ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2003
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

управление в нелинейных системах
прикладные задачи

О ПОШАГОВОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ

Д.В. Хлопин

отдел управляемых систем,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С.Ковалевской 16, 620219, Екатеринбург, Россия
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Аннотация.

В работе исследуется вопрос равномерной аппроксимации “скользящих режимов” траекториями, порожденными кусочно-постоянными управлениями. Рассматриваются дискретные варианты как экстремального правила Н.Н.Красовского, так и модификации А.В. Кряжимского. При этом условия, накладываемые на дифференциальную систему, не включают в себя предположений о липшицевости или подлинейном росте правой части уравнения динамики, не требуется также и единственности решений системы. Для столь общих условий показывается, что модификация предложенная А.В.Кряжимским сходится; что не всякий скользящий режим можно аппроксимировать при помощи допустимых траекторий; даны также достаточные условия (общий критерий Камке) для сходимости экстремального правила Н.Н.Красовского.

[0]Статья выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N01-01-96-450

1 Введение

В задачах программного управления нередко возникает проблема расширения исходной задачи. Использование обобщенных управлений связано, в частности, с возможной некомпактностью пучка "обычных" траекторий в естественной для задач управления с геометрическими ограничениями [1, 2] топологии равномерной сходимости. Некомпактность пучка зачастую приводит к отсутствию оптимального управления или же некорректности полученного оптимального управления. Поэтому обычно нелинейную задачу управления расширяют. Например, в качестве расширения исходного множества допустимых управлений в данной статье рассматривается множество регулярных борелевских мер с "лебеговской проекцией" (порождающие скользящие режимы).

Но, после расширения исходной задачи, в нелинейных задачах динамики оптимальной программой зачастую оказывается какая-либо программа-мера, и следовательно после нахождения этой меры возникает задача аппроксимации траектории, порожденной этим обобщенным управлением, при помощи траекторий порожденных обычными управлениями. Эта задача может быть решена топологическими методами (см., в частности, [2, 3, 4]), однако полученные при этом конструкции весьма сложны. С другой стороны, поскольку оптимальная программа должна удовлетворять какому-либо аналогу принципа максимума Л.С.Понтрягина [1, 2, 5, 6], то и строить приближенную траекторию можно при помощи экстремальных методов.

Эта идея впервые в теории оптимального управления и дифференциальных игр возникла в экстремальных конструкциях Н.Н. Красовского [7, 8, 9, 10]. При помощи метода экстремального прицеливания Н.Н Красовским и А.И. Субботиным была доказана теорема об альтернативе [7, 11]. Метод экстремального сдвига может использоваться как при отслеживании движения по "стабильному мосту"[12, 13, 14], так и при отслеживании модели в известной схеме управления с поводырем [7, 15].

Однако с помощью "обычного"метода экстремального прицеливания не удалось распространить теоремы об альтернативе на дифференциальные игры сближения-уклонения с нелипшицевой правой частью уравнения динамики. Соответствующая теорема об альтернативе была установлена А.В.Кряжимским [16], но используемая при этом экстремальная конструкция, в отличие от конструкции [7], нацеливается не на собственно траекторию, а подобно конструкции управления с поводырем, на некоторое вспомогательное квазидвижение-фантом. В [17] при помощи такой конструкции исследовалась дифференциальная игра сближения-уклонения в предположениях не требующих даже обобщенной единственности.

В дальнейшем А.В.Кряжимским и Ю.С.Осиповым такая конструкция была использована для динамического решения операторных уравнений [18], в частности, для неупреждающей устойчивой аппроксимации решений дифференциального уравнения [19], или приближенного дифференцирования [20].

В работе [21] рассматривалась задача минимизации функционала на траекториях управляемой динамической системы в случае разрывной по управлению правой части уравнения динамики; в качестве обобщенных управлений применялись конечно-аддитивные меры, а "обычный"метод экстремального прицеливания использовался для приближенной реализации таких обобщенных траекторий при помощи траекторий, порожденных кусочно-постоянными управлениями.

Однако вопрос о применимости "обычного"метода экстремального прицеливания для систем с нелипшицевой правой частью, поставленный Н.Н. Красовским еще в 1973 году, остался открыт до сих пор. Данная статья дает частичное решение этого вопроса.

В данной работе в качестве обобщенных управлений используются регулярные борелевские меры с “лебеговской проекцией” (порождающие скользящие режимы), а для реализации ее обобщенных траекторий рассматривается как классическая конструкция Н.Н. Красовского [7], так и дискретная модификация конструкции из [16]. При этом условия, накладываемые на дифференциальную систему, не включают в себя предположений о липшицевости или подлинейном росте правой части уравнения динамики, не требуется также и единственности решений системы. В столь общих условиях оказывается, что не всякую обобщенную траекторию можно аппроксимировать при помощи допустимых траекторий, а следовательно, в случае неединственности пучка траекторий, можно аппроксимировать лишь какие-либо траектории из нужного нам пучка.

Показывается, что предельные траектории конструкций, подобных экстремальному сдвигу, обладают соответствующим экстремальным свойством почти в каждой точке, и тем самым удовлетворяют некоторому аналогу принципа максимума. Воспользовавшись этим экстремальным свойством предельных траекторий, легко показать, что предложенное А.В.Кряжимским прицеливание на "квазидвижение"позволяет равномерно аппроксимировать некоторую траекторию из пучка, соответствующего известному нам

управлению. С другой стороны, если экстремальная конструкция "прицеливается"на траекторию, не используя собственно обобщенное управление, (конструкция
Н.Н. Красовского), то в случае неединственности решений системы, экстремальная конструкция может сходиться к траектории из совсем другого пучка, "ошибаться". Показано также, что если система удовлетворяет, например, такому признаку единственности решений системы как общий критерий Камке, классический экстремальный сдвиг всегда сходится к прицеливаемой траектории. Таким образом остается неизвестным, сходится ли метод экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, если обобщенная единственность прицеливаемой траектории есть, а какой-либо общий критерий единственности для данной обобщенной траектории не выполняется.

Следующий параграф почти полностью следует [22], но в отличие от [22] на систему формально накладываются более слабые требования.

2 Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{R}^m (m \in \mathbb{N})$ — m-мерное евклидово пространство. Евклидову норму в $\mathbb{R}^m$ обозначим через $||\cdot||_m$. Кроме того, для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$ под $x'y$ будем понимать скалярное произведение векторов x и y.

Для любого подпространства $X \subset \mathbb{R}^n$ и замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^m$, для любого под $B_F(X)$ будем понимать множество всех ограниченных, измеримых по Борелю функций, действующих из пространства X в множество F; введем на $B_F(X)$ норму равномерной сходимости $||\cdot||_{B_F(X)}$. Для краткости примем $B_m(X) \stackrel{\triangle}{=} B_{\mathbb{R}^m}(X), B(X) \stackrel{\triangle}{=} B_{\mathbb{R}}(X)$. Пространство всех непрерывных функций из $B_A(X)$ будем обозначать через $C_A(X)$.

Для любого топологического пространства (X, τ) через $cl(G, \tau)$ обозначим замыкание произвольного множества $G \subset X$. Для любой последовательности $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ введем множество всех частичных пределов этой последовательности:

$$(P - LIM)(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in X \mid \ \exists i(k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \lim_{k\to\infty} x_{i(k)} = x, \lim_{k\to\infty} i(k) = \infty\}.$$

Для любого измеримого пространства (см. [3, с.64]) $(E, \mathcal{L}),\ E \neq \emptyset$, обозначим через $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ — множество всех счетно-аддитивных вещественнозначных (в/з) мер на σ-алгебре $\mathcal{L}$ подмножеств множества E.

Пусть управляемая система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ x(t_0) = x_0,\ t \in I_0 \stackrel{\triangle}{=} [t_0, T] \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^m, u \in P, \qquad (1)$$

где $P \subset \mathbb{R}^p$ —некоторый компакт, а функция $f \in C_m(I_0 \times \mathbb{R}^m \times P)$ — непрерывна по совокупности переменных. Любую измеримую по Борелю функцию $u(\cdot)$, действующую из I_0 в P, будем называть допустимым программным управлением системы (1). Множество всех таких управлений обозначим через $\mathcal{U}$.

Каждому допустимому программному управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, сопоставим множество всех траекторий системы (1), порожденных этим управлением на весь промежуток времени $I_0 = [t_0, T]$:

$$\Phi(u(\cdot)) \stackrel{\triangle}{=} \{g \in C_m([t_0, T]) \mid \forall t \in [t_0, T] \ \ g(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0, t[} f(\tau, g(\tau), u(\tau))d\tau\}.$$

Пусть для начальной позиции (t_0, x_0) выполнены следующие условия:

I) (существование) для любого допустимого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ множество $\Phi(u(\cdot))$ непусто;

II) (неупреждаемость) для любого момента времени $\theta \in]t_0, T]$, для любых допустимых управлений $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ таких, что $u_1|_{[t_0,\theta[}(\cdot) = u_2|_{[t_0,\theta[}(\cdot)$, для любой траектории $x_1(\cdot) \in \Phi(u_1(\cdot))$ существует такая траектория $x_2(\cdot) \in \Phi(u_2(\cdot))$, что $x_1(\cdot)|_{[t_0,\theta]} = x_2(\cdot)|_{[t_0,\theta]}$;

III) (ограниченность) множество $\Phi \stackrel{\triangle}{=} \cup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \Phi(u(\cdot))$ всех продолжимых траекторий ограничено.

