число

$$\nu(\xi) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \langle\, \eta(t), P(\eta(t))\, \rangle\, dt.$$

Ю. В. Чурин полностью исследовал [63] поведение решений системы (10) в окрестности бесконечности пространства $\mathbb{R}^n$ при выполнении следующих условий:

а) система (12) является системой Морса–Смейла (напомним, что система Морса–Смейла — это структурно устойчивая система с конечным множеством неблуждающих траекторий);

б) для любой неблуждающей траектории ξ системы (12) выполнено неравенство

$$\nu(\xi) \neq 0$$

(это условие означает, что на инвариантных конусах системы (11), соответствующих точкам покоя или замкнутым траекториям системы (12), все траектории стремятся своими концами к началу координат или к бесконечности).

В [64] показано, что в этом случае каждой неблуждающей траектории ξ системы (12) соответствует положительно инвариантное (в случае $\nu(\xi) > 0$) или отрицательно инвариантное (в случае $\nu(\xi) < 0$) многообразие $\Gamma(\xi)$ системы (10), по которому решения уходят на бесконечность за конечное время.

Пусть

$$\mathcal{N}_\sigma = \{\, (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ |x| > \sigma\, \}.$$

Ю. В. Чурин доказал [64], что:

1) по любому $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma > 0$, что время пребывания любого решения системы (10) в множестве $\mathcal{N}_\sigma$ меньше ε;

2) существует такое $\sigma_0 > 0$, что если решение системы (10), начинающееся в области $\mathcal{N}_{\sigma_0}$, не покидает ее при возрастании t, то оно попадает

на одно из положительно инвариантных многообразий $\Gamma(\xi)$ (аналогичное утверждение верно для случая убывания времени и отрицательно инвариантного многообразия $\Gamma(\xi)$).

Основываясь на этих утверждениях, он определил особое периодическое решение ω-периодической по t системы (10) как ω-периодическую вектор-функцию с конечным числом разрывов на периоде, ограничения которой на промежутке непрерывности суть максимально продолженные решения системы (10), уходящие на бесконечность по многообразиям $\Gamma(\xi)$, при этом соответствующие неблуждающие траектории ξ системы (12) связаны в ее фазовой диаграмме специальным циклическим путем.

Рассмотрим пространство $\mathcal{X}$ ω-периодических по t систем вида (10) с фиксированными вектор-функцией $P(x)$ и характеристикой малости добавок $X(t,x)$ по отношению к $|x|^m$ и введем на этом пространстве метрику

$$\rho(X_1, X_2) = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \frac{|X_1(t,x) - X_2(t,x)|}{1+|x|^m}.$$

В этом случае система (10) естественно отождествляется с добавкой $X(t,x)$.

Основной результат Ю. В. Чурина, связанный с теорией о. п. р. [65], можно сформулировать следующим образом.

Предположим, что последовательность систем $X_n \in \mathcal{X}$ такова, что $X_n \to X_0 \in \mathcal{X}$, а каждая система X_n имеет ω-периодическое решение $\psi_n(t)$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n(t^*)| = \infty$$

при некотором t^*. Тогда из последовательности $\psi_n(t)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к о. п. р. системы X_0.

Для семейства систем $X_\mu \in \mathcal{X}$ с одномерным параметром $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$, имеющих ω-периодические решения $\psi_\mu(t)$ со свойством

$$\overline{\lim_{\mu\to\mu_0}} \sup_t |\psi_\mu(t)| = \infty,$$

Ю. В. Чурин определил резонансное множество $\mathcal{R}$ как множество точек (t,x) таких, что x является предельной точкой последовательности $\psi_\mu(t)$ при $\mu \to \mu_0$. Он показал [66], что резонансное множество $\mathcal{R}$ является объединением графиков периодических решений и о. п. р. системы X_{μ_0}, при этом $\mathcal{R}$ содержит хотя бы одно о. п. р.

Кроме того, Ю. В. Чурин доказал [67], что множество систем, обладающих о. п. р., замкнуто в $\mathcal{X}$.

2.2. Сингулярные гетероклинические контуры

В последние три десятилетия лавинообразно увеличивалось число публикаций, связанных с изучением сложных инвариантных множеств в простых нелинейных системах дифференциальных уравнений. В значительной степени эти работы были стимулированы интересом к структуре аттрактора Лоренца — инвариантного множества системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y, \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{x} &= -\frac{8}{3}z + xy. \end{aligned} \tag{13}$$

Известно [89], что рождение так называемого странного аттрактора в системе Лоренца (13) связано с наличием у этой системы инвариантного множества, состоящего из седловой точки покоя, двух седловых замкнутых траекторий и набора связывающих их гетероклинических траекторий.

В. Е. Чернышев изучил бифуркации рождения сложных инвариантных множеств, порожденных сингулярными гетероклиническими циклами (такие циклы иногда называют лоренцевыми).

Дадим следующее определение. Назовем сингулярным гетероклиническим контуром связное компактное инвариантное множество автономной системы дифференциальных уравнений, состоящее из конечного числа траекторий и их предельных множеств, являющихся гиперболическими точками покоя и замкнутыми траекториями (при этом хотя бы одно из этих предельных множеств должно быть точкой покоя). Будем говорить, что сингулярный гетероклинический контур является сингулярным гетероклиническим циклом, если его траектории можно пронумеровать в циклическом порядке так, что α-предельное множество последующей траектории совпадает с ω-предельным множеством предыдущей.

