

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2002

Электронный журнал,
рег. № П23275 от 07.03.97

<http://www.neva.ru/journal>
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Численные методы

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОВ И ОРГАНИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ю.Г.Исполов

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
Санкт-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Механики и процессов управления,
e-mail: nym@online.ru

Е.А.Постоялкина

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
Санкт-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Механики и процессов управления,

Н.Н.Шабров

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
Санкт-Петербургский государственный технический университет,
e-mail: nikesh@mail.ru

Аннотация.

Рассматриваются вопросы численного решения нестационарной задачи теплопроводности в конечноэлементной постановке. Предложены новые

численные методы интегрирования уравнений задачи. При построении методов учитываются внутренние свойства рассматриваемой системы, относящейся к классу систем с большой диссипацией энергии, а также свойства конечноэлементной модели системы. Три предлагаемых метода принадлежат к классу трехстадийных методов семейства Рунге-Кутты, имеют третий порядок точности, обладают свойством L-устойчивости. Первый и второй методы являются абсолютно устойчивыми.

Качество работы построенных методов было проверено на ряде тестовых задач. Была решена промышленная задача об определении нестационарных полей температур ротора паровой турбины. Численные эксперименты подтвердили эффективность использования предлагаемых методов.

1 Введение

Задача нестационарной теплопроводности относится к классу задач о механических системах с большой диссипацией энергии. При численном исследовании таких систем необходимо использовать методы, адекватно описывающие поглощение энергии, как в исходной механической системе, так и в её конечномерной математической модели.

В качестве конечномерной модели задачи чаще всего используется конечноэлементная модель. Система дифференциальных уравнений, описывающая её, принадлежит к классу жестких систем. При численном интегрировании таких систем уравнений необходимо применять методы, позволяющие хорошо воспроизводить как быстрые, так и медленные составляющие решения. В данной работе предлагаются методы численного интегрирования системы дифференциальных уравнений конечноэлементной модели задачи нестационарной теплопроводности, позволяющие учесть указанные особенности.

2 Постановка задачи

Задача нестационарной теплопроводности описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\Delta T - \frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q(x, y, z, t)}{k},$$

где T - температура, t - время, c - удельная теплоемкость материала, ρ - плотность материала, k - коэффициент теплопроводности, Q - интенсивность тепловыделения, Δ - оператор Лапласа.

В качестве граничных условий обычно задаются:

а) распределение температуры на части границы C_T

$$T \Big|_{C_T} = T_\infty,$$

где T_∞ - температура окружающей среды;

б) тепловой поток через часть границы C_q

$$q_n \Big|_{C_q} = -k \frac{\partial T}{\partial n},$$

где \underline{n} - вектор внешней нормали к поверхности C_q ;

в) конвективный теплообмен на части границы C_h

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} + h_t(t) T \right) \Big|_{C_h} = h_t(t) T_\infty(t),$$

h_t — коэффициент теплообмена.

Начальное условие ставится следующим образом

$$T \Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

При решении большинства практических задач используется метод конечных элементов. Конечномерная модель задачи теплопроводности в рамках этого подхода описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$C\dot{x} + K(t)x = F(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

где $x(t)$ - вектор-столбец узловых значений температуры, C - матрица теплоемкости, $K(t) = K_c + K_h(t)$, K_c - матрица теплопроводности, $K_h(t)$ - матрица конвекции, $F(t)$ - вектор- столбец тепловых сил.

Граничные условия учтены при выводе соотношений (1).

3 Требования к методам численного интегрирования уравнения нестационарной теплопроводности

Построение методов численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1) будем осуществлять на классе методов семейства Рунге-Кутты.

Для системы уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $\dot{x} = [\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^N(t)]^T$, $f = [f^1(t, x), \dots, f^N(t, x)]^T$ методы Рунге-Кутты задаются следующими соотношениями

$$k_i = f \left(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad (i = 1, \dots, s),$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (3)$$

где x_n - приближенное значение $x(t_n)$, $t_n = nh$, h - шаг интегрирования, s - число стадий метода. Значения коэффициентов a_{ij} , b_i , c_i в конкретном методе Рунге-Кутты определяются таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array} \equiv \frac{c}{b} \frac{A}{b}.$$

Качество работы численного метода может быть проанализировано на примере решения тестового уравнения [6], [7].

$$\dot{y} = \lambda y, \quad (4)$$

где λ - любое собственное число исходной задачи.

Точные значения неизвестных в моменты времени t_{n+1} и t_n связаны соотношением

$$y(t_{n+1}) = \tilde{\rho}(h\lambda) y(t_n),$$

где h - шаг интегрирования, $\tilde{\rho}(h\lambda) = e^{h\lambda}$ - переходный множитель.

Интегрируя тестовое уравнение методами Рунге-Кутты, найдем, что приближенные значения неизвестных в те же моменты времени связаны следующим образом

$$y_{n+1} = \rho(h\lambda) y_n,$$

где

$$\rho(h\lambda) = \frac{\det(E - h\lambda A + h\lambda e b^T)}{\det(E - h\lambda A)} \quad (5)$$

переходный множитель, определяемый конкретным методом Рунге-Кутты.