Иными словами, для любого допустимого управления найдется хотя бы одна порожденная этим управлением траектория движения системы, продолжимая на весь отрезок I_0; в случае переключения в некоторый момент времени одного программного управления на другое, система может продолжить движение по продолжимой траектории соответствующей новому управлению; все движения, продолжимые до момента T включительно, не покидают компакта $K \stackrel{\triangle}{=} cl(\{x(t) \in \mathbb{R}^m \mid t \in I_0, x(\cdot) \in \Phi\}, \tau_{\mathbb{R}^m})$.

Заметим, что все вышеперечисленные условия на систему выполнены, в частности, при классических предположениях на дифференциальную систему (1) – функция $f(t, x, u)$ непрерывна, липшицева по x и удовлетворяет условию подлинейного роста.

Определим множество обобщенных программных управлений. Обозначим через $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{K}_0$ σ-алгебры борелевских подмножеств из множеств I_0 и $I_0 \times P$ соответственно. Через $\tilde{\mathcal{U}}$ обозначим множество всех неотрицательных счетно-аддитивных мер ν на $\mathcal{K}_0$ таких, что для любого $\Gamma \in \mathcal{I}_0$ выполнено равенство $\nu(\Gamma \times P) = \lambda_0(\Gamma)$ (λ_0 – мера Лебега на σ-алгебре $\mathcal{I}_0$). Множество $\tilde{\mathcal{U}}$ снабдим *-слабой топологией τ_* (слабейшая топология, в которой интеграл $\int_{I_0 \times P} g(t,u)\mu(d(t,u))$ непрерывно зависит от меры $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ при всяком выборе непрерывной функции $g \in C_m(I_0 \times P)$). Тогда по теореме Алаоглу (см. [23, с. 459]) топологическое пространство $(\tilde{\mathcal{U}}, \tau_*)$ компактно и метризуемо. Элементы из $\tilde{\mathcal{U}}$ и будем называть обобщенными управлениями.

Как и для допустимых программных управлений, определим множество всех обобщенных траекторий системы (1), порожденных заданным обобщенным управлением $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ на весь промежуток времени $[t_0, T]$:

$$\tilde{\Phi}(\mu) \stackrel{\triangle}{=} \{g \in C_K(I_0) \mid \forall t \in I_0 \;\; g(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t[\times P} f(\tau, g(\tau), u)\mu(d(\tau,u))\}.$$

Обозначим множество всех всех обобщенных траекторий системы (1) через $\tilde{\Phi} \stackrel{\triangle}{=} \cup_{\mu\in\tilde{\mathcal{U}}} \tilde{\Phi}(\mu)$.

Известно (см. [3, с.298],[2, глава 2]), что существует алгебраический изоморфизм множества $\mathcal{U}$ всех допустимых управлений на некоторое подмножество множества $\tilde{\mathcal{U}}$; в частности, для любого $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ существует такое обобщенное управление-мера $\triangle_{u(\cdot)} \in \tilde{\mathcal{U}}$, что для любой функции $g(t,u) \in C_m(I_0 \times P)$ имеет место $\int\limits_{I_0} g(\tau, u(\tau))d\tau = \int\limits_{I_0\times P} g(\tau,u)\triangle_{u(\cdot)}(d(\tau,u))$. Таким образом любое допустимое управление можно считать обобщенным, а следовательно не различать допустимое управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и обобщенное управление $\triangle_{u(\cdot)} \in \tilde{\mathcal{U}}$, считая что $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}}$, $\Phi \subset \tilde{\Phi}$. Заметим также, что $\mathcal{U}$ всюду плотно в $\tilde{\mathcal{U}}$ (см. [3, с. 306]), то есть

$$\tilde{\mathcal{U}} = cl(\mathcal{U}, \tau_*). \tag{2}$$

Кроме того на любую меру $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ можно посмотреть как на функцию, сопоставляющую каждому моменту времени $t \in I_0$ регулярную борелевскую меру μ_t, определенную на борелевской σ-алгебре $\mathcal{A}$ всех борелевских множеств в P. Таким образом для любой измеримой по Борелю функции $g \in B(I_0 \times P)$ и любого борелевского множества $I \subset I_0$ имеем:

$$\int_{I\times P} g(\tau,u)\mu(d(\tau,u)) = \int_I \int_P g(\tau,u)d\mu_\tau d\tau.$$

Введем функцию $F_\mu(t,x) \in B_m(I_0 \times K)$ по правилу:

$$F_\mu(t,x) \stackrel{\triangle}{=} \int_P f(t,x,u)d\mu_t.$$

Теперь любая обобщенная траектория $x(\cdot) \in \tilde{\Phi}(\mu)$ является решением уравнения Каратеодори

$$\dot{x}(t) = F_\mu(t, x(t)). \tag{3}$$

Воспользовавшись теоремой Ляпунова [24], легко показать, что для любого вектора $s \in \mathbb{R}^m$ для почти всех $(t,x) \in I_0 \times K$, имеет место:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} s' f(t,x,u) = \min_{\mu \in \tilde{\mathcal{U}}} s' F_\mu(t,x). \tag{4}$$

В дальнейшем, говоря о траекториях движения системы (1) (как допустимых, так и обобщенных), мы будем иметь ввиду лишь продолжимые на весь промежуток I_0 траектории, считая иные, непродолжимые траектории (если они и есть для каких-либо программных управлений) физически неосуществимыми. Поскольку наша задача аппроксимировать обобщенные траектории из $\tilde{\Phi}$ при помощи обычных траекторий из Φ, нас также не интересуют обобщенные траектории выходящие из компакта K, хотя и заметим, что вместо так определенного компакта K можно взять любой компакт его содержащий.

Для любой функции $g(\cdot) \in B_m(I_0)$ и для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ введем квазидвижение $Q(g,\mu)(\cdot) \in C_m(I_0)$ по правилу: для любого $t \in I_0$

$$Q(g,\mu)(t) \stackrel{\triangle}{=} x_0 + \int_{[t_0,t[} f(\tau, g(\tau), u)\mu(d(\tau,u)).$$

Как легко следует из [3, с. 208] отображение $(g,\mu) \mapsto Q(g,\mu)(\cdot)$ из $B_m(I_0) \times \tilde{\mathcal{U}}$ в $C_m(I_0)$ непрерывно по совокупности переменных

Заметим также, что для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$

$$\tilde{\Phi}(\mu) = \{x(\cdot) \in C_K(I_0) \mid x(\cdot) = Q(x,\mu)(\cdot)\}. \tag{5}$$

В [22] также рассматривалось экстремальное прицеливание на фантом, при этом на систему (1) помимо непустоты $\Phi(u(\cdot))$ накладывалось формально более сильное, а главное, менее удобное для проверки условие непустоты пучка $\tilde{\Phi}(\mu)$. Докажем это условие из предположений **I) - III)**. Попутно мы также покажем (хорошо известное при классических условиях на систему, см. например [2, 3, 7, 25]) свойство компактности пучка $\tilde{\Phi}$ всех обобщенных траекторий системы (1). Если посмотреть на обобщенные траектории как на решения дифференциального включения, то утверждения, подобные этим двум предложениям, доказаны например в [26, 27].

Предложение 1 *Множество $\tilde{\Phi}$ компактно в $C_m(I_0)$, и для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ множество $\tilde{\Phi}(\mu)$ непусто.*

Доказательство. Сначала покажем замкнутость $\tilde{\Phi}$ в $C_m(I_0)$. Для этого достаточно показать его секвенциальную замкнутость. Пусть последовательность $\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{\Phi}^{\mathbb{N}}$ равномерно сходится к $x(\cdot) \in C_m(I_0)$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ существует такое обобщенное управление $\mu_i \in \tilde{\mathcal{U}}$, что $x_i(\cdot) \in \tilde{\Phi}(\mu_i)$. Поскольку $\tilde{\mathcal{U}}$ – компакт, существует такие монотонно возрастающая функция $i(k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и обобщенное управление $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$, что $\mu_{i(k)}$ *-слабо сходится к μ. Тогда из (5) следует $x_{i(k)}(\cdot) = Q(x_{i(k)}, \mu_{i(k)})(\cdot)$, переходя к пределу имеем $x(\cdot) = Q(x, \mu)(\cdot)$, тогда, снова воспользовавшись (5), получаем $x(\cdot) \in \tilde{\Phi}(\mu) \subset \tilde{\Phi}$ и замкнутость $\tilde{\Phi}$ показана.