Критерием сложности динамики системы в окрестности сингулярного гетероклинического цикла является хаотическое поведение решений. Это означает, что любая окрестность цикла содержит инвариантное множество I со следующими свойствами:

1) в I лежит бесконечно много замкнутых траекторий, объединение которых плотно в I;

2) I содержит плотную траекторию;

3) I обладает чувствительной зависимостью решений от начальных данных, т. е. существует такое число $a > 0$, что в любой окрестности произвольной точки $x \in I$ найдется точка y, траектория которой отходит от траектории точки x на расстояние, превышающее a.

В. Е. Чернышевым получены различные достаточные условия, при которых сингулярные гетероклинические циклы порождают сложную динамику [58]. Он показал, что хаотическое поведение решений в этих случаях не исчезает при C^1-малых возмущениях системы [59].

Для обоснования сформулированных результатов был создан новый метод, позволивший строить так называемые инвариантные сильно устойчивые слоения над окрестностью гетероклинического цикла [60, 61].

Факторизуя поток по слоям сильно устойчивого слоения, В. Е. Чернышев построил символическую динамику для сужения потока на инвариантное множество и описал возможные бифуркации этого инвариантного множества [62]. Отметим одну из возможных бифуркаций, в которой происходит отщепление локально максимального хаотического инвариантного множества от гетероклинического цикла [62].

2. 3. Бифуркации систем, моделирующих реальные процессы

В работах А. В. Осипова изучены бифуркации различных динамических систем, описывающих реальные процессы в прикладных задачах.

А. В. Осипов совместно с М. Гилленбергом и Г. Сёдербакка (Швеция) исследовали динамику двумерных отображений, порождаемых возмущением одномерных турбулентных отображений [9]. В качестве характерного примера рассмотрим отображение плоскости вида

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-k)f(x) + kf(y) \\ k\beta x + (1-k\beta y)y \end{pmatrix},$$

где $k, \beta \in (0,1)$ — параметры, а график функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. Показано, что в отличие от бифуркаций в однопараметрических семействах хаотическое инвариантное множество отображения T теряет устойчивость в несколько этапов. В [9] описан феномен отставания бифуркаций потери устойчивости инвариантным множеством в двухпараметрическом семействе по сравнению с однопараметрическим.

Этот феномен назван G-эффектом. Получены геометрические условия возникновения G-эффекта.

Отметим исследования А.В.Осипова (совместно с Е.Поповой, М.Дж.Р. Фашамом и В. А. Рябченко) по проблеме бифуркаций перехода к хаотическому режиму в моделях циркуляции в океане [83].

Наиболее интересными с точки зрения математики являются бифуркации непосредственного перехода от точки покоя (в случае автономных систем) или от периодического решения (в случае систем с периодической зависимостью от времени) к хаотическому режиму, минуя "промежуточные состояния".

А. В. Осипов совместно с разными соавторами [17, 19, 71] изучал также бифуркации в динамических системах, моделирующих биологические системы типа "n хищников — одна жертва"и "один хищник — k жертв".

3. Аттракторы динамических систем

Особую роль при исследовании глобальной структуры траекторий систем дифференциальных уравнений и динамических систем играют их аттракторы (в другой терминологии — притягивающие или асимптотически устойчивые инвариантные множества). Одной из традиций кафедры дифференциальных уравнений, восходящей к работам Н. П. Еругина, является исследование структуры границы аттрактора. Интерес к структуре границы связан в основном с тем, что траектории, стремящиеся к аттрактору "извне", стремятся именно к его границе.

3.1. Аттракторы структурно устойчивых систем

Результаты, описанные в п. 1. 3. 1 и характеризующие структуру границы глобального аттрактора I двумерного диссипативного диффеоморфизма T, существенно использовали специфику двумерности фазового пространства.

В работах В. А. Плисса [33, 34], а затем в совместной работе С. Ю. Пилюгина и В. А. Плисса [31] была изучена структура границы аттрактора для структурно устойчивых систем с конечным множеством неблуждающих траекторий (систем Морса – Смейла). Сформулируем один из результатов, относящийся к аттрактору A диффеоморфизма Пуанкаре T структурно устойчивой системы (2) с конечным числом периодических решений.

Пусть $\mathcal{J}$ — граница аттрактора A. Тогда:

— множество $\mathcal{J}$ состоит из целых неустойчивых многообразий периодических точек диффеоморфизма T;

— существуют периодические точки $p_1, \ldots, p_m$ диффеоморфизма T такие, что

$$\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{i=1}^{m} W^u(p_i)},$$

многообразия $W^u(p_1), \ldots, W^u(p_m)$ не лежат в предельных множествах других неустойчивых многообразий, располагающихся в $\mathcal{J}$, и любая точка множества $\bigcup_{i=1}^{m} W^u(p_i)$ достижима из множества $\mathbb{R} \setminus A$.

Позже С. Ю. Пилюгин [24] описал структуру границы аттрактора для класса систем, содержащего структурно устойчивые системы.