Степень точности метода определяет насколько близко точное $e^{h\lambda}$ и приближенное $\rho(h\lambda)$ значение переходного множителя при $|h\lambda| \ll 1$.

Метод является абсолютно устойчивым (т.е. устойчивым при любом шаге интегрирования), если выполнено неравенство $|\rho(h\lambda)| \leq 1$ при $Re(h\lambda) \leq 0$.

Асимптотическое поведение переходного множителя $\rho(h\lambda)$ при $h\lambda \rightarrow -\infty$ является не менее важным. Шаг интегрирования обычно выбирают так, чтобы выполнялись соотношения

$$|h\lambda|_{min} \ll 1, \quad |h\lambda|_{max} \gg 1.$$

В связи с этим необходимо обеспечить, чтобы метод адекватно воспроизводил поведение быстрых составляющих решения, соответствующих большим значениям $|\lambda|$. Точное решение задачи теплопроводности представляет собой линейную комбинацию экспоненциально убывающих слагаемых - собственные числа задачи являются вещественными и отрицательными. В тестовом уравнении этому соответствует $\lim_{h\lambda \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}(h\lambda)$. Переходный множитель в методе Рунге-Кутты должен удовлетворять такому же условию

$$\lim_{h\lambda \rightarrow -\infty} \rho(h\lambda) = 0.$$

Это свойство численного метода называется L-устойчивостью.

При решении задач нестационарной теплопроводности традиционно применяются одностадийные методы:

явный метод Эйлера, с переходным множителем

$$\rho(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda},$$

метод обладает свойствами A- и L-устойчивости, имеет первый порядок точности;

метод Галеркина, переходный множитель имеет вид

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + 1/3h\lambda}{1 - 2/3h\lambda},$$

метод является абсолютно устойчивым, имеет первый порядок точности, не является L-устойчивым - $\lim_{h\lambda \rightarrow -\infty} \rho(h\lambda) = -1/2$. Поэтому при большом шаге интегрирования быстро убывающим составляющим точного решения здесь соответствуют медленно убывающие по модулю, осциллирующие компоненты численного решения;

метод Кранка-Николсона, переходный множитель метода определяется выражением

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + 1/2h\lambda}{1 - 1/2h\lambda},$$

метод имеет второй порядок точности, абсолютно устойчив, не обладает свойством L-устойчивости. Здесь $\lim_{h\lambda \rightarrow -\infty} \rho(h\lambda) = -1$ и поэтому при большом шаге интегрирования быстро убывающим компонентам точного решения соответствуют почти не убывающие по модулю, осциллирующие компоненты численного решения. Это обстоятельство может сделать метод полностью неработоспособным при больших шагах интегрирования.

В работе [4] предложен двухстадийный диагонально неявный метод второго порядка точности имеющий следующий переходный множитель

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + (1 - 2\alpha_i)h\lambda}{(1 - \alpha_i h\lambda)^2},$$

$$\alpha_1 = (2 - \sqrt{2})/2, \quad \alpha_2 = (2 + \sqrt{2})/2.$$

Метод обладает свойствами А- и L-устойчивости.

В [1] построен двухстадийный, А и L-устойчивый метод третьего порядка точности. Переходный множитель этого метода имеет вид

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + 1/3h\lambda}{1 - 2/3h\lambda + 1/6(h\lambda)^2}$$

Установлено [1],[4], что в случае значительно изменяющихся во времени параметров теплообмена использование методов Галеркина и Кранка-Николсона не позволяет получить достоверных результатов, неявный метод Эйлера, в этом случае, обладая только первым порядком точности, воспроизводит результаты с большой погрешностью.

Для численного интегрирования уравнения нестационарной задачи теплопроводности, как показывает опыт [4], предпочтительнее использовать методы, обладающие совокупностью следующих свойств: высоким порядком точности, А-устойчивостью и L-устойчивостью.

4 Общие принципы построения методов численного интегрирования задачи теплопроводности

Построим методы третьего порядка точности на классе трехстадийных методов. Для того, чтобы получить условия, обеспечивающие указанный порядок точности метода запишем, ограничиваясь соответствующим числом слагаемых, ряд Тейлора для функции $x(t_{n+1})$, задаваемой уравнением (2)

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) = & x(t_n) + hf(x_n, t_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f \right) \Bigg|_{\substack{t=t_n \\ x=x(t_n)}} + \\ & + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f \right) \Bigg|_{\substack{t=t_n \\ x=x(t_n)}} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

