*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦ ФРОБЕНИУСА

И.Е.ЗУБЕР

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2,
Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: zuber@EZ7332.spb.edu

Аннотация.

В статье рассмотрены четыре варианта матрицы Фробениуса, их взаимосвязи, спектральные свойства и рекуррентные соотношения, связывающие левые собственные векторы матриц Фробениуса разных порядков.

1 Введение

Всплеск интереса к матрицам Фробениуса обусловлен тем, что разработаны преобразования подобия для нелинейных и нестационарных систем управления, обеспечивающие матрице объекта форму Фробениуса [1], или и матрице объекта и матрице замкнутой системы форму Фробениуса [2, 3]. Поэтому представляется целесообразным собрать в одной заметке свойства матриц Фробениуса и явный вид ее левых и правых собственных векторов.

[0]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 02-01-00542.

2 Постановка задачи и основные результаты

Введем обозначения:

$$\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_1 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$\overline{P}(\beta_n, \ldots, \beta_1) = \begin{vmatrix} -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \ldots & -\beta_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$\underline{P}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \underline{F}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{3}$$

$$\overline{F}(\beta_n, \ldots, \beta_1) = \overline{P}^*(\beta_n, \ldots, \beta_1). \tag{4}$$

Матрицы $\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\underline{P}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называются сопровождающими к многочлену

$$f_1(\lambda) = \lambda^n + \alpha_n \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1,$$

матрицы $\overline{F}(\beta_n, \ldots, \beta_1)$, $\overline{P}(\beta_n, \ldots, \beta_1)$ суть сопровождающие к многочлену

$$f_2(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \ldots\ + \beta_n.$$

При $\beta_j = \alpha_{n-j-1},\ j = \overline{1, n}$, матрицы (1)–(4) подобны. Матрицы $\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\underline{P}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ связаны преобразованием подобия с матрицей [4]

$$T_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{n-1} & & \ldots & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix},$$

матрицы $\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{F}(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ связаны преобразованием подобия с матрицей [4]

$$T_1 = \begin{vmatrix} 0 & & \ldots & & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & \ldots & & 0 \end{vmatrix}.$$

При этом справедливы следующие два утверждения:

Лемма 1 *Матрица, обратная* $\underline{F}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, *имеет вид* $\overline{F}(\beta_n,\ldots,\beta_1)$ *при* $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i+1}{\alpha_n}$, $i=\overline{1,n-1}$, $\beta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$.

Лемма 2 k*-я степень матрицы* $\underline{F}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *имеет вид*

$$\underline{F}^{\,k} = \left|\begin{array}{ccc} 0 & \ldots\ 0 & \\ \vdots & & I_k \\ 0 & \ldots\ 0 & \\ -\alpha_n & \ldots & -\alpha_1 \\ & R(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) & \end{array}\right|,$$

где $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *есть матрица порядка* $(n-k-1)\times n$, *элементы которой суть полиномы от* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, I_k *— единичная* $k\times k$*-матрица. (Элементы* $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *можно задать очень громоздкими рекуррентными соотношениями.)*

Доказательство обеих лемм проводится методом математической индукции.

Введем в рассмотрение элементарные симметрические функции $S_i^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$\begin{array}{l} S_0^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv 1, \\ S_1^n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1+x_2+\ldots+x_n, \\ S_2^n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n, \\ \vdots \\ S_n^n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1x_2\ldots x_n, \end{array} \tag{5}$$

т.е. $S_k^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ есть сумма всех $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ произведений, каждое из которых содержит k сомножителей с несовпадающими индексами. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – собственные числа матрицы $\underline{F}$. Тогда, очевидно,

$$\alpha_i = (-1)^{n-i}S^n_{n-i+1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \quad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Обратимся к спектральным свойствам матрицы Фробениуса $\underline{F}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Пусть собственные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ удовлетворяют условию

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{при} \quad i\neq j. \tag{7}$$