Пусть T — диффеоморфизм Пуанкаре периодической по t системы (2) и пусть $\mathcal{J}$ — граница аттрактора A диффеоморфизма T в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что на $\mathcal{J}$ выполнено аналитическое строгое условие трансверсальности, если для любого $x \in \mathcal{J}$ и любого $v \in \mathbb{R}^n$ найдутся векторы v_1 и v_2 в $\mathbb{R}^n$ такие, что $v = v_1 + v_2$ и

$$|DT^k(x)v_1| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad |DT^k(x)v_2| \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

(здесь $DT(x)$ — производная T в точке x). Известно (см. [26]), что в случае гиперболичности неблуждающего множества Ω диффеоморфизма T аналитическое строгое условие трансверсальности равносильно стандартному строгому условию трансверсальности, введенному С. Смейлом (см. п. 1. 1).

В [24] показано, что если на $\mathcal{J}$ выполнено строгое условие трансверсальности, то:

— множество $\mathcal{J}$ является аттрактором;

— любая точка $x \in \mathcal{J}$ принадлежит неустойчивому многообразию точки $p \in \mathcal{J} \cap \Omega$;

— периодические точки T плотны в $\mathcal{J} \cap \Omega$.

3. 2. Слабо гиперболические аттракторы

Условие структурной устойчивости часто является трудно проверяемым и слишком ограничительным при изучении конкретных систем.

В. А. Плисс и Дж. Селл [81] дали определение слабо гиперболических аттракторов, обобщающее стандартное определение гиперболического множества и охватывающее, например, случай устойчивого нормально гиперболического инвариантного многообразия.

Пусть $\varphi(t,x)$ — поток, порождаемый системой дифференциальных уравнений (1) в $\mathbb{R}^n$, а $\Phi(t,x)$ — соответствующий вариационный поток, т. е.

$$\Phi(t,x) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}.$$

Компактное инвариантное множество K потока φ называется слабо гиперболическим аттрактором, если существуют константы r, $\lambda_1 > 0$, $a \geq 1$, $\lambda_2 \leq \lambda_1$ со следующими свойствами:

1) для $(t,x) \in \mathbb{R} \times K$ определены дополнительные линейные пространства $\mathcal{U}^n(t,x)$ и $\mathcal{U}^s(t,x)$ размерностей k и $n-k$, инвариантные относительно Φ и такие, что

$$|\Phi(t,x)\Phi^{-1}(\tau,x)v| \leq |v|e^{-\lambda_1(t-\tau)},\ v \in \mathcal{U}^s(t,x),\ t \geq \tau,$$

$$|\Phi(t,x)\Phi^{-1}(\tau,x)v| \leq |v|e^{-\lambda_2(t-\tau)},\ v \in \mathcal{U}^n(t,x),\ t \leq \tau;$$

2) для любой точки $x_0 \in K$ найдется локально инвариантный гладкий диск $D(x_0) \subset K$, радиус которого равен r, с центром в точке x_0 такой, что в каждой точке $x \in D(x_0)$ диск $D(x_0)$ касается пространства $\mathcal{U}^n(0,x)$.

В [81] показано, что если K — слабо гиперболический аттрактор системы (1) и отображение $x \mapsto \mathcal{U}^n(0,x)$ из K в грассманово многообразие k-мерных подпространств $\mathbb{R}^n$ липшицево, то для любой системы (3), C^1-близкой к системе (1), существует взаимно однозначное и непрерывное отображение

$$h:\ K \to \mathbb{R}^n,$$

близкое к тождественному и такое, что образ $h(K)$ является слабо гиперболическим аттрактором системы (3).

В. А. Плисс и Дж. Селл применили развитую ими теорию слабо гиперболических аттракторов к описанию динамики приближенных решений для уравнений Навье–Стокса в двумерных и тонких трехмерных областях [82].

4. Системы с инвариантной мерой

Рассмотрим метрический компакт $\mathcal{M}$, на котором задана мера μ (считаем для определенности, что $\mu(\mathcal{M}) = 1$).

Пусть $\varphi : \mathbb{R}\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — поток на $\mathcal{M}$. Говорят, что мера μ инвариантна относительно потока φ, если для любого измеримого подмножества $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ выполнены равенства

$$\mu(\varphi(t, \mathcal{M}_1)) = \mu(\mathcal{M}_1) \ \text{ для всех } \ t \in \mathbb{R}.$$

Инвариантная мера μ называется эргодической, если для любого измеримого инвариантного множества $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ либо $\mu(\mathcal{M}_1) = 0$, либо $\mu(\mathcal{M}_1) = 1$.