и разложение приближенного решения x_{n+1} в ряд Тейлора, которое в силу соотношений (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^3 b_i h f \Big|_{\substack{t=t_n \\ x=x_n}} + \sum_{i=1}^3 b_i c_i h^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f \right) \Big|_{\substack{t=t_n \\ x=x_n}} + \\
 + \frac{h^3}{2} \left(\sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + \right. \\
 \left. + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i a_{ij} c_j \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i a_{ij} c_j \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f \right) \Big|_{\substack{t=t_n \\ x=x_n}} + \dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что в (7) принято

$$c_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}. \tag{8}$$

Сравнивая (6) и (7), получим требуемую систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 b_i &= 1, \\
 \sum_{i=1}^3 b_i c_i &= \frac{1}{2}, \\
 \sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 &= \frac{1}{3}, \\
 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Переходный множитель в методах Рунге-Кутты является рациональной функцией аргумента $h\lambda$

$$\rho(h\lambda) = \frac{P(h\lambda)}{Q(h\lambda)}. \tag{10}$$

Степень полиномов $P(h\lambda)$ и $Q(h\lambda)$ не превышает числа стадий метода.

Для того, чтобы метод был А-устойчивым необходимо, чтобы степень полинома в числителе дроби была меньше или равна степени полинома в знаменателе. L-устойчивость гарантирована, если степень полинома в знаменателе дроби строго меньше степени полинома в числителе. Условия на коэффициенты метода, обеспечивающие А- и L-устойчивость получаются при анализе формулы (5).

При построении методов необходимо учесть, что коэффициенты c_i таблицы Бутчера должны принадлежать промежутку $[0;1]$, в противном случае в процессе численного интегрирования будут использоваться значения величин, вычисленные на предыдущих ($c_i < 0$) или последующих ($c_i > 1$) шагах интегрирования.

При решении ряда задач возникает необходимость использовать методы, которые бы более точно описывали быстрые процессы, не ухудшая качества воспроизведения медленных [6]. Требования $\lim_{h\lambda \rightarrow -\infty} \rho(h\lambda) = 0$ уже недостаточно. Необходимо обеспечить, чтобы быстроубывающим экспонентам точного решения соответствовали быстроубывающие слагаемые численного решения. Очевидно, что при больших значениях $h\lambda$ приближенное $\rho(h\lambda)$ значение переходного множителя лучше аппроксимирует точное $\tilde{\rho}(h\lambda) = e^{h\lambda}$ при бóльшей разности степеней полиномов в числителе и знаменателе переходного множителя (10).

Кроме того, реализация численных процедур методов не должна приводить к значительному увеличению объема вычислительной работы.

5 Новые методы численного интегрирования уравнения нестационарной теплопроводности

Построить метод, удовлетворяющий в полной мере всем указанным выше многочисленным и отчасти противоречивым требованиям, не представляется возможным. Поэтому предлагаются три метода третьего порядка точности, обладающие различным сочетанием указанных свойств.

5.1 Первый предлагаемый метод

Первый метод принадлежит к классу диагонально неявных. Использование таких методов позволяет значительно снизить объем вычислений. Метод задается следующей таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc}
 0.435866 & 0.435866 & & \\
 0.335866 & -0.1 & 0.435866 & \\
 0.535866 & -0.068805 & 0.168805 & 0.435866 \\
 \hline
 & -7.744643 & 4.051654 & 4.692989
 \end{array} \cdot \quad (11)$$

Переходный множитель метода имеет вид

$$\rho_1(h\lambda) = \frac{1 + (1 - 3\alpha)h\lambda + (1/2 - 3\alpha + 3\alpha^2)(h\lambda)^2}{(1 - \alpha h\lambda)^3},$$

где $\alpha=0.4358665$.

Степень полинома в числителе переходного множителя на единицу меньше степени полинома в знаменателе.

Метод обладает свойствами А - и L - устойчивости.

5.2 Второй предлагаемый метод

Коэффициенты второго метода определяет следующая таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc}
 0.238332 & 0.238332 & & \\
 0.818470 & 0 & 0.238332 & 0.580138 \\
 0.818470 & 0.656999 & -0.076861 & 0.238332 \\
 \hline
 & 0.548956 & 0.013771 & 0.437273
 \end{array} \cdot \quad (12)$$

Метод обладает переходным множителем

$$\rho_2(h\lambda) = \frac{1 + (1 - 3\alpha)h\lambda}{1 - 3\alpha h\lambda + (3\alpha - 1/2)(h\lambda)^2 + (-3/2\alpha + 1/3)(h\lambda)^3},$$

где $\alpha=0.238332$, разность степеней полиномов в числителе и знаменателе переходного множителя равна двум.

Метод А- и L-устойчив.

5.3 Третий предлагаемый метод

Таблица Бутчера третьего предлагаемого метода имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc}
 0.32 & 0.333333 & 0 & -0.013333 \\
 0.962963 & 0.625153 & 0.333333 & 0.004477 \\
 0.962963 & 9.516331 & -8.886702 & 0.333333 \\
 \hline
 & 0.720046 & 0.271563 & 0.008391
 \end{array} \tag{13}$$

Метод имеет переходный множитель

$$\rho_3(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 - \frac{1}{6}(h\lambda)^3}.$$

Здесь разность степеней полиномов в числителе и знаменателе переходного множителя равна трём.