Тогда спектральное разложение [4] матрицы $\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ имеет вид

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i g_i^*,$$

где d_i, g_i — соответственно правые и левые собственные векторы матрицы $\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Известно [5], что векторы d_i задаются соотношениями

$$d_i = (1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-1})^*, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Перейдем к определению вида векторов g_i, $\overline{1, n}$. Пусть $C = \|d_1, \ldots, d_n\|$, тогда [5]

$$C^{-1^*} = G = \|g_1, \ldots, g_n\|.$$

Таким образом компоненты вектора $g_i = (g_i^1, \ldots, g_i^n)^*$ задаются минорами матрицы Вандермонда C.

Обозначим

$$\underset{n}{\Delta}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det C. \tag{9}$$

Обозначим $\underset{n-m}{\Delta}{}^{i_1, \ldots, i_m}_{j_1, \ldots, j_m}$ определитель, получаемый из $\underset{n}{\Delta}$ при вычеркивании строк с номерами $i_1, \ldots, i_m$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_m$; i_k, j_k $(k = \overline{1, m})$ — наборы чисел из $\overline{1, n}$. Тогда имеем

$$g_j^k = \underset{n-1}{\Delta}{}^{j}_{k} \;/\; \underset{n}{\Delta}\,.$$

Для раскрытия определителя $\underset{n-1}{\Delta}{}^{j}_{k}$, $k > 1$, разлагаем определитель по элементам первой строки, выносим общие по столбцам множители и получаем

$$g_j^k = -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \prod_{k \neq j} \lambda_k \; \underset{n-2}{\Delta}{}^{1,\, k-1}_{j,\, i} \;/\; \underset{n}{\Delta}\,.$$

Повторяя описанную процедуру с определителем $\underset{n-2}{\Delta}{}^{1,\, k-1}_{j,\, i}$, получим в результате

$$g_j^k = \frac{(-1)^{k+1} S_{n-k}^{\,n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{i=1,\, i \neq j}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

Для $k = 1$ получаем формулу

$$g_j^1 = \frac{\prod\limits_{i \neq j} \lambda_i}{\prod\limits_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{S_{n-1}^{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

Введем в рассмотрение векторы

$$r_j = \prod_{k=1,\, k\neq j}^{n} (\lambda_k - \lambda_j) \cdot g_j. \tag{10}$$

Векторы $r_j,\ j = \overline{1,n}$, также являются левыми собственными векторами матрицы $\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i,\ i = \overline{1,n}$, заданы (6).

Итак, получены окончательные выражения для левых собственных векторов матрицы $\underline{F}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$r_j^k = (-1)^{k+1} S_{n-k}^{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n), \quad j,k = \overline{1,n} \tag{11}$$

или $r_j = \big(S_{n-1}^{n-1}(\lambda_k \neq \lambda_j), -S_{n-2}^{n-1}(\lambda_k \neq \lambda_j), \ldots, (-1)^{n-1} S_0^{n-1}\big)^*$, где $S_0^{n-1} \equiv 1$.

Отметим некоторые свойства векторов $r_j,\ j = \overline{1,n}$, непосредственно следующие из формул (11).

1. Вектор r_j не зависит от λ_j.

2. Введем в рассмотрение вектор

$$r_{j\,i} = \big(S_{n-2}^{n-2}(\lambda_k \neq \lambda_j,\ \lambda_k \neq \lambda_i), -S_{n-3}^{n-2}(\lambda_k \neq \lambda_j,\ \lambda_k \neq \lambda_i), \ldots, (-1)^{n-1}, 0\big)^*. \tag{12}$$

Тогда справедливо соотношение

$$r_j - r_i = (\lambda_i - \lambda_j) r_{j\,i}. \tag{13}$$

Последнее соотношение задает связь между левыми собственными векторами матриц, сопровождающих многочлены

$$f_1 = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k) \quad \text{и} \quad f_2 = \prod_{k\neq j}^{n-1} (\lambda - \lambda_k) \quad \text{или} \quad f_3 = \prod_{k\neq i}^{n-1} (\lambda - \lambda_k).$$

Формула (13) является рекуррентным соотношением для левых собственных векторов матрицы Фробениуса $\underline{F}$ (или правых собственных векторов для матрицы Фробениуса $\underline{P}$).