Гладким коциклом над потоком φ называется непрерывное отображение Φ из $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ в пространство квадратных $(n \times n)$-матриц, непрерывно дифференцируемое по первому аргументу и обладающее свойством

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \varphi(s, x))\Phi(s, x), \quad t, s \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{M}.$$

Из мультипликативной эргодической теоремы, доказанной независимо В. М. Миллионщиковым [11, 12] и В. И. Оселедцем [13], следует, что если поток φ обладает эргодической инвариантной мерой μ, то характеристические показатели любого коцикла принимают почти везде (относительно меры μ) одни и те же значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

В. А. Плисс доказал [49], что если выполнено условие

$$\lambda_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{14}$$

то любой гладкий коцикл является гиперболическим на множествах, меры которых сколь угодно близки к полной. Предположим, что

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k < 0, \quad \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n > 0$$

и положим

$$\lambda = \frac{1}{2} \min |\lambda_j|.$$

В [49] показано, что в этом случае по любому $\varepsilon > 0$ можно найти измеримое множество $\mathcal{M}_\varepsilon \subset \mathcal{M}$ и число $a > 0$ такие, что

$$\mu(\mathcal{M}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

и для любой точки $x \in \mathcal{M}_\varepsilon$ существуют k-мерное линейное подпространство $S(x)$ и $(n-k)$-мерное линейное подпространство $U(p)$ пространства $\mathbb{R}^n$ со следующим свойством:

$$|\Phi(t, x)v| \leq a|v|e^{-\lambda t} \ \text{ для } \ v \in S(x),\ t \geq 0,$$

$$|\Phi(t,x)v| \le a|v|e^{\lambda t} \quad \text{для} \quad v \in U(x),\ t \le 0.$$

В. А. Плисс и С. Ю. Пилюгин изучили поведение диффеоморфизма, имеющего эргодическую инвариантную меру и ненулевые показатели Ляпунова [53, 54], и доказали, что в этом случае фазовое пространство можно с любой точностью аппроксимировать конечным набором гиперболических периодических точек, связанных трансверсальным гомоклиническим контуром.

Пусть φ — диффеоморфизм гладкого компактного многообразия $\mathcal{M}$, обладающий эргодической инвариантной мерой (соответствующие определения аналогичны данным ранее для случая потока). Будем считать для определенности, что эргодической инвариантной является лебегова мера mes , соответствующая римановой метрике d на $\mathcal{M}$, при этом $\mathrm{mes}\, \mathcal{M} = 1$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и назовем ε-структурой конечный набор точек

$$\sum = \{\, \pi_i : \ i = 1, \ldots, N; \ \sigma_{i,j} : \ i, j = 1, \ldots, N \,\},$$

обладающий следующими свойствами:

1) π_i — гиперболические периодические точки диффеоморфизма φ;

2) множество $\{\, \pi_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ является ε-сетью в $\mathcal{M}$;

3) $\sigma_{i,j}$ — точка трансверсального пересечения устойчивого многообразия точки π_i и неустойчивого многообразия точки $\varphi^{T_j}(\pi_j)$ при некотором T_j.

Из определения следует, что траектории точек $\sigma_{i,j}$ образуют трансверсальные гомоклинические контуры диффеоморфизма φ, поэтому (см. [43]) существует замкнутое инвариантное множество I диффеоморфизма φ, содержащее точки π_i (и, следовательно, ε-плотное в $\mathcal{M}$), имеющее мощность континуума и обладающее плотной траекторией.

Легко понять, что если диффеоморфизм φ обладает ε-структурой Σ, то любой диффеоморфизм ψ, C^1-близкий к φ, обладает ε-структурой, близкой к Σ, поэтому ε-структуру естественно называть сохраняющейся. В то же время диффеоморфизм φ не обязательно должен быть структурно устойчивым, как показывает важный для приложений пример, в котором многообразие $\mathcal{M}$ имеет край, заполненный неподвижными точками диффеоморфизма φ.

В [53, 54] доказано, что если лебегова мера эргодична и инвариантна, а для показателей Ляпунова λ_j диффеоморфизма φ выполнено соотношение (14), то при любом $\varepsilon > 0$ диффеоморфизм φ обладает ε-структурой.

Этот результат применен к описанию сложных движений несжимаемой жидкости.

5. C^0-типичные свойства динамических систем

Одной из фундаментальных идей, лежащих в основе теории структурной устойчивости, является следующее соображение: C^1-малое возмущение динамической системы можно рассматривать в окрестности каждой индивидуальной траектории как возмущение, мало изменяющее систему первого приближения для этой траектории. Используя это соображение и технику, восходящую к трудам А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре, можно показать, что при выполнении некоторых условий (типа условия гиперболичности) на систему первого приближения локальная структура траекторий в выбранной окрестности сохраняется при малых C^1-возмущениях.

Ситуация становится принципиально иной при рассмотрении C^0-малых возмущений динамических систем, так как сколь угодно C^0-малое возмущение может полностью изменить локальную структуру траекторий в окрестности выбранной траектории невозмущенной системы. Тем не менее соображения, основанные на понятии типичных свойств, позволили строить глобальную теорию C^0-малых возмущений динамических систем [30].

Пусть $Z(\mathcal{M})$ — пространство дискретных динамических систем на гладком замкнутом многообразии $\mathcal{M}$ с метрикой

$$\rho_0(\varphi, \psi) = \max_{x \in \mathcal{M}} (d(\varphi(x), \psi(x)), d(\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(x)))$$

(здесь d — метрика многообразия $\mathcal{M}$). Будем говорить, что типичная система в $Z(\mathcal{M})$ обладает некоторым свойством, если этим свойством обладают все системы из множества Z' II категории по Бэру в $Z(\mathcal{M})$ (как обычно, это означает, что Z' содержит пересечение счетного семейства открытых и плотных подмножеств $Z(\mathcal{M})$).