Метод L-устойчив, но не является A-устойчивым поскольку неравенство $|\rho(h\lambda)| \leq 1$ нарушается при некоторых комплексных значениях $h\lambda$, однако метод устойчив при $Reh\lambda \leq 0, Imh\lambda = 0$, что заведомо выполняется в задачах теплопроводности.

Переходные множители методов показаны на рис. 1.

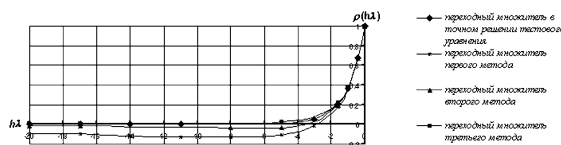


Рис. 1. Переходные множители предлагаемых методов.

6 Организация численных процедур предлагаемых методов. Улучшение сходимости итерационных процессов второго и третьего методов

Непосредственное применение первого метода (11) к системе дифференциальных уравнений (1) после очевидных преобразований приводит к следующей вычислительной схеме

$$\begin{aligned}
 [C + \alpha h K(t_n + c_1 h)] k_1 &= -K(t_n + c_1 h) x_n + F(t_n + c_1 h), \\
 [C + \alpha h K(t_n + c_2 h)] k_2 &= -K(t_n + c_2 h) (x_n + h a_{21} k_1) + F(t_n + c_2 h), \\
 [C + \alpha h K(t_n + c_3 h)] k_3 &= -K(t_n + c_2 h) (x_n + \\
 &\quad + h (a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) + F(t_n + c_2 h), \\
 x_{n+1} &= x_n + h (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Организованная таким образом численная процедура требует последовательного решения трех систем линейных алгебраических уравнений с различными симметричными матрицами в левых частях. Преобразуем (14) таким образом, чтобы в левых частях равенств стояли одинаковые матрицы

$$\begin{aligned}
 [C + \alpha h K(t_n + c_1 h)] k_1 &= -K(t_n + c_1 h) x_n + F(t_n + c_1 h), \\
 [C + \alpha h K(t_n + c_1 h)] k_2^{(i+1)} &= \alpha h [K(t_n + c_1 h) - K(t_n + c_2 h)] k_2^{(i)} - \\
 &\quad - K(t_n + c_2 h) (x_n + h a_{21} k_1) + F(t_n + c_2 h), \\
 [C + \alpha h K(t_n + c_1 h)] k_3^{(j+1)} &= \alpha h [K(t_n + c_1 h) - K(t_n + c_3 h)] k_3^{(j)} - \\
 &\quad - K(t_n + c_3 h) (x_n + \\
 &\quad + h (a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) + F(t_n + c_3 h), \\
 x_{n+1} &= x_n + h (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3).
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Организованная таким образом вычислительная схема требует на каждом шаге интегрирования решения трех систем линейных алгебраических уравнений с одинаковыми симметричными матрицами в левых частях. Система уравнений, соответствующая первой стадии метода решается непосредственно. Решение систем уравнений, соответствующих второй и третьей стадиям метода требует организации итерационных процедур. Итерационные процессы имеют очень высокую скорость сходимости, что позволяет ограничиваться одной итерацией. Численные эксперименты это пол-

ностью подтверждают. В качестве начальных значений $k_2^{(0)}$, $k_3^{(0)}$ выбираются значения величин в предыдущий момент времени, на первом шаге $k_2^{(0)}$, $k_3^{(0)}$ принимаются равными нулю. Под $k_l, l \in [2; 3]$ (без верхнего индекса) понимаются значения, найденные в ходе итерационного процесса.

Численные эксперименты позволяют заключить, что вычислительная схема (15) предпочтительнее вычислительной схемы (14).

Применение методов (12) и (13) к системе уравнений (1), после несложных преобразований приводит к следующим вычислительным схемам, соответственно

$$\begin{aligned}
 [C + \alpha h K(t_n + c_1 h)] k_1 &= -K(t_n + c_1 h) x_n + F(t_n + c_1 h), \\
 [C + \alpha h K(t_n + c_2 h)] k_2 + a_{23} h K(t_n + c_2 h) k_3 &= \\
 &= -K(t_n + c_2 h) x_n + F(t_n + c_2 h), \\
 a_{31} h K(t_n + c_2 h) k_1 + a_{32} h K(t_n + c_2 h) k_2 + [C + \alpha h K(t_n + c_2 h)] k_3 &= \\
 &= -K(t_n + c_2 h) x_n + F(t_n + c_2 h), \\
 x_{n+1} &= x_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3).
 \end{aligned} \tag{16}$$