Из формулы (13) следует справедливость следующего утверждения:

Лемма 3 *Для любых* $1 \le i, j \le n$ *справедливы соотношения*

$$r_{i,j} = r_{i,j+k} + (\lambda_k - \lambda_j) r_{i,j,j+k}, \tag{14}$$

$$r_{i,j} = r_{i+k,j} + (\lambda_k - \lambda_i) r_{i,j,i+k}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь взаимозависимость левых собственных векторов r_j матрицы $\underline{F}$. Положим $\delta_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ и введем в рассмотрение векторы

$$r_{j_1,\ldots,j_m} = \big(S^{n-m}_{n-m}(\lambda_k \ne \lambda_{j_p}), -S^{n-m}_{n-m-1}(\lambda_k \ne \lambda_{j_p}), \ldots, (-1)^{n-m+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m}\big)^*,$$
$$p = \overline{1, m}. \tag{16}$$

Тогда, очевидно, $r_{j_1,\ldots,j_n} = ((-1)^{n-1}, 0, \ldots, 0)^*$. Рассмотрим с учетом соотношений (13)–(16)

$$r_1 = r_2 + \delta_1 r_{1,2} = r_2 + \delta_1 (r_{1,3} + \delta_2 r_{1,2,3}) = r_2 + \delta_1 \Big(\frac{r_1 - r_3}{\delta_1 + \delta_2} + \delta_2 r_{1,2,3}\Big) = \ldots$$

В результате получаем соотношение вида

$$\prod_{i=1}^{n-1} \delta_i r_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) r_i,$$

где $c_i(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$ — дробно-рациональные функции от $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$. Последнее выражение значительно упрощается, если положить

$$\delta_i = \delta, \quad \text{т.е.} \quad \lambda_i = \lambda + (i-1)\delta, \quad \lambda = \lambda_1. \tag{17}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 4 *Левые собственные векторы матрицы* $\underline{F}$ *в предположении (17) удовлетворяют соотношению*

$$r_1 - (n-1) r_2 + (n-1) r_3 + \ldots + (-1)^{n-2} r_{n-1} + (-1)^{n-1} r_n =$$
$$= (n-1)!((-1)^1,\ 0 \ldots 0)^* \delta^{n-1}. \tag{18}$$

Доказательство этого утверждения проводится методом индукции.

3 Заключение

Леммы 1–4 описывают свойства матриц Фробениуса, которые оказываются полезными при решении задач синтеза многомерных нелинейных и нестационарных систем управления.

Отметим, что матрица Фробениуса полностью задается своим спектром. Поэтому, если нелинейная нестационарная система после преобразований подобия имеет матрицу в форме Фробениуса, спектр которой может быть задан априорно из учета требуемых свойств, то задача синтеза нелинейной нестационарной системы сводится к аналогичной задаче синтеза для линейной стационарной системы.

Соотношения (14), (15) позволяют перейти к рассмотрению систем меньшего порядка, соотношения (18) позволили решать задачу терминального управления для нелинейных систем [6] как задачу модального управления.

Литература

[1] Isidory A. Nonlinear control. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, London, Paris, 1989.

[2] Зубер И.Е. Спектральная стабилизация динамических систем // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2000, С.15-22.

[3] Зубер И.Е. Спектральная стабилизация нелинейных систем на базе специального преобразования подобия // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2001, вып. 2 (8), С.8-15.

[4] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем. М.: МГУ, 1998.

[5] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

[6] Зубер И.Е. Терминальное управление в нелинейных системах // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2002 (в печати).