С. Ю. Пилюгин показал, что типичные системы в $Z(\mathcal{M})$ обладают следующими свойствами, связанными со структурой их аттракторов:

— аттракторы непрерывно зависят от C^0-малых возмущений системы по отношению к различным метрикам на пространстве компактных подмножеств $\mathcal{M}$ [25];

— граница каждого аттрактора устойчива по Ляпунову [25];

— любое устойчивое по Ляпунову компактное инвариантное множество является квазиаттрактором, т. е. пересечением счетного множества аттракторов [28].

Весьма важным для классической теории устойчивости по Ляпунову и ее обобщений (например, для теории устойчивости по отношению к постоянно действующим возмущениям) является изучение так называемых пролонгаций.

Обозначим через $\mathcal{N}_\delta(x)$ и $\mathcal{N}_\delta(\varphi)$ δ-окрестности точки x на многообразии $\mathcal{M}$ и системы φ в пространстве $Z(\mathcal{M})$. Фиксируем $x \in \mathcal{M}$, $\varphi \in Z(\mathcal{M})$ и определим множества

$$Q(x,\varphi) = \bigcap_{\delta>0} \overline{\bigcap_{y\in\mathcal{N}_\delta(x)} \{\varphi^k(y) : \, k \geq 0\}}$$

(пролонгацию точки x в системе φ по начальным данным),

$$P(x,\varphi) = \bigcap_{\delta>0} \overline{\bigcap_{\psi\in\mathcal{N}_\delta(\varphi)} \{\psi^k(x) : \, k \geq 0\}}$$

(пролонгацию точки x в φ по системе) и множество $R(x,\varphi)$, состоящее из точек $y \in \mathcal{M}$, обладающих следующим свойством: по любому $\delta > 0$ найдутся точки $x_0 = x, x_1, \ldots, x_m = y$ такие, что

$$d(\varphi(x_k), x_{k+1}) < \delta, \quad k = 0, \ldots, m-1 \tag{15}$$

(множество $R(x,\varphi)$ называется цепной пролонгацией точки x в системе φ [26]. Отметим, что множество точек $x_0, \ldots, x_m$, удовлетворяющее неравенствам (15), является конечным аналогом δ-псевдотраектории (см. п. 6)).

С. Ю. Пилюгин доказал [26], что для типичной системы $\varphi \in Z(\mathcal{M})$ выполнены равенства

$$Q(x,\varphi) = P(x,\varphi) = R(x,\varphi)$$

для всех $x \in \mathcal{M}$ (типичность свойства $Q(x,\varphi) = R(x,\varphi)$ для $x \in \mathcal{M}$ была установлена В. А. Добрынским [10]).

Кроме того, С.Ю.Пилюгиным была частично обоснована гипотеза В.И. Арнольда, связанная с устойчивостью ω-предельных множеств областей в динамических системах. В [27, 28] доказано, что типичная система φ в $Z(\mathcal{M})$ обладает следующим свойством: для любой точки $x \in \mathcal{M}$ существует счетное множество $\mathcal{B}(x) \in \mathbb{R}$ такое, что если $r \notin \mathcal{B}(x)$, то предельное множество шара $\mathcal{N}_r(x)$ устойчиво по Ляпунову.

Результаты С. Ю. Пилюгина, связанные со структурой пространства $Z(\mathcal{M})$, отражены в его монографии [76].

6. Приближенные траектории

Пусть φ — дискретная динамическая система на метрическом пространстве $(\mathcal{X}, d)$. Фиксируем $\delta > 0$ и назовем δ-псевдотраекторией системы φ последовательность $x_k \in \mathcal{X}$ ($k \in \mathbb{Z}$ или $k \in \mathbb{Z}_+$) такую, что

$$d(x_{k+1}, \varphi(x_k)) < \delta, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (или } k \in \mathbb{Z}_+). \tag{16}$$

Псевдотраектории чаще всего рассматривают при изучении динамических систем численными методами. Пусть, например, ψ — численный метод, аппроксимирующий систему φ, а последовательность $x_0, x_1, \dots$ порождается компьютерной реализацией соотношений $x_{k+1} = \psi(x_k)$. В этом случае число δ в (16) оценивает как погрешность метода ψ, так и ошибки округления.

Говорят, что система φ обладает свойством отслеживания (псевдотраекторий), если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любой δ-псевдотраектории $\{x_k\}$ найдется точка x, удовлетворяющая неравенствам

$$d(\varphi^k(x), (x_k)) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (или } k \in \mathbb{Z}_+)$$

(т. е. траектория точки x в системе φ ε-близка к последовательности $\{x_k\}$).

Если система φ обладает свойством отслеживания, то ее приближенные траектории, построенные численными методами, отражают реальную динамику системы φ.

Отметим некоторые результаты по теории отслеживания, полученные С. Ю. Пилюгиным.

Он доказал [77], что полные семейства псевдотраекторий аппроксимируют форму аттракторов в динамических системах. В работе [78] показано, что структурно устойчивая система дифференциальных уравнений обладает свойством отслеживания.

С. Ю. Пилюгин и О. Б. Пламеневская решили известную еще с 70-х годов проблему, поставленную японским математиком А. Моримото, и доказали, что типичная система в $Z(\mathcal{M})$ (см. п. 5) обладает свойством отслеживания [79].