и

$$\begin{aligned}
 [C + \alpha h K(t_n + c_1 h)] k_1 + a_{13} h K(t_n + c_1 h) k_3 &= \\
 &= -K(t_n + c_1 h) x_n + F(t_n + c_1 h), \\
 a_{21} h K(t_n + c_2 h) k_1 + [C + \alpha h K(t_n + c_2 h)] k_2 + a_{23} h K(t_n + c_2 h) k_3 &= \\
 &= -K(t_n + c_2 h) x_n + F(t_n + c_2 h), \\
 a_{31} h K(t_n + c_2 h) k_1 + a_{32} h K(t_n + c_2 h) k_2 + [C + \alpha h K(t_n + c_2 h)] k_3 &= \\
 &= -K(t_n + c_2 h) x_n + F(t_n + c_2 h), \\
 x_{n+1} &= x_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Непосредственное решение систем уравнений (16) и (17) достаточно трудоемко, поскольку они имеют несимметричные матрицы размера $3k \times 3k$ (k - размерность матриц в (1)). Заметно снизить объем вычислений в этом случае позволяет организация итерационной процедуры, на каждом шаге которой нужно решать системы уравнений с симметричными матрицами размера $k \times k$ в левых частях. Пример использования подобного подхода приведен в [2], [3].

Сходимость этих итерационных процессов может быть улучшена (а в последнем случае получена), если в системы (16) и (17) ввести дополнительный параметр.

Перепишем системы (16) и (17), используя этот подход, обозначив дополнительный параметр γ и преобразуя их таким образом, чтобы в левых частях равенств стояли одинаковые матрицы.

$$\begin{aligned}
 [C + (\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h)] k_1^{(i+1)} &= [(\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h) - \\
 &\quad - \alpha h K (t_n + c_1 h)] k_1^{(i)} - \\
 &\quad - K (t_n + c_1 h) x_n + F (t_n + c_1 h),
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 [C + (\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h)] k_2^{(j+1)} &= -K (t_n + c_2 h) \left(x_n + \right. \\
 &\quad \left. + h \left(a_{23} k_3^{(j)} - \gamma \alpha k_2^{(j)} \right) \right) + F (t_n + c_2 h),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [C + (\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h)] k_3^{(j+1)} &= -K (t_n + c_2 h) \left(x_n + h \left(a_{31} k_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a_{32} k_2^{(j+1)} - \gamma \alpha k_3^{(j)} \right) \right) + F (t_n + c_2 h),
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$x_{n+1} = x_n + h (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3),$$

и

$$\begin{aligned}
 [C + (\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h)] k_1^{(i+1)} &= [(\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h) - \\
 &\quad - \alpha h K (t_n + c_1 h)] k_1^{(i)} - K (t_n + c_1 h) \left(x_n + \right. \\
 &\quad \left. + h a_{13} k_3^{(i)} \right) + F (t_n + c_1 h), \\
 [C + (\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h)] k_2^{(i+1)} &= -K (t_n + c_2 h) \left(x_n + h \left(a_{21} k_1^{(i+1)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a_{23} k_3^{(i)} - \gamma \alpha k_2^{(i)} \right) \right) + F (t_n + c_2 h), \\
 [C + (\gamma + 1) \alpha h K (t_n + c_2 h)] k_3^{(i+1)} &= -K (t_n + c_2 h) \left(x_n + h \left(a_{31} k_1^{(i+1)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a_{32} k_2^{(i+1)} - \gamma \alpha k_3^{(i)} \right) \right) + F (t_n + c_2 h), \\
 x_{n+1} &= x_n + h (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3).
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Оценим влияние параметра γ на скорость сходимости итерационных процессов (18), (19) и (20). Для этого проследим за $\Delta k_j^{(i)}$ - отклонением $k_j^{(i)}$ от точного решения k_j в ходе итерационного процесса. Будем разыскивать $\Delta k_j^{(i)}$ в виде

$$\Delta k_j^{(i)} = L_j r^i, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{21}$$

Отметим, что уравнению (21) удовлетворяет несколько значений r_m ($m = 1 \div p$, где p - число стадий метода охваченных рассматриваемым итерационным процессом).

Необходимым и достаточным условием сходимости итерационного процесса является выполнение условия $|r_m| < 1$ ($m = 1 \div p$). Скорость сходимости итерационного процесса тем выше, чем меньше $\max_m |r_m|$.

Были получены зависимости величины $|r|_{\max} = \max_m \max_{h\lambda \in (-\infty; 0]} |r_m(h\lambda)|$ от параметра γ в итерационных процессах (18) и (19) второго предлагаемого метода (см. п. 4.2) - рис. 2 и в итерационном процессе (20) третьего предлагаемого метода (см. п. 4.3) - рис. 3. Эти графики позволяют получить оптимальное значение величины γ , обеспечивающие наилучшую скорость сходимости итерационных процессов методов. Во втором (12) предлагаемом методе оптимальное значение величины γ определяется поведением

кривой, соответствующей второму (19) итерационному процессу, для которого наилучшая скорость сходимости достигается при $\gamma = 0.17$ и характеризуется величиной $r_{opt.} = \min_{\gamma} \max_m \max_{h\lambda \in (-\infty; 0]} |r_m(h\lambda)| = 0.145$, наилучшая скорость сходимости итерационного процесса третьего (13) предлагаемого метода определяется величиной $r_{opt.} = 0.3$, соответствующее значение параметра $\gamma = 0.45$.