Поскольку все позиции обобщенных траекторий из $\tilde{\Phi}$ ограничены компактом $K \subset \mathbb{R}^m$, в силу ограниченности функции $f(t, x, u)$ на компакте $I_0 \times K \times P$, из определения обобщенной траектории легко следует, что множество $\tilde{\Phi}$ равностепенно непрерывно. Тогда выполнены все условия теоремы Арцела-Асколи (см. [23, с. 289]), а следовательно замкнутое множество $\tilde{\Phi}$ – компактно в $C_m(I_0)$.

Как следует из (2) для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ существует последовательность допустимых управлений $\{u_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$, которая *-слабо сходится к μ. С другой стороны по условию **I)** множества $\Phi(u_i)$ непусты, следовательно существует такая последовательность траекторий $\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \in \Phi^{\mathbb{N}}$, что $x_i(\cdot) \in \Phi(u_i)$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Поскольку вся эта последовательность вложена в компакт $\tilde{\Phi}$, существует функция $i(k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и обобщенная траектория $x(\cdot) \in \tilde{\Phi}$, что $x_{i(k)}(\cdot)$ равномерно сходится к некоторой обобщенной траектории $x(\cdot) \in \tilde{\Phi}$. Но снова $x_{i(k)}(\cdot) = Q(x_{i(k)}, \mu_{i(k)})(\cdot)$. Переходя к пределу имеем $x(\cdot) = Q(x, \mu)(\cdot)$, то есть $x(\cdot) \in \tilde{\Phi}(\mu)$, и $\tilde{\Phi}(\mu) \neq \varnothing$. Таким образом предложение полностью доказано.

Для полноты картины покажем, что в условиях **I) - III)** выполнено также следующее полезное свойство (рассмотренное в гораздо более общих предположениях например в [26])

Предложение 2 *Отображение $\mu \mapsto \tilde{\Phi}(\mu)$ из $\tilde{\mathcal{U}}$ в $\{A \mid A \subset \tilde{\Phi}\}$ полунепрерывно сверху (см. определение например в [3, с.170]).*

Доказательство. Пусть $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$ — произвольная *-слабо сходящаяся последовательность обобщенных управлений. Пусть $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ — предел этой последовательности. Поскольку множества $\tilde{\Phi}(\mu_i)$ непусты, в силу компактности $\tilde{\Phi}$ можно считать, что выбранные траектории $x_i(\cdot)$ из пучка $\Phi(\mu_i)$ образуют равномерно сходящуюся последовательность. Предел этой последовательности траекторий обозначим через $\tilde{x}(\cdot) \in C_m(I_0)$. Тогда в силу непрерывности отображения $Q(\cdot,\cdot)$ квазидвижения $Q(x_i,\mu_i)(\cdot)$ должны равномерно сходиться к квазидвижению $Q(\tilde{x},\mu)(\cdot)$. Но поскольку $x_i(\cdot) = Q(x_i,\mu_i)(\cdot)$ для любого $i \in \mathbb{N}$, имеем $x_i(\cdot) \rightrightarrows Q(\tilde{x},\mu)(\cdot)$, и в силу единственности предела $\tilde{x}(\cdot) = Q(\tilde{x},\mu)(\cdot)$, то есть $\tilde{x} \in \tilde{\Phi}(\mu)$. Таким образом отображение $\mu \mapsto \Phi(\mu)$ полунепрерывно сверху.

Уже из предложения 2 следует, что для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ для любой последовательности допустимых управлений $\{u_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$, сходящейся к μ в $(\tilde{\mathcal{U}},\tau_*)$ (такая существует в силу (2)) и для произвольной последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \in \Phi^{\mathbb{N}}$, такой что для любого $i \in \mathbb{N}$ $x_i(\cdot) \in \Phi(u_i(\cdot))$ имеет место:

$$\emptyset \neq (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \tilde{\Phi}(\mu),$$

то есть из любой такой последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке I_0 к некоторой обобщенной траектории $\tilde{x}(\cdot)$ из пучка $\tilde{\Phi}(\mu)$.

Это решает задачу аппроксимации обобщенных траекторий траекториями, порожденными допустимыми управлениями, но, во-первых, хотелось использовать лишь кусочно-постоянные управления (впрочем этого можно добиться, приблизив (в топологии τ_*) в свою очередь каждое измеримое управление кусочно-постоянными), но главное – такой способ построения аппроксимирующей последовательности хоть и конструктивен, но очень сложен и мало применим на практике ([2, 3]). Достоинство же методов экстремального прицеливания — сравнительная простота построения и устойчивость к возможным вычислительным ошибкам.

3 Две экстремальные конструкции

Введем множество всех конечных разбиений отрезка I_0

$$\mathcal{S} \stackrel{\triangle}{=} \{(t_0,t_1,\ldots,t_{k-1},t_k = T) \in [t_0,T]^k \mid k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N},\ i \le k,\ t_{i-1} < t_i\}.$$

Любому разбиению $\Delta = \{t_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T\} \in \mathcal{S}$ сопоставим число $(diam)(\Delta) \stackrel{\triangle}{=} \max_{1\le i\le k}(t_i - t_{i-1})$ — мелкость этого разбиения.

Для произвольных разбиения $\Delta \in \mathcal{S}$, и абсолютно непрерывной функции $y(\cdot) \in C_m(I_0)$ введем множество аппроксимаций $(AIM)(y(\cdot),\Delta)$ всех пар вида $(u^*(\cdot),x(\cdot)) \in \mathcal{U}\times\Phi$, удовлетворяющих условиям:

1) $x(\cdot) \in \Phi(u^*)$;

2) для любого $i \in \mathbb{Z}$ такого, что $0 \le i \le k-1$, для любого $t \in [t_i, t_{i+1}[$ выполнено $u^*(t) = u^*(t_i)$;

3) для любого $i \in \mathbb{Z}$ такого, что $0 \le i \le k-1$, управление $u^*(t_i)$ удовлетворяет условию

$$(x(t_i) - y(t_i))' f(t, x(t_i), u^*(t_i)) = \min_{u\in P}(x(t_i) - y(t_i))' f(t, x(t_i), u). \qquad (6)$$

Пусть дано обобщенное управление $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ вместе с пучком обобщенных траекторий $\Phi(\mu)$, порожденных этим управлением. И пусть дано некоторое конечное разбиение $\Delta = \{t_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T\} \in \mathcal{S}$. Рассмотрим задачу приближения обобщенных траекторий из пучка $\Phi(\mu)$ при помощи траекторий, порожденных допустимыми програмными управлениями, постоянными на любом промежутке $[t_i, t_{i+1}[$ $(0 \le i \le k-1)$.

Для этого можно использовать две конструкции: прицеливание на некоторую траекторию из пучка (экстремальное прицеливание Н.Н.Красовского) или прицеливание на некоторое квазидвижение-фантом, зависящее от управления и уже реализовавшейся приближенной траектории движения.

Сначала опишем прицеливание на "квазидвижение". На промежутке $[t_0, t_1[$ выберем произвольное мгновенное управление $u_0^* \in P$ и для любого $t \in [t_0, t_1[$ установим $u^*(t) = u_0^*$, тогда на промежутке $[t_0, t_1]$ управляемая система движется по какой-либо траектории $x(\cdot)$ из пучка $\Phi(u^*)$. Фантом $z(\cdot)$ построим на этом промежутке по правилу:

$$z(t) \stackrel{\triangle}{=} x_0 + \int_{[t_0,t[\times P} f(\tau, x(t_0), u)\mu(d(\tau,u)).$$

Пусть построены управление $u^*(\cdot)$, движение $x(\cdot)$ и фантом $z(\cdot)$ вплоть до момента $t_i < T$; продолжим их до момента t_{i+1}.

В силу компактности множества P существует хотя бы одно мгновенное управление $u_i^* \in P$, удовлетворяющее условию

$$(x(t_i) - z(t_i))' f(t_i, x(t_i), u_i^*) = \min_{u\in P}(x(t_i) - z(t_i))' f(t_i, x(t_i), u); \qquad (7)$$

присвоим $u^*(t)$ равным u_i^* для любого $t \in [t_i, t_{i+1}[$, в качестве траектории системы на промежутке $]t_i, t_{i+1}]$ возьмем произвольную траекторию из пучка $\Phi(u^*)$ проходящую через точку $(t_i, x(t_i))$, такие есть в силу свойства **II)**. Фантом $z(\cdot)$ на промежутке $]t_i, t_{i+1}]$ продолжим равенством:

$$z(t) \stackrel{\triangle}{=} z(t_i) + \int_{[t_i, t[\times P} f(\tau, x(t_i), u)\mu(d(\tau, u)). \tag{8}$$

Таким образом, для любого конечного разбиения Δ на всем отрезке I_0 построено кусочно-постоянное программное управление $u^*(\cdot)$, некоторая порожденная им траектория $x(\cdot)$ и фантом $z(\cdot)$, соответствующий этой траектории.