С. Ю. Пилюгин и С. Ларссон (Швеция) нашли условия, при которых бесконечномерная динамическая система, порожденная параболическим уравнением в частных производных

$$u_t = u_{xx} + f(u) \tag{17}$$

с краевыми условиями Дирихле, обладает свойством отслеживания в окрестности своего глобального аттрактора [73]. При рассмотрении псевдотраекторий, порожденных дискретизациями уравнения (17), получены оценки расстояния между приближенными и точными решениями на бесконечных временных промежутках, оптимальные по порядку.

В стандартной постановке задачи отслеживания рассматривается последовательность $\xi = \{x_k\}$ и предполагается, что числа

$$\delta_k(\xi) = d(x_{k+1}, \varphi(x_k))$$

равномерно малы.

Задачу об отслеживании можно исследовать в предположении, что

$$\delta_k(\xi) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(например, при численном интегрировании дифференциального уравнения одношаговым методом такое предположение соответствует неограниченному уменьшению шага с возрастанием времени). В этом случае естественно искать точку x такую, что

$$h_k(x, \xi) = d(\varphi^k(x), x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(соответствующее свойство системы φ называется свойством предельного отслеживания).

Отметим один из результатов, полученный С. Ю. Пилюгиным совместно с Т. Эйрола и О. Неванлинна (Финляндия), в котором удается установить наличие аналога свойства предельного отслеживания без предположения гиперболичности инвариантного множества.

Фиксируем числа r, $p \geq 1$ и рассмотрим пространство последовательностей $v = \{v_k : k \geq 0\}$, в котором норма последовательности v задается выражением

$$\|v\|_{r,p} = \left(\sum_{k\geq 0} r^k \, |v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В [70] показано, что если Λ — компактное инвариантное множество диффеоморфизма φ и число $r^{\frac{1}{p}}$ не принадлежит спектру Сакера–Селла множества Λ [87], то существуют окрестность W множества Λ и числа L,

$d_0 > 0$, обладающие следующим свойством: если для последовательности $\xi = \{x_k : k \geq 0\} \subset W$ выполнено неравенство

$$\|\{\delta_k(\xi)\}\|_{r,p} \leq \delta \leq d_0,$$

то существует такая точка x, что

$$\|\{h_k(x,\xi)\}\|_{r,p} \leq L\delta.$$

С. Ю. Пилюгиным опубликована монография [80] — первая в мировой литературе книга по теории отслеживания.

7. Квазиквадратичные системы

Начатое в работах А. Пуанкаре исследование качественной теории "в целом"для плоских автономных систем весьма далеко от завершения, хотя в этой области работали и продолжают работать многие исследователи. Эта теория неполна даже для такого узкого класса систем, как квадратичные (например, не известна оценка сверху для максимально возможного числа их предельных циклов).

Тем не менее для некоторых подклассов семейства полиномиальных и квазиполиномиальных систем удается полностью решить задачу глобальной топологической классификации.

А. Ф. Андреев и И. А. Андреева изучили [2–6] квазиквадратичные системы вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + by + ax^2 + y^2 + cry, \tag{18}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Для системы (18) построены бифуркационные диаграммы всех особых точек, включая бесконечно удаленные (их число изменяется от 3 до 5, а их кратность — от 1 до 9), выяснены их локальные фазовые портреты, исследован вопрос о существовании предельных и сепаратрисных циклов. Построены бифуркационные диаграммы для глобальных фазовых портретов и сами эти портреты (их оказалось 86).

Литература

1. *Алексеев В. М.* Квазислучайные колебания и качественные вопросы

небесной механики // 9-я летняя математическая школа. Киев. 1972. С. 212–341.

2. *Андреев А. Ф.* О проблемах различения для исключительных направлений R^2-системы в особой точке // Нелинейные динамические системы. Вып. 1. СПб. 1997. С. 13–31.

3. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* Бифуркации в одном семействе неаналитических векторных полей. I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 3 (№ 15). С. 8–14.

4. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* Бифуркации в одном семействе неаналитических векторных полей. II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 4 (№ 22). С. 3–8.

5. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* О предельных и сепаратрисных циклах одной квазиоднородной системы // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 700–701.

6. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* О предельных циклах одной квазиквадратичной системы / С.-Петерб. ун-т. 1997. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 14. 04. 97. № 1215-В97.

7. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.

8. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны / Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1967. Т. 90. 210 с.

9. *Гилленберг М., Осипов А. В., Сёдербакка Г.* Эффект сохранения аттрактора при двумерном возмущении // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 869–860.

10. *Добрынский В. А.* Типичность динамических систем с устойчивой пролонгацией // Динамические системы и задачи устойчивости. Киев. 1973. С. 43–53.

11. *Миллионщиков В. М.* Статистически правильные системы // Мат. сб. 1968. Т. 77. № 1. С. 154–165.

12. *Миллионщиков В. М.* Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1968. Т. 77. № 2. С. 163–173.

13. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема // Труды Моск. мат. об-ва. 1968. Т. 19. С. 179–210.

14. *Осипов А. В.* О гиперболичности базисного семейства уравнения Ле-

винсона // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 10. С. 1795–1800.

15. *Осипов А. В.* О поведении решений уравнения Левинсона // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 2000–2008.