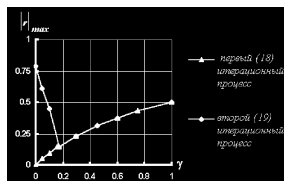


Рис. 2. Зависимость $|r|_{max}$ от параметра γ в итерационных процессах второго метода.

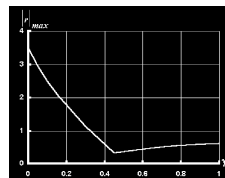


Рис. 3. Зависимость $|r|_{max}$ от параметра γ в итерационном процессе третьего метода.

Таким образом введение в систему дополнительного параметра позволило улучшить скорость сходимости итерационных процессов. Во втором (12) предлагаемом методе при $\gamma = 0$ значение $|r|_{max}$ в итерационном процессе (19) равно 0.78, а $r_{opt.} = 0.145$, сходимость итерационного процесса третьего (13) предлагаемого метода при $\gamma = 0$ отсутствует - $|r|_{max} = 3.5$, в то время как $r_{opt.} = 0.3$.

Итак, вычислительная схема второго (12) предлагаемого метода требует организации двух последовательных итерационных процессов. На каждом шаге итераций первого процесса нужно решить одну систему линейных алгебраических уравнений, на каждом шаге второго итерационного процесса необходимо решать две системы линейных алгебраических уравнений, однако в левых частях всех трёх систем стоят одинаковые симметричные матрицы.

Вычислительная схема третьего (13) предлагаемого метода требует организации итерационного процесса, в рамках которого на каждом шаге итераций необходимо решать три системы линейных алгебраических уравнений с одинаковыми симметричными матрицами в левых частях.

Во всех итерационных процессах в качестве начального приближения величин $k_l^{(0)}$, $l \in [1; 3]$, выбираются их значения, найденные в предыдущий

момент времени. На первом шаге они принимаются равными нулю. В (19), (20) под k_l (без верхнего индекса) понимаются значения, найденные в ходе итерационного процесса.

Сравнение характеристик традиционно используемых и предлагаемых методов приведено в следующей таблице

№ п/п	Метод	$\rho(h\lambda) - e^{h\lambda}$ при $ h\lambda \ll 1$	$\rho(h\lambda)$ при $h\lambda \rightarrow -\infty$	Сходимость итерационного процесса
1.	Неявный метод Эйлера	$0.5(h\lambda)^2 + O((h\lambda)^3)$	$\frac{1}{ h\lambda }$	Не требует организации итерационного процесса
2.	Метод Галеркина	$0.17(h\lambda)^2 + O((h\lambda)^3)$	$-1/2$	Не требует организации итерационного процесса
3.	Метод Кранка-Николсона	$0.08(h\lambda)^3 + O((h\lambda)^4)$	-1	Не требует организации итерационного процесса
4.	Метод второго порядка точности	$0.04(h\lambda)^3 + O((h\lambda)^4)$	$-4.8 \frac{1}{ h\lambda }$	Не требует организации итерационного процесса
5.	Двухстадийный метод третьего порядка точности	$-0.014(h\lambda)^4 + O((h\lambda)^5)$	$-2 \frac{1}{ h\lambda }$	$ r = 0.5$
6.	Первый предлагаемый метод	$-0.026(h\lambda)^4 + O((h\lambda)^5)$	$-2.9 \frac{1}{ h\lambda }$	Очень высокая (достаточно 1 итерации).
7.	Второй предлагаемый метод	$5.6 \cdot 10^{-3}(h\lambda)^4 + O((h\lambda)^5)$	$-11.8 \frac{1}{(h\lambda)^2}$	$ r = 0.145$
8.	Третий предлагаемый метод	$0.375(h\lambda)^4 + O((h\lambda)^5)$	$6 \frac{1}{ (h\lambda)^3 }$	$ r = 0.3$

Таблица 1. Сравнение характеристик традиционно используемых и предлагаемых методов.

Величина $\rho(h\lambda) - e^{h\lambda}$ при $|h\lambda| \ll 1$, определяющая третий столбец таблицы позволяет судить о точности воспроизведения методом членов порядка $O(h^{p+1})$, где p порядок метода.

Четвертый столбец, содержащий $\rho(h\lambda)$ при $h\lambda \rightarrow -\infty$ позволяет оценить точность аппроксимации точного $e^{h\lambda}$ при больших значениях $|h\lambda|$.

В последнем столбце для методов, численная реализация которых требует организации итерационной процедуры, указана величина $|r|$ (см. (21)), характеризующая скорость сходимости итерационного процесса. Напомним,

что скорость сходимости итерационного процесса тем выше, чем меньше $|r|$. Для последних двух методов под этой величиной понимается $r_{opt.} = \min_{\gamma} \max_m \max_{h\lambda \in (-\infty; 0]} |r_m(h\lambda)|$.

7 Влияние коэффициентов c_i таблицы Бутчера на качество воспроизведения результатов.