Покажем, что так построенный фантом $z(\cdot)$ — квазидвижение. Для этого введем вспомогательную функцию $\bar{x}(\cdot) \in B_K(I_0)$: на каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}[$, $0 \le i \le k-1$, определим $\bar{x}(t) \stackrel{\triangle}{=} x(t_i)$, для полноты картины примем также $\bar{x}(T) = x(T)$. Теперь формулу (8) можно переписать следующим образом: для любого $t \in]t_i, t_{i+1}]$:

$$z(t) = z(t_i) + \int_{[t_i, t[\times P} f(\tau, \bar{x}(\tau), u)\mu(d(\tau, u)),$$

но тогда для любого $t \in I_0$

$$z(t) = x_0 + \int_{[t_0, t[\times P} f(\tau, \bar{x}(\tau), u)\mu(d(\tau, u)) = Q(\bar{x}, \mu)(t). \tag{9}$$

Заметим, что для каждого разбиения $\Delta \in \mathcal{S}$ такую конструкцию можно построить, и хотя выбор управления $u^*(\cdot)$, как и траектории $x(\cdot)$, вообще говоря неоднозначен, в любом случае так построенная пара $(u^*(\cdot), x(\cdot))$ будет принадлежать множеству $(AIM)(\Delta_i, z(\cdot))$, и при этом будет выполнено соотношение (9).

В [16] в качестве $z(\cdot)$ рассматривалось квазидвижение $Q(x, \mu)(\cdot)$, а управление u^* для любого момента времени выбиралось по правилу (7).

Опишем вкратце классическую схему Н.Н.Красовского, где прицеливание производится на приближаемую траекторию.

Пусть дана обобщенная траектория $\tilde{x}(\cdot) \in \tilde{\Phi}$ и задано некоторое конечное разбиение $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T\} \in \mathcal{S}$. В каждый момент времени $t_i \in \Delta$ система выбирает управление u_i^* по правилу

$$(x(t_i) - \tilde{x}(t_i))' f(t_i, x(t_i), u_i^*) = \min_{u \in P} (x(t_i) - \tilde{x}(t_i))' f(t_i, x(t_i), u); \tag{10}$$

и фиксирует его до t_{i+1}. В этом промежутке времени система продолжает движение по произвольной траектории из пучка, порожденного этим управлением. Все построенные этим методом пары $(u^*(\cdot), x(\cdot))$ при этом образуют множество $(AIM)(\Delta_i, \tilde{x}(\cdot))$.

4 Экстремальное свойство

Теорема 1 *Пусть для системы (1) выполнены условия* **I)**-**III)**. *Пусть даны произвольные последовательность разбиений* $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ *и аппроксимативная последовательность* $\{(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot), y_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{U} \times C_m(I_0) \times C_m(I_0))^{\mathbb{N}}$ *такие, что* $(diam)(\Delta_i) \to 0$ *и* $(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot)) \in (AIM)(\Delta_i, y_i(\cdot))$ *для любого* $i \in \mathbb{N}$. *Кроме того пусть последовательность* $\{y_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *сходится равномерно на* I_0 *к такой абсолютно непрерывной функции* $y(\cdot) \in C_m(I_0)$, *что* $\dot{y}(\cdot) \in B_m(I_0)$. *Тогда*

1) $\emptyset \neq (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \tilde{\Phi}$;

2) для любой обобщенной траектории $x(\cdot) \in (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}})$ *для почти всех* $t \in I_0$

$$(x(t) - y(t))'\dot{x}(t) = \min_{u\in P}(x(t) - y(t))'f(t, x(t), u).$$

<u>*Доказательство.*</u>

Первый пункт сразу следует из компактности $\tilde{\Phi}$, установленной в предложении 1. Для доказательства второго пункта приведем сначала несколько оценок.

Поскольку функция $f(t, x, u)$ непрерывна на компакте $I_0 \times K \times P$, можно ввести

$$M \stackrel{\triangle}{=} ||f(t, x, u)||_{C_m(I_0\times K\times P)} \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Теперь для любой обобщенной траектории $\tilde{x}(\cdot) \in \tilde{\Phi}$ и любых $t', t'' \in I_0$ имеет место:

$$||\tilde{x}(t') - \tilde{x}(t'')||_{C_m(I_0)} \leq M|t' - t''|.$$

Вместе с тем $f(t, x, u)$ равномерно непрерывна на компакте K, следовательно для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\omega(\varepsilon) > 0$, что для любых моментов времени $t', t'' \in I_0$ таких, что $|t' - t''| < \omega(\varepsilon)$, и для любой обобщенной траектории $\tilde{x}(\cdot) \in \tilde{\Phi}$ имеют место:

$$||f(t', \tilde{x}(t'), \cdot) - f(t'', \tilde{x}(t'), \cdot)||_{C_m(P)} < \varepsilon,$$

$$||f(t',\tilde{x}(t'),\cdot)-f(t'',\tilde{x}(t''),\cdot)||_{C_m(P)}<\varepsilon. \qquad (12)$$

Зафиксируем последовательности $\{(u_i^*(\cdot),x_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\Delta_i,y_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие условиям теоремы. Выберем произвольную траекторию $x(\cdot)$ из $(P-LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}})$. В силу компактности множества мгновенных управлений P для любого момента времени $t\in I_0$ существует такое мгновенное управление $u^*(t)\in P$, что

$$\min_{u\in P}(x(t)-y(t))'f(t,x(t),u)=(x(t)-y(t))'f(t,x(t),u^*(t)). \qquad (13)$$

Поскольку левая часть (13) измерима, в силу теоремы Кастэна-Рокафеллера [24], существует измеримая функция $u^*(\cdot)$ в каждой точке удовлетворяющая (13), таким образом можно считать, что $u^*(\cdot)\in B_P(I_0)$.

Введем функцию $G(\cdot)\in B(I_0)$ по правилу

$$G(t)\stackrel{\triangle}{=}(x(t)–y(t))'(\dot{x}–f(t,x(t),u^*(t))).$$

Поскольку $x(\cdot)\in\tilde{\Phi}$, то существует такое обобщенное управление $\mu\in\tilde{\mathcal{U}}$, что для почти всех $t\in I_0$ имеет место уравнение (3), а тогда $\dot{x}(\cdot)=F_\mu(\cdot,x(\cdot))$. при подстановке в $G(t)$ из (13), (4) для почти всех $t\in I_0$ имеем:

$$G(t)=(x(t)–y(t))'(F_\mu(t,x(t))–f(t,x(t),u^*(t)))\geq 0.$$

Заметим, что поскольку траектория $x(\cdot)$ уже зафиксирована, то из равномерной ограниченности функции $f(t,x,u)$ на компакте $I_0\times K\times P$ легко следует, что

$$\delta(r)\stackrel{\triangle}{=}\sup_{(t,x,u)\in I_0\times K\times P,|x-x(t)|\leq r}||f(t,x,u)-f(t,x(t),u)||_m\to 0, \qquad (14)$$

при $r\to 0$. Поскольку последовательность $\{y_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет равномерный предел, эти траектории равномерно ограничены. В свою очередь траектории $\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$ также ограничены, поскольку все лежат в компакте K. За пределы этого компакта, как предельная точка, тогда не выходит и $x(\cdot)$. Заметим также, что по условию теоремы функция $\dot{y}(\cdot)$ ограничена на I_0, а $\dot{x}(\cdot)$ ограничена на I_0, за счет (11),(3). Таким образом существует такое число $R\in\mathbb{R}$, что для любого $i\in\mathbb{N}$

$$||x_i(\cdot)-y_i(\cdot)||_{C_m(I_0)}<R,\ ||x(\cdot)-y(\cdot)||_{C_m(I_0)}<R,\ ||\dot{x}(\cdot)-\dot{y}(\cdot)||_{B_m(I_0)}<R. \qquad (15)$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon>0$. Тогда существует такое достаточно большое натуральное число n, что

$$||x_n(\cdot)-x(\cdot)||_{C_m(I_0)}<\varepsilon,\quad ||y_n(\cdot)-y(\cdot)||_{C_m(I_0)}<\varepsilon,\quad (diam)(\Delta_n)<\omega(\varepsilon). \qquad (16)$$

Зафиксируем это $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольный момент времени $t \in [t_0, T[$, тогда он принадлежит некоторому промежутку $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ разбиения Δ_n. Зафиксируем t и τ_i, для краткости обозначим: $\tau = \tau_i$, $s \stackrel{\triangle}{=} x_n(t) - y_n(t)$.