16. *Осипов А. В.* Ω-устойчивость уравнения Левинсона // Вестн. Ленингр. ун-та. 1976. № 7. С. 156–157.

17. *Осипов А. В.* О диссипативности и условиях вырождения в HHW-модели // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 658–663.

18. *Осипов А. В., Плисс В. А.* Релаксационные колебания в одной системе типа Дуффинга // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 3. С. 435–446.

19. *Осипов А. В., Сёдербакка Г., Эйрола Т.* О появлении хаотического режима в одной динамической системе типа "два хищника–одна жертва"// Актуальные проблемы современной математики. Вып. 1. СПб. 1996. С. 39–70.

20. *Пилюгин С. Ю.* Циклы в фазовых диаграммах систем Морса–Смейла // Дифференц. уравнения. 1977. Т.13. № 5. С. 874–882.

21. *Пилюгин С. Ю.* О фазовых диаграммах систем Морса–Смейла без критических связей // Вестн. Ленингр. ун-та. 1978. № 7. С. 55–56.

22. *Пилюгин С. Ю.* Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 2. С. 245–254.

23. *Пилюгин С. Ю.* Периодические траектории и структура фазовых диаграмм // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 6. С. 1000–1006.

24. *Пилюгин С. Ю.* Притягивающие множества со строгим условием трансверсальности на границе // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1532–1539.

25. *Пилюгин С. Ю.* C^0-возмущения притягивающих множеств и устойчивость границы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 10. С. 1712–1718.

26. *Пилюгин С. Ю.* Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 160 с. / Пер. на англ.: Pilyugin S.Yu. Introduction to structurally stable systems of differential equations. Basel; Boston; Berl Birkhäuser-Verlag. 1992. 188 p.

27. *Пилюгин С. Ю.* Предельные множества траекторий областей в динамических системах // Функц. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. № 3. С. 82–83.

28. *Пилюгин С. Ю.* Предельные множества областей в потоках // Труды Ленингр. мат. об-ва. 1990. Т. 1. С. 211–228.

29. *Пилюгин С. Ю.* Пространство динамических систем с C^0-топологией // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1659–1670.

30. *Пилюгин С. Ю.* Цепные пролонгации в типичных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1334–1337.

31. *Пилюгин С. Ю., Плисс В. А.* Граница устойчивого инвариантного множества системы Морса–Смейла // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 1997–2001.

32. *Плисс В. А.* О поведении решений грубых периодических и автономных систем // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. № 3. С. 500–502.

33. *Плисс В. А.* К теории инвариантных множеств в периодических системах дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 2. С. 215–227.

34. *Плисс В. А.* О структуре асимптотически устойчивых инвариантных множеств грубых автономных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 6. С. 979–991.

35. *Плисс В. А.* О грубости последовательности линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 2. С. 231–270.

36. *Плисс В. А.* О поведении решений последовательности периодических систем второго порядка с малой нелинейностью // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 4. С. 651–660.

37. *Плисс В. А.* Один вариант леммы о замыкании // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 5. С. 840–850.

38. *Плисс В. А.* Расположение сепаратрис седловых периодических движений систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 7. С. 1199–1225.

39. *Плисс В. А.* Об одной гипотезе Смейла // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 2. С. 268–282.

40. *Плисс В. А.* Поведение решений периодической системы двух дифференциальных уравнений, имеющей интегральное множество нулевой меры // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 3. С. 553–555.

41. *Плисс В. А.* Анализ необходимости условий грубости Смейла и Роббина для периодических систем дифференциальных уравнений

// Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 6. С. 972–983.

42. *Плисс В. А.* Система дифференциальных уравнений, имеющая бесконечное число периодических решений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 9. С. 2179–2183.

43. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.

44. *Плисс В. А.* Равномерно ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 883–891.

45. *Плисс В. А.* Множества линейных систем с равномерно ограниченными решениями // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 9. С. 1599–1616.

46. *Плисс В. А.* Об устойчивости произвольной системы по отношению к малым в смысле C^1 возмущениям // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1981–1982.

47. *Плисс В. А.* Связь между различными условиями структурной устойчивости // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 828–835.

48. *Плисс В. А.* О расположении устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 5. С. 779–785.

49. *Плисс В. А.* О гиперболичности гладких коциклов над потоками с инвариантной эргодической мерой // Časopis pro pestovani matematiky. 1986. Roc. 111. P. 146–155.

50. *Плисс В. А.* Существование гиперболического интегрального множества специальной периодической системы // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 5. С. 800–808.

51. *Плисс В. А.* Неблуждающее множество специальной периодической системы // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 966–975.

52. *Плисс В. А.* Грубость одной периодической системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2077–2081.

53. *Плисс В. А., Пилюгин С. Ю.* Сохраняющиеся структуры для диффеоморфизмов с эргодической инвариантной мерой // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 3. С. 312–313.

54. *Плисс В. А., Пилюгин С. Ю.* Существование сохраняющихся структур для диффеоморфизмов с эргодической инвариантной мерой // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 116–120.

55. *Плисс В. А., Чернышев В. Е.* Некоторые свойства гомеоморфных преобразований плоскости в себя // Вестн. Ленингр. ун-та. 1970. № 13. С. 62–68.

56. *Чернышев В. Е.* Структура инвариантного множества диффеоморфизма при наличии гомоклинической точки // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. № 1. С. 70–76.