Переходный множитель, являясь важной характеристикой метода и позволяя во многих случаях судить о работе метода, не отражает влияния коэффициентов c_i таблицы Бутчера (см. формулу (5)) на качество воспроизведения результатов. Поэтому представляется целесообразным получить соотношения, позволяющие оценить степень этого влияния.

Для этого рассмотрим (в отличии от п. 2) вместо тестового уравнения (4) аналогичное, но неоднородное уравнение

$$\dot{y} = \lambda y + Y(t), \quad (22)$$

λ — любое собственное число исходной задачи.

Приближенные значения неизвестных в моменты времени t_{n+1} и t_n связаны следующим образом

$$y_{n+1} = \rho(h\lambda)y_n + hb^T[E - h\lambda A]^{-1}Y(t_n + ch) \quad (23)$$

где

$$\rho(h\lambda) = 1 + h\lambda b^T [E - h\lambda A]^{-1} e, \quad (24)$$

$$e = [1 \dots 1]^T,$$

$$Y(t_n + ch) = \begin{bmatrix} Y(t_n + c_1 h) \\ \vdots \\ Y(t_n + c_s h) \end{bmatrix}.$$

Традиционно [7] численные методы семейства Рунге-Кутты строятся в предположении, что коэффициенты метода удовлетворяют следующему соотношению

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}. \quad (25)$$

Однако, существуют методы, для которых это равенство не выполняется, например [4].

В случае, когда функции, описывающие внешнее воздействие на систему являются полиномами от t , нарушение соотношения (25) может приводить к значительной погрешности численного решения.

Покажем это. Примем для простоты $Y(t) = kt + b$. Тогда точные значения неизвестных в моменты времени t_n и t_{n+1} связаны соотношением

$$y(t_{n+1}) = \tilde{\rho}(h\lambda) y(t_n) + \frac{\tilde{\rho}(h\lambda) - 1}{\lambda} \left[Y(t_n) + \frac{k}{\lambda} \right] - \frac{kh}{\lambda}, \quad (26)$$

а (23) может быть записано следующим образом

$$y_{n+1} = \rho(h\lambda) y_n + \frac{h\lambda}{\lambda} b^T [E - h\lambda A]^{-1} (Y(t_n) e + khc), \quad (27)$$

где обозначено $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix}$.

Предположим, что (25) нарушено т.е. $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} + \delta_i$ или в векторной форме

$$c = Ae + \delta, \quad (28)$$

где обозначено $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_s \end{bmatrix}$.

Перепишем (27) с учетом равенств (24) и (28)

$$y_{n+1} = \rho(h\lambda) y_n + \frac{\rho(h\lambda) - 1}{\lambda} Y(t_n) + hb^T [E - h\lambda A]^{-1} kh (Ae + \delta).$$

После преобразования получим

$$y_{n+1} = \rho(h\lambda) y_n + \frac{\rho(h\lambda) - 1}{\lambda} \left[Y(t_n) + \frac{k}{\lambda} \right] - \frac{kh}{\lambda} - h^2 kb^T [E - h\lambda A]^{-1} \delta. \quad (29)$$

Сравнение полученного равенства с (26) показывает, что на месте точного значения переходного множителя $\tilde{\rho}(h\lambda)$ в первом и втором слагаемых стоит приближенное значение $\rho(h\lambda)$, третьи слагаемые этих равенств совпадают. В (26) отсутствует слагаемое аналогичное последнему слагаемому в (29). Поскольку, при больших значениях $|h\lambda|$, согласно требованиями п.3, переходные множители воспроизводят поведение $\tilde{\rho}(h\lambda)$ в надлежащем соответствии, последнее слагаемое будет оказывать существенное влияние на численное решение, при $\delta = 0$ это слагаемое отсутствует.

Вносимая погрешность пропорциональна величине k , определяющей угловой коэффициент прямой (и следовательно темп нарастания воздействия) и квадрату шага интегрирования - h^2 . Это означает, что влияние слагаемого, возникающего из-за нарушения соотношения (25), особенно велико при резком изменении внешнего воздействия и большом шаге интегрирования.

8 Анализ качества работы построенных методов.

В качестве тестового примера для анализа качества работы построенных методов была выбрана задача о нагреве стержня конечной длины, один конец которого теплоизолирован, а на другом происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. Параметры теплообмена являются функциями времени. Соответствующие кривые показаны на рис. 4. На этом графике (и всех последующих) отрезки оси абсцисс, соответствующие различным участкам изменения параметров теплообмена имеют различный масштаб.

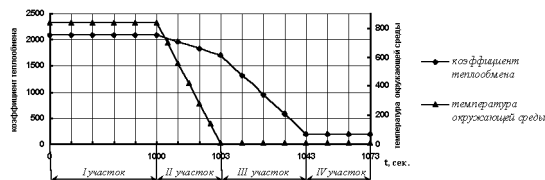


Рис. 4. Изменение параметров теплообмена.

Для того, чтобы иметь возможность оценить точность воспроизведения результатов предлагаемыми методами, было построено численное решение при достаточно малом шаге интегрирования. Это решение очень близко к точному (в дальнейшем оно названо базовым решением). Отметим, что получить точное решение задачи аналитически не представляется возможным.