Оценим $G(t)$ сверху. Для этого разобьем его на несколько слагаемых:

$$
\begin{aligned}
(x(t)-y(t))'(\dot{x}-f(t,x(t),u^*(t))) &= (x(t)-y(t))'(\dot{x}-f(t,x_n(t),u_n(t))) \\
&+ (x(t)-x_n(t))'(f(t,x_n(t),u_n(t))-f(t,x(t),u^*(t))) \\
&+ (x_n(t)-y_n(t))'(f(t,x_n(t),u_n(t))-f(t,x(t),u^*(t))) \\
&+ (y_n(t)-y(t))'(f(t,x_n(t),u_n(t))-f(t,x(t),u^*(t))) \\
&= (x(t)-y(t))'(\dot{x}(t)-\dot{x}_n(t)) && (17) \\
&+ (x(t)-x_n(t))'(\dot{x}_n(t)-f(t,x(t),u^*(t))) && (18) \\
&+ (y_n(t)-y(t))'(\dot{x}_n(t)-f(t,x(t),u^*(t))) && (19) \\
&+ s'(f(t,x_n(t),u_n(t))-f(\tau,x_n(\tau),u_n(t))) && (20) \\
&+ s'(f(\tau,x_n(\tau),u_n(\tau))-f(\tau,x_n(\tau),u^*(t))) && (21) \\
&+ s'(f(\tau,x_n(\tau),u^*(t))-f(\tau,x(\tau),u^*(t))) && (22) \\
&+ s'(f(\tau,x(\tau),u^*(t))-f(t,x(t),u^*(t))) && (23)
\end{aligned}
$$

Слагаемое (17) пока оставим без изменений, оценки для слагаемых (18) и (19) легко следуют из (11); слагаемые (20) и (23) оценим через (12) и (16); слагаемое (21) не превосходит нуля за счет правила прицеливания (6); а слагаемое (22) можно оценить при помощи (14). Таким образом для почти всех $t \in I_0$

$$0 \le G(t) \le (x(t)-y(t))'(\dot{x}(t)-\dot{x}_n(t)) + 2M\varepsilon + 2M\varepsilon + ||s||_m\varepsilon + 0 + ||s||_m\delta(\varepsilon) + ||s||_m\varepsilon <$$
$$(x(t)-y(t))'(\dot{x}(t)-\dot{x}_n(t)) + 4M\varepsilon + R(2\varepsilon + \delta(\varepsilon)),$$

таким образом для некоторой функции $\Omega(\varepsilon)$ идущей к 0 при $\varepsilon \to 0$ для почти всех $t \in I_0$

$$0 \le G(t) \le (x(t) - y(t))'(\dot{x}(t) - \dot{x}_n(t)) + \Omega(\varepsilon). \tag{24}$$

Оценим интеграл по (17) на произвольном отрезке $I = [t_1, t_2] \subset I_0$, для чего воспользуемся интегрированием по частям.

$$\left|\left|\int_I (x(t)-y(t))'(\dot{x}(t)-\dot{x}_n(t))dt\right|\right|_m \le$$

$$\left|\left|(x(t)-y(t))'(x(t)-x_n(t))\ \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_I (\dot{x}(t)-\dot{y}(t))'(x(t)-x_n(t))dt\right|\right|_m \le$$

$$\Big|\big|(x(t)–y(t))'(x(t)–x_n(t))\ |_{t_1}^{t_2}\big|\big|_m + ||x(t)–x_n(t)||_m \int_I ||\dot{x}(t)–\dot{y}(t)||_m dt \leq$$

$$2\varepsilon||x(t)–y(t)||_{C_m(I_0)} + \varepsilon(t_2 - t_1)||\dot{x}(t)–\dot{y}(t)||_{B_m(I_0)},$$

и из (15) окончательно имеем:

$$\left|\left|\int_I (x(t)–y(t))'(\dot{x}(t)–\dot{x}_n(t))dt\right|\right|_m \leq R\varepsilon(2 + (t_2 - t_1)). \qquad (25)$$

Для произвольного борелевского множества $B \in \mathcal{I}_0$ введем

$$\nu(B) \stackrel{\triangle}{=} \int_B G(t)dt = \int_B (x(t) - y(t))'(\dot{x} - f(t, x(t), u^*(t)))dt.$$

В силу неотрицательности $G(t)$ эта функция множеств является мерой на борелевских множествах отрезка I_0, то есть $\nu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{I}_0]$. С другой стороны для произвольного отрезка $I = [t_1, t_2] \subset I_0$: из (24), (25) для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$0 \leq \nu(I) < \int_I (x(t)–y(t))'(\dot{x}(t)–\dot{x}_n(t)) + \Omega(\varepsilon)dt \leq (R\varepsilon(2+(t_2-t_1)) + \Omega(\varepsilon))(t_2-t_1)$$

Но $\Omega(\varepsilon)$ идет к нулю при $\varepsilon \to 0$, а следовательно для любого отрезка $[t_1, t_2] \subset I_0$ имеет место

$$\nu([t_1, t_2]) = 0.$$

Но тогда это выполнено и для произвольного интервала или полуинтервала $I \subset I_0$, то есть мера ν обращается в 0 на полуалгебре всех промежутков множества I_0, следовательно и на порожденной ею алгебре всех конечных сумм промежутков. По теореме о продолжении меры (см. [23, стр. 155]) существует единственное продолжение этой меры с алгебры на минимальную σ-алгебру ее содержащую, то есть в данном случае на борелевскую σ-алгебру $\mathcal{J}_0$. Но нулевая мера очевидно является продолжением ν с полуалгебры сразу на всю σ-алгебру $\mathcal{I}_0$, таким образом для любого борелевского множества $B \in \mathcal{I}_0$ имеет место $\nu(B) = 0$, то есть

$$\int_B (x(t)–y(t))'(\dot{x}(t)–f(t, x(t), u^*(t)))dt = 0.$$

Но в силу леммы об эквивалентности (см. [23, стр. 163]) это означает, что для почти всех $t \in I_0$ имеет место: $(x(t) - y(t))'(\dot{x}(t) - f(t, x(t), u^*(t))) = 0$. Подставляя сюда (13) окончательно получаем: для почти всех $t \in I_0$

$$(x(t)–y(t))'\dot{x}(t) = \min_{u \in P} (x(t) - y(t))' f(t, x(t), u),$$

что и требовалось доказать.

С помощью этой теоремы легко показать сходимость при измельчении разбиения траекторий, построенных при помощи прицеливания на фантом, к траекториям из пучка. В свою очередь для классической схемы удается показать, что предельная траектория будет удовлетворять экстремальному свойству (10) почти в каждый момент времени. Сходимость же класссической схемы в условиях **I)-III)** может не иметь места, это будет показано в следующем параграфе.

Следствие 1 *Пусть в системе (1) выполнены предположения* **I)-III)** *и даны какие-либо обобщенное управление* $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ *и такая последовательность разбиений* $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, *что* $(diam)(\Delta_i) \to 0$. *Тогда для любой такой аппроксимативной последовательности* $\{(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}}$, *что для любого* $i \in \mathbb{N}$ $(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot)) \in (ARM)(\Delta_i, z_i(\cdot))$, *где* $z_i(\cdot) = Q(\bar{x}_i, \mu)(\cdot)$, *имеет место:*

$$\emptyset \neq (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \tilde{\Phi}(\mu),$$

то есть из произвольной так построенной последовательности траекторий $\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$, *можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке* I_0 *к некоторой обобщенной траектории* $x(\cdot)$ *из пучка* $\tilde{\Phi}(\mu)$.

<u>*Доказательство.*</u> Из компактности $\tilde{\Phi}$ сразу следует, что множество предельных точек аппроксимирующей последовательности непусто, таким образом достаточно показать что $(P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \tilde{\Phi}(\mu)$. Зафиксируем обобщенное управление $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$. Рассмотрим произвольные последовательности $\{(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{z_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие условиям теоремы.