57. *Чернышев В. Е.* Структура инвариантного континуума грубого диссипативного диффеоморфизма плоскости // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. № 7. С. 157–158.

58. *Чернышев В. Е.* Структура окрестности гомоклинического контура с седловой точкой покоя // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 9. С. 1531–1536.

59. *Чернышев В. Е.* Бифуркация инвариантных множеств в окрестности контура с седловой точкой покоя // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 439–445.

60. *Чернышев В. Е.* Сильно устойчивые расслоения над гомоклиническими контурами // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 4 (№ 22). С. 44–52.

61. *Чернышев В. Е.* Сильно устойчивые слоения над контурами лоренцева типа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1996. Вып. 3 (№ 15). С. 46–53.

62. *Чернышев В. Е.* Возмущение гетероклинических циклов лоренцева типа // Нелинейные динамические системы. Вып. 1. СПб. 1997. С. 285–297.

63. *Чурин Ю. В.* Простые исключительные множества неавтономных квазиоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 6. С. 1073–1084.

64. *Чурин Ю. В.* Поведение решений квазиоднородных систем, имеющих лишь простые исключительные множества // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 7. С. 1289–1297.

65. *Чурин Ю. В.* Об исчезновении периодических решений квазиоднородных систем, имеющих лишь простые исключительные множества // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 4. С. 678–686.

66. *Чурин Ю. В.* Явление резонанса в квазиоднородных системах // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 4. С. 756–757.

67. *Чурин Ю. В.* Замкнутость множества систем с особыми периодическими решениями // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 24. № 6. С. 999–1004.

68. *Cartwright M. L., Littlewood J. E.* On nonlinear differential equations of the second order: I. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2\dot{y})\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large // J. London Math. Soc. 1945. Vol. 20. № 79. P. 180–189.

69. *Cartwright M. L., Littlewood J. E.* On nonlinear differential equations of the second order: II. The equation $\ddot{y} + kf(y\dot{y} + g(y, k)) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t)$ // Ann. Math. 1947. Vol. 48. № 2. P. 474–494; 1949. Vol. 50. № 2. P. 504–505.

70. *Eirola T., Nevanlinna O., Pilyugin S. Yu.* Limit shadowing property // Numer. Funct. Anal. Optim. 1997. Vol. 18. P. 75–92.

71. *Gillenberg M., Osipov A. V., Söderbacka G.* Bifurcation analisys of a metapopulation model with sources and sinks // J. Nonlinear Sci. 1996. № 6. P. 329–366.

72. *Hayashi Sh.* On the solution of C^1-stability conjecture for flows. Preprint, 1996. 20 p.

73. *Larsson S., Pilyugin S. Yu.* Numerical shadowing near the global attractor for a semilinear parabolic equation. Preprint 1998–21. Chalmers Univ. Techn. Göteborg. 1998. 28 p.

74. *Levinson N.* A second order differential equation with singular solutions // Ann. Math. 1949. Vol. 50. № 1. P. 126–153.

75. *Mañé R.* A proof of the C^1-stability conjecture // IHES Publ. Math. 1988. Vol. 66. P. 161–210.

76. *Pilyugin S. Yu.* The space of dynamical systems with the C^0-topology // Lecture Notes in Math. 1994. N 1571. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. 188 p.

77. *Pilyugin S. Yu.* Complete families of pseudotrajectories and shape of attractors // Rand. Comput. Dynamics. 1994. Vol. 2. P. 205–226.

78. *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in structurally stable flows // J. Differential Equations. 1997. Vol. 140. P. 238–265.

79. *Pilyugin S. Yu., Plamenevskaya O. B.* Shadowing is generic // Topology Appl. 1999. Vol. 97. № 3. P. 253–266.

80. *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in dynamical systems // Lecture Notes in Math. 1999. № 1706. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. 271 p.

81. *Pliss V. A., Sell G. R.* Perturbations of attractors of differential equations // J. Differential Equations. 1991. Vol. 92. P. 100–124.

82. *Pliss V. A., Sell G. R.* Approximations of the long-time dynamics of the Navier–Stokes equations // Lecture Notes. 1994. Vol. 152. P. 247–277.

83. *Popova E., Fasham M. J. R., Osipov A. V., Ryabchenko V. A.* Chaotic behavior of an ocean ecosystem model under seasonal external forcing and the possibility of its prediction // J. Plancton Res. 1997. № 6. P. 23–31.

84. *Robbin J.* A structural stability theorem // Ann. Math. 1971. Vol. 94. P. 447–493.

85. *Robinson C.* Structural stability of vector fields // Ann. Math. 1974. Vol. 99. P. 154–175.

86. *Robinson C.* Structural stability for C^1-diffeomophisms // J. Differential Equations. 1976. Vol. 22. P. 28–73.

87. *Sacker R. J., Sell G. R.* A spectral theory for linear differential systems // J. Differential Equations. 1978. Vol. 27. P. 320–358.

88. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. P. 747–817.

89. *Sparrow C.* The Lorentz equations: Bifurcations, chaos and strange attractors. N. Y.: Springer-Verlag, 1982. 269 p.

90. *Wen L.* The C^1-stability conjecture for flows // J. Differential Equations. 1996. Vol. 129. P. 334–357.