Для любого элемента $x(\cdot) \in (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}})$ существует такая монотонно возрастающая функция $i(k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ что

$$x_{i(k)}(\cdot) \rightrightarrows \tilde{x}(\cdot). \tag{26}$$

Заметим, что из равностепенной непрерывности траекторий $x_i(\cdot)$ и условия $(diam)(\Delta_i) \to 0$ следует, что $||x_i(\cdot) - \bar{x}_i(\cdot)||_{C_m(I_0)} \to 0$, но тогда и подпоследовательность $\{\bar{x}_{i(k)}(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится к $x(\cdot)$. В силу (9) имеем $z_{i(k)}(\cdot) = Q(\bar{x}_{i(k)}, \mu)(\cdot)$, но тогда из непрерывности отображения $(g, \mu) \mapsto Q(g, \mu)(\cdot)$ автоматически следует, что

$$z_{i(k)}(\cdot) \rightrightarrows Q(x, \mu)(\cdot). \tag{27}$$

Теперь заметим, что для любого $i \in \mathbb{N}$ пара $(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot))$ принадлежит множеству $(AIM)(\Delta_i, z_i(\cdot))$ Тогда по теореме 1 из (26),(27) для почти всех $t \in I_0$ имеет место:

$$(x(t) – Q(x,\mu))'\dot{x}(t) = \min_{u \in P} (x(t) - Q(x,\mu)(t))' f(t, x(t), u).$$

Введем функцию $W(\cdot) \in C(I_0)$ по правилу: $W(t) \stackrel{\triangle}{=} ||x(t) - Q(x,\mu)||_m^2 \geq 0$, тогда эта функция абсолютно непрерывна, и ее производную для почти всех $t \in I_0$ можно оценить следующим образом:

$$\dot{W}(t) = 2(x(t) – Q(x,\mu)(t))'(\dot{x}(t) - Q(\dot{x},\mu)(t)) =$$

$$\min_{u \in P} (x(t) - Q(x,\mu)(t))' f(t, x(t), u) - (x(t) - Q(x,\mu)(t))' \int_P f(t, x(t), \upsilon) \mu_t(d\upsilon) \leq 0.$$

Но тогда функция $W(\cdot)$ не возрастает, а поскольку $W(0) = 0$, для любого $t \in I_0$ имеем $W(t) = 0$. Таким образом $x(\cdot)$ является решением уравнения $x(\cdot) = Q(x(\cdot,\mu))$ на всем I_0, то есть произвольный элемент $x(\cdot) \in (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}})$ по свойству (5) является обобщенной траекторией из пучка $\tilde{\Phi}(\mu)$, что и требовалось доказать.

Следствие 2 *В условиях* **I)-III)** *на систему (1) для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$, для любой обобщенной траектории $\tilde{x}(\cdot) \in \tilde{\Phi}(\mu)$, для любых таких последовательностей $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ и $\{(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot))\}_{i \in \mathbb{N}}$, что $(diam)(\Delta_i) \to 0$ и $(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot)) \in (AIM)(\Delta_i, \tilde{x}(\cdot))$, для любого $i \in \mathbb{N}$ имеет место:*

1) $\emptyset \neq (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}}) \subset \tilde{\Phi}$;

2) для любой обобщенной траектории $x(\cdot) \in (P - LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}})$ для почти всех $t \in I_0$ имеет место:

$$(x(t) - \tilde{x}(t))'\dot{x}(t) = \min_{u \in P} (x(t) - \tilde{x}(t))' f(t, x(t), u). \tag{28}$$

Для доказательства достаточно в условии теоремы 1 положить $y_i(\cdot) = y(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$.

Заметим, что если выбранное управление доставляет min в (6) только с некоторой точностью, идущей к нулю при $(diam)(\Delta) \to 0$, то Теорема 1, а с ним и следствия 1,2, выполняются и для такого приближенного прицеливания.

Кроме того, если начальное положение (t_0, x_0) системы (1) определяется лишь с некоторой точностью, и не совпадает с начальным положением фантома и аппроксимируемой траектории, то в предположении, что эта погрешность стремится к нулю при $(diam)(\Delta) \to 0$, а условия **I)-III)** имеют место не только при начальной позиции (t_0, x_0), но и в некоторой ее окрестности, как теорема 1, так и ее следствия, также остается в силе.

5 Экстремальное прицеливание и единственность траекторий

Предположим, что помимо условий **I)-III)** на систему (1) выполнено также условие:

IV) (единственность) для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ пучок $\tilde{\Phi}(\mu)$ одноэлементен.

Теперь для любого обобщенного управления $\mu \in \mathcal{U}$ вместо соответствующего ему пучка $\tilde{\Phi}(\mu)$ естественно рассматривать единственный элемент этого пучка — траекторию $\tilde{\varphi}(\cdot, \mu) \in C_m(I_0)$.

При таком предположении на систему из доказанного ранее практически очевидно следует:

Предложение 3 *В условиях* **I) - IV)** *на управляемую систему (1) для любой кривой $g(\cdot) \in C_m(I_0)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) существует такая последовательность кусочно-постоянных управлений $\{u_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$, что траектории $\varphi(\cdot, u_i)$ равномерно на I_0 сходятся к $g(\cdot)$;

(2) существует такая последовательность обобщенных управлений $\{\mu_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$, что обобщенные траектории $\tilde{\varphi}(\cdot, \mu_i)$ сходятся поточечно к $g(\cdot)$ на I_0;

(3) $g(\cdot) \in \tilde{\Phi}$, то есть $g(\cdot)$ — обобщенная траектория.

Доказательство.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $g(\cdot) = \tilde{\varphi}(\cdot, \mu) \in \Phi$. Каждому $k \in \mathbb{N}$ сопоставим разбиение $\Delta_k = \{t_i = t_0 + i(T - t_0)/k \mid i \in \mathbb{Z},\ 0 \le i \le k\} \in \mathcal{S}$ и некоторую аппроксимативную тройку $(u_k^*(\cdot), x_k(\cdot))$ из множества $(AIM)(\Delta_k, z_k(\cdot)) \neq \emptyset$. Поскольку $(diam)(\Delta_k) = 1/k \to 0$, по следствию 1 траектории $x_k(\cdot) = \varphi(\cdot, u_k)$ равномерно на I_0 сходятся к $g(\cdot) = \tilde{\varphi}(\cdot, \mu)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Для доказательства достаточно заметить, что любому программному управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ можно сопоставить такое обобщенное управ-

ление $\triangle_{u(\cdot)} \in \tilde{\mathcal{U}}$, что $\tilde{\varphi}(\cdot, \triangle_{u(\cdot)}) = \varphi(\cdot, u(\cdot))$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть обобщенные траектории $\tilde{\varphi}(\cdot, \mu_i)$ сходятся поточечно к $g(\cdot)$ на I_0, поскольку множество $\tilde{\Phi}$ компактно в равномерной метрике, из последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно, а следовательно и поточечно к какому-либо элементу из $\tilde{\Phi}$, следовательно предельная кривая $g(\cdot)$ из $\tilde{\Phi}$.

Заметим, что условие (2) предложения 3 можно еще больше ослабить, а именно вместо сходящейся поточечно последовательности обобщенных траекторий взять обобщенную последовательность (ультрафильтр) (см., например, [29]) обобщенных траекторий, сходящуюся в какой-либо хаусдорфовой топологии пространства $C_m(I_0)$, более слабой чем топология равномерной сходимости.

Покажем, что без требования единственности эта теорема неверна, то есть в случае неединственной траектории в пучке не всякую траекторию можно аппроксимировать при помощи траекторий, порожденных допустимыми управлениями. Для этого рассмотрим следующую управляемую систему (см. [30]):

<u>Пример 1.</u>

$$\dot{x_1} = u,\ \dot{x_2} = \sqrt{x_2} + x_1^2,\ (x_1, x_2)(0) = (0, 0),$$

$$t \in I_0 \stackrel{\triangle}{=} [0, 1],\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0, u \in P = \{-1, 1\}.$$

В этой системе для любого допустимого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и для любой траектории $(x_1, x_2)(\cdot) \in \Phi$, порожденной каким-либо допустимым управлением, для любого $t \in I_0$ имеет место $|x_2(t)| \geq t^2/4$. Но тогда и все аппроксимируемые ими кривые должны обладать этим свойством. Однако для обобщенного управления $u(\cdot) = 0$ существует решение $(x_1, x_2)(\cdot) = (0, 0)$. Таким образом эту обобщенную траекторию нельзя приблизить допустимыми траекториями, то есть импликация (3) $\Rightarrow$ (1) предложения 3 не имеет места.

Итак в условиях **I)-III)** на систему (1) некоторые обобщенные траектории $x(\cdot) \in \tilde{\Phi}(\mu)$ не могут даже поточечно быть приближены при помощи последовательности траекторий, порожденных какими-либо допустимыми управлениями.

Но если (как следует из следствия 1) схема с фантомом гарантирует приближение к пучку $\tilde{\Phi}(\mu)$ даже в случае неединственности обобщенных траекторий, то для классической схемы это не имеет места. Покажем это, несколько модифицировав пример 1.

Пример 2.

$$\dot{x_1} = u_1,\ \dot{x_2} = (1 - u_2/2)\sqrt{x_2} + x_1^2,\ (x_1, x_2)(0) = (0, 0),$$

$$t \in I_0 \overset{\triangle}{=} [0, 1],\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0,\ (u_1, u_2) \in P = \{-1, 1\} \times [-1, 1].$$

Пусть стоит задача нацеливания на пучок траекторий, порожденных нулевым управлением $u(\cdot) = (u_1, u_2)(\cdot) = (0, 0)$. В качестве траектории, на которую будет прицеливаться классическая схема, возьмем порожденную этим обобщенным управлением траекторию

$$\tilde{x}(\cdot) = \begin{cases} (0, 0), & t \in [0, 1/2] \\ (0, (t - 1/2)^2/4), & t \in]1/2, 1] \end{cases} \in \tilde{\Phi}(0).$$

Пусть для некоторой последовательности разбиений, мелкость которых идет к нулю, какая-либо построенная по классической схеме последовательность траекторий сходится к некоторой траектории $x(\cdot)$.

Подобно примеру 1 в этой системе для любого допустимого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и для любой траектории $(y_1, y_2)(\cdot) \in \Phi$, порожденной каким-либо допустимым управлением, для любого $t \in I_0$ имеет место $y_2(t) \geq t^2/16$. Тогда это же имеет место и для предельной траектории $x(\cdot)$. С другой стороны по теореме 1 эта траектория для почти всех $t \in I_0$ при выполнении условия $x_2(t) \geq \tilde{x}_2(t)$ должна удовлетворять уравнению:

$$\dot{x_1}x_1 + \dot{x_2}x_2 = \min_{(u_1, u_2) \in P} u_1 x_1 + ((1 - u_2/2)\sqrt{x_2} + x_1^2)x_2,$$

откуда $x_1\dot{x_1} = -|\,x_1|,\ \dot{x_2} = \sqrt{x_2}/2 + x_1^2$, или, что тоже самое,

$$\dot{x_1} = 0,\ \dot{x_2} = \sqrt{x_2}/2,$$

Но любая допустимая траектория удовлетворяет условию $x_2(t) \geq t^2/16$, следовательно $(x_1, x_2)(t) = (0, t^2/16)$ для всех $t \in I_0$ пока выполняется условие $x_2(t) \geq \tilde{x}_2(t)$. Несложно проверить, что $t^2/16 \geq \tilde{x}_2(t)$ для любого $t \in I_0$. Таким образом единственной возможной предельной траекторией является траектория, равная $(x_1, x_2)(t) = (0, t^2/16)$ для всех $t \in I_0$. Но эта траектория не принадлежит пучку $\tilde{\Phi}(0)$. Таким образом выполнение условий **I)-III)** на управляемую систему не гарантирует приближения траекторий, порожденных классической схемой, к заданному пучку $\tilde{\Phi}(\tilde{\mu})$, если нацеливание производилось на произвольную траекторию $\tilde{x}(\cdot)$ этого пучка. Но траектория

$\tilde{x}(\cdot)$ может порождаться несколькими обобщенными управлениями, и быть может схема обязана сходиться хоть к какому-либо из этих пучков. Однако, как показывает пример 2 пучок $\tilde{\Phi}(\mu)$, соответствующий предельной точке $x(\cdot)$ не только не совпадает с заданным заранее пучком $\tilde{\Phi}(\tilde{\mu})$, но даже не содержит нацеливаемую траекторию, то есть $\tilde{x}(\cdot) \notin \tilde{\Phi}(\mu)$.

Отметим, что в классической схеме прицеливание производится на траекторию, и о собственно пучке, как и о управлении его порождающем, схема фактически "не знает". В схеме же с фантомом прицеливание производится на квазидвижение, которое напрямую зависит от обобщенного управления, таким образом схема "не знает"ничего уже о конкретных траекториях пучка, и прицеливается на весь пучок сразу. Эти соображения наводят на мысль, что классическая схема применима, быть может, лишь при дополнительном предположении **IV)**, то есть в предположении об единственности траектории, соответствующей данному обобщенному управлению.

Среди условий, гарантирующих единственность, самым простым, пожалуй, является липшицевость правой части системы (1). При этом предположении в [7, с.57-61] показана сходимость классической схемы к прицеливаемой траектории.

Одними из самых общих критериев единственности являются критерии, использующие некоторые аналоги функции Ляпунова. Покажем, что если зависимость функции Ляпунова от позиций $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ сводится к расстоянию между ними, то имеет место сходимость классического метода.

Теорема 2 *Пусть в системе (1) выполнены условия* **I)-III)**, *а кроме того* **1).** *Пусть для некоторого $R' > 0$ существует такая функция $\omega(\cdot,\cdot) \in C(I_0 \times [0, R']), \omega(\cdot, 0) \equiv 0$, что для любого $\vartheta \in]t_0, T]$, единственным на $[t_0, \vartheta]$ решением задачи Коши*

$$\dot{r} = \omega(t, r),\ r(t_0) = 0$$

является функция $r(t) \equiv 0$.

2). *Пусть также для некоторого $D > 0$ существует функция $V(\cdot,\cdot) \in C(I_0 \times [0, D])$ такая, что 1) $V(t, s) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = t_0$ или $s = 0$ 2) $V(t, s)$ дифференцируема справа по t и дифференцируема по s во всей области определения, 3) правая производная $V_s(t, s)$ неотрицательна на всей области определения.*

3). *Пусть для некоторого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ траектория $\tilde{\varphi}(\cdot)$ принадлежит пучку $\tilde{\Phi}(\mu)$, и для любой обобщенной траектории $x(\cdot) \in$*

$\tilde{\Phi}$, *для почти всех таких* $t \in I_0$, *что* $l = ||x(t) - \tilde{x}(t)||_m^2 < D$, *имеет место*

$$V_t(t,l) + 2V_s(t,l)(x(t) - \tilde{x}(t))'(F_\mu(t,x(t)) - F_\mu(t,\tilde{x}(t))) \leq \omega(t, V(t,l)). \quad (29)$$

Тогда

1) обобщенная траектория $\tilde{x}(\cdot)$ *является единственной траекторией, принадлежащей пучку* $\tilde{\Phi}(\mu)$;

2) метод классического экстремального прицеливания для траектории $\tilde{x}(\cdot)$ *сходится, то есть для любой такой последовательности разбиений* $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, *что* $(diam)(\Delta_i) \to 0$, *для любой такой аппроксимативной последовательности* $\{(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}}$, *что* $(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot)) \in (AIM)(\Delta_i, \tilde{x}(\cdot))$ *для любого* $i \in \mathbb{N}$, *имеет место:*

$$\lim_{i\to\infty} ||x_i(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)||_{C_m(I_0)} = 0.$$

Доказательство. Единственность обобщенной траектории $\tilde{x}(\cdot)$ доказана при более общих условиях на функцию V в [28, Theorem 3.19.1].

Фактически тот же метод доказательства будет использован для доказательства сходимости классической конструкции. Зафиксируем какие-либо обобщенное управление $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ и траекторию $\tilde{x}(\cdot) \in \tilde{\Phi}(\mu)$. Возьмем произвольные последовательность разбиений $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ и аппроксимативную последовательность $\{(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}}$, такие, что $(diam)(\Delta_i) \to 0$ и $(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot)) \in (AIM)(\Delta_i, \tilde{x}(\cdot))$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Зафиксируем какую-либо обобщенную траекторию $x(\cdot)$ из непустого множества $(P-LIM)(\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}})$ всех частичных пределов последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}}$. По следствию 2 для обобщенной траектории $x(\cdot)$ имеет место (28), а тогда в силу (4) для почти всех $t \in I_0$ имеем:

$$(x(t)-\tilde{x}(t))'\dot{x}(t) = \min_{u\in P}(x(t)-\tilde{x}(t))'f(t,x(t),u) \leq (x(t)-\tilde{x}(t))'F_\mu(t,x(t)). \quad (30)$$

Лемма 1 *Пусть для некоторого* $R' > 0$ *функция* $\omega \in C(I_0 \times [0,R'])$ *удовлетворяет условию* **1).** *теоремы 2.*

Пусть также абсолютно непрерывная скалярная функция $W(\cdot) \in C(I_0)$ *такова, что* $W(0) \leq 0$, *и для почти всех таких* $t \in I_0$, *что* $W(t) \leq R'$, *имеет место* $\dot{W}(t) \leq \omega(t, W(t))$. *Тогда* $W(t) \leq 0$ *для любого* $t \in I_0$

Доказательство смотрите, например, в [28, Theorem 1.4.1].

Введем расхождение $l(\cdot) \in C(I_0)$ по правилу $l(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} ||x(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)||^2_m$. Тогда в силу абсолютной непрерывности функции $l(\cdot)$ и (30)

$$\dot{l}(t) = 2(x(t) - \tilde{x}(t))'(\dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t)) =$$

$$2(x(t) - \tilde{x}(t))'(\dot{x}(t) - F_\mu(t, x(t))) + 2(x(t) - \tilde{x}(t))'(F_\mu(t, x(t)) - F_\mu(t, \tilde{x}(t))) \leq$$
$$\leq 2(x(t) - \tilde{x}(t))'(F_\mu(t, x(t)) - F_\mu(t, \tilde{x}(t))) \qquad (31)$$

Пусть вплоть до какого-либо момента времени $\vartheta \in]t_0, T]$, на всем промежутке $[t_0, \vartheta]$ имеет место $l(\cdot) \leq D$. Введем функцию $W(\cdot) \in C_m([t_0, \vartheta])$ по правилу: для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ $W(t) \stackrel{\triangle}{=} V(t, l(t))$ Тогда в силу абсолютной непрерывности $l(\cdot)$ функция $W(\cdot)$ окажется дифференцируемой справа по t и при этом $\dot{W}(t) = V_t(t, l(t)) + V_s(t, l(t))\dot{l}(t)$, но поскольку $V_s(t, s)$ неотрицательна на всей области определения, в силу (31) и (29) для почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ имеем:

$$\dot{W}(t) \leq V_t(t, l) + 2V_s(t, l)(x(t) - \tilde{x}(t))'(F_\mu(t, x(t)) - F_\mu(t, \tilde{x}(t))) \leq \omega(t, V(t, l(t)))$$

Отсюда по лемме $W(\cdot)$ не превосходит нуля на произвольном промежутке $[t_0, \vartheta] \subset I_0$, на котором выполнено $l(\cdot) < D$. Но функция $l(\cdot)$ непрерывна на I_0, а в начальный момент времени равна 0. Следовательно $V(t, l(t)) = W(t) = 0$ для любого $t \in I_0$, но тогда по свойству 1) функции V расхождение $l(t)$ равно нулю для любого $t \in]t_0, T[$, то есть произвольная предельная траектория $x(\cdot)$ совпадает с прицеливаемой траекторией $\tilde{x}(\cdot)$ на всем I_0, что и требовалось доказать.

Следствие 3 *Пусть в системе (1) выполнены условия* **I)-III)***, а также выполнены условия* **1)., 2).** *теоремы 2. Кроме того для любых таких* $t \in I_0, x_1, x_2 \in K, u \in P$, *что* $l = ||x_1 - x_2||^2_m \leq D$, *имеет место*

$$V_t(t, l) + 2V_s(t, l)(x_1 - x_2)'(f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)) \leq \omega(t, V(t, l)). \qquad (32)$$

Тогда

1) выполнено условие **IV)***, то есть для любого обобщенного управления* $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$ *существует единственная траектория* $\tilde{\varphi}(\cdot)$ *принадлежащая пучку* $\tilde{\Phi}(\mu)$;

2) метод классического экстремального прицеливания сходится, а именно для любого обобщенного управления $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$, *для любой такой последовательности разбиений* $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, *что* $(diam)(\Delta_i) \to 0$, *для любой* *аппроксимативной последовательности* $\{(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}}$, *такой, что для любого* $i \in \mathbb{N}$ $(u_i^*(\cdot), x_i(\cdot)) \in (AIM)(\Delta_i, \tilde{\varphi}(\cdot))$, *имеет место:*

$$\lim_{i\to\infty} ||x_i(\cdot) - \tilde{\varphi}(\cdot)||_{C_m(I_0)} = 0.$$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что из (4) и (32) следует выполнение условия (29) для произвольных обобщенного управления и соответствующей ему траектории.

Следствие 4 *Пусть в системе (1) выполнены условия* **I)-III)**, *а также для некоторого* $R' > 0$ *функция* $\omega \in C(I_0 \times [0, R'])$ *удовлетворяет условию* **1).** *теоремы 2. Кроме того для любых таких* $t \in I_0, x_1, x_2 \in K, u \in P$, *что* $||x_1 - x_2||_m^2 \le R'$, *имеет место*

$$(x_1 - x_2)'(f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)) \le \omega(t, ||x_1 - x_2||_m^2). \tag{33}$$

Тогда верно заключение следствия 3.

Условие (33) выполнено, например, если имеет место такой общий критерий единственности, как критерий Камке, частными случаями которого являются критерии Осгуда, Нагумо, Скорца-Драгони (см., например [31],[32]). Тем более условия следствия 4 будут выполнены, если правая часть системы (1) удовлетворяет условию Липшица и условию подлинейного роста (достаточно взять $\omega(t,r) = L(t)r$, где $L(t)$ – суммируемая функция из условия Липшица). Таким образом следствие 4, тем более теорема 2, обобщают результаты, полученные в [7].

Пример 3. Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\dot{x}(t) = u(t) + m(t, x), x(0) = 0, t \in [0, 1], x \in \mathbb{R}, u \in \{-1, 1\} \tag{34}$$

где

$$m(t,x) = \begin{cases} 0, & t = 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ 2t, & t \in]0,1], \ x \le 0 \\ 2t - 4x/t, & t \in]0,1], \ x \in]0, t^2] \\ -2t, & t \in]0,1], \ x > t^2 \end{cases} \in C([0,1] \times \mathbb{R}).$$

Впервые задачу Коши $\dot{x}(t) = m(t, x), x(0) = 0$ рассмотрел Миллер как пример дифференциального уравнения, для которого метод последовательных итераций Пикара-Линделефа

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} m(t, x_n(\tau))d\tau$$

не сходится к решению задачи Коши ($x(t) = t^2$). Однако, несмотря на такую экзотичность, для любого допустимого управления правая часть удовлетворяет условиям Каратеодори и условию подлинейного роста, а потому управляемая система (34) удовлетворяет условиям **I)-III)**. Кроме того для $\omega(t, r) = 0$ эта система удовлетворяет следствию 4, а следовательно в этой управляемой системе имеет место не только единственность траекторий, но и сходимость классического метода прицеливания.

Литература

[1] Понтрягин Л.С. Болтянский В.Г. Гамкрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

[2] Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1977.

[3] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

[4] Субботин А.И. Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1977.

[5] Гамкрелидзе Р.В. Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач. // Труды МИРАН СССР, т.211, М.: Наука, 1971, с.152-180

[6] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, т.169, М.: Наука, 1985, с.194–252.

[7] Красовский Н.Н. Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[8] Красовский Н.Н. Игровые задачи динамики, I // Изв. АН СССР(Техническая кибернетика), 1969, 5, с.3-13.

[9] Красовский Н.Н. Игровые задачи динамики, II // Изв. АН СССР(Техническая кибернетика), 1970, 1, с.3-12.

[10] Красовский Н.Н. Управление динамической системой: задача о минимуме гарантированного результата. М. Наука, 1985, 518 с.

[11] Красовский Н.Н. Альтернатива для игровой задачи сближения. // Прикладная математика и механика, 1970, т.34, 6,

[12] Красовский Н.Н. Программные конструкции для позиционных игр. ДАН СССР т.211 №6

[13] Красовский Н.Н. Экстремальное управление в нелинейной дифференциальной игре. // Прикладная математика и механика, 1972, т.36, 6

[14] Красовский Н.Н. Минимаксное прицеливание в дифференциальной игре. // в сборнике "Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх", 1973, с.121-137.

[15] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Аппроксимация в дифференциальной игре. // Прикладная математика и механика. 1973, т.37, 2, с.

[16] Кряжимский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения. // Доклады АН СССР, 1978, т.239, №4, с. 779-782.

[17] Кряжимский А.В., Ченцов А.Г. О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения. Свердловск. 1979.(Рукоп. деп. в ВИНИТИ;№1729-80 Деп.)

[18] Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problem of ordinary differential equations: dynamical solutions. London. Gordon and Breach. 1995.

[19] Кряжимский А.В. Об условиях устойчивой неупреждающей аппроксимации движения. // Труды МИАН СССР, т.211 - М:Наука, 1995, с. 243-256.

[20] Осипов Ю.С., Кряжимский А.В. О наилучшем приближении оператора дифференцирования в класее неупреждающих операторов. // Математические заметки, 1985, т.37, вып.2, с.192-199

[21] Пашаев А.Б., Ченцов А.Г. Обобщенная задача управления в классе конечно-аддитивных мер.// Кибернетика, 1986, №2, с.110-112.

[22] Хлопин Д.В. Об одном из способов экстремального прицеливания для систем с непрерывной правой частью.// Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления", 2001, №3, с.46-60

[23] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 855 с.

[24] Аркин В.И., Левин В.Л. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи матем. наук, т.XXVII, 1972, вып. 3 (165)

[25] Chentsov A.G., Pak V.E. On the extension of the nonlinear problem of optimal control with nonstationary phase restrictions // Nonlinear analysis, 1996, 26, №2, p.383-394.

[26] Филиппов В.В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.

[27] Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск, Наука, 1986, 295 с.

[28] Lacshmikantham V., Leela S. Differential and integral inequalities. Theory and applications. Volume 1, Academic Press, 1969.

[29] Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.

[30] Plis A. Trajectories and quasitrajectories of an orientor field. // Bulletin de l'Academie polonaise des sciences, 1963, XI, №6 p.369-370

[31] Перов А.Н. Об интегральных неравенствах // В сборнике "Труды семинара по функциональному анализу, выпуск 5", Воронеж, 1957, с.86-97.

[32] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Мир, 1970.