Результаты работы всех трех методов были соотнесены друг с другом и так называемым базовым решением. Наиболее близким к последнему оказалось численное решение полученное третьим методом - рис. 5.

Далее результаты работы третьего предлагаемого метода сравнивались с результатами работы традиционно используемых в задачах теплопроводности методов - неявным методом Эйлера и методом второго порядка точности [4]. Сопоставление полученных результатов с базовым решением показало, что более высокая точность расчета достигается при использовании предлагаемого метода. Соответствующие кривые приведены на рис. 6.

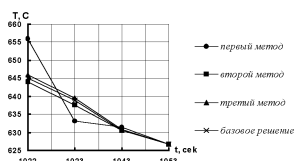


Рис. 5. Сравнение методов третьего порядка точности.

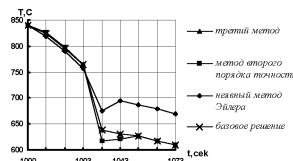


Рис. 6. Сравнение третьего метода с неявным методом Эйлера и методом второго порядка точности.

Затем анализ качества работы методов проводился на примере решения промышленной задачи об определении нестационарных полей температур ротора паровой турбины. Конечноэлементная модель ротора показана на рис. 7.



Рис. 7. Конечноэлементная модель ротора паровой турбины.

Наблюдение велось за одной из точек на поверхности ротора. Параметры теплообмена в этой точке существенно изменяются во времени. Их значения показаны на рис. 8.

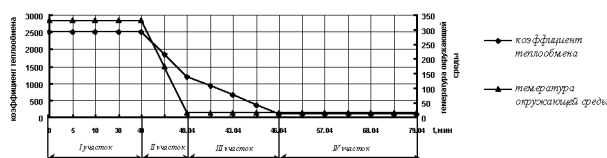


Рис. 8. Изменение параметров теплообмена на поверхности ротора паровой турбины.

Для этой задачи также было построено базовое решение, которое использовалось для оценки точности результатов, воспроизводимых методами.

Применение к задаче построенных и традиционно используемых в задачах теплопроводности методов показало, что второй и третий методы позволяют получить высокую точность расчета при достаточно грубых значениях шагов интегрирования максимальная погрешность расчета вторым методом составляет 2,5%, третьим методом 1,5%, точность воспроизведения результатов первым методом несколько ниже - максимальная погрешность расчета составляет 8%, погрешность расчета традиционно используемыми методами велика [5] - неявный метод Эйлера дает погрешность 27%, а метод второго порядка точности - 24%. Соответствующие кривые показаны на рис. 9.

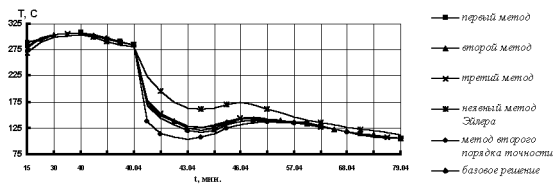


Рис. 9. Зависимость температуры от времени, полученная при больших шагах интегрирования.

Для того, чтобы получить необходимую точность расчета (погрешность расчета $\approx 5\%$) при использовании первого метода шаг интегрирования на третьем участке изменения параметров теплообмена был уменьшен в 2 раза, при использовании метода второго порядка точности шаг интегрирования был уменьшен на третьем участке в 4 раза, при расчете неявным методом Эйлера шаг интегрирования был уменьшен на третьем участке в 10 раз, на четвертом в 2 раза. При использовании всех методов был уменьшен шаг интегрирования на первом участке изменения параметров теплообмена. Время счета (t_m) при этом увеличивалось по сравнению со временем счета (t_2) вторым методом в 1,3 раза при использовании первого метода, в 1,7 раз при использовании метода второго порядка точности, почти в 3,2 раза при расчете неявным методом Эйлера. Численные решения задачи полученные при уменьшенных значениях шагов интегрирования приведены на рис.10. Все численные решения приближаются к базовому решению.

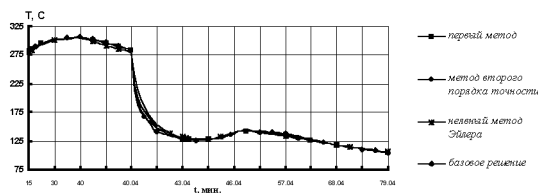


Рис. 10. Зависимость температуры от времени, полученная при малых шагах интегрирования.

Применение к задаче двухстадийного метода третьего порядка точности [1] приводит к следующим результатам: максимальная погрешность расчета при грубых значениях шагов интегрирования составляет 6,5 %, требуемая точность достигается при уменьшении шага интегрирования на третьем участке изменения параметров теплообмена в 2 раза, время счета (t_m) при этом увеличивается в 1,3 раза по сравнению со временем счета вторым методом.

Сравнение результатов работы методов приведено в следующей сводной таблице.

Метод	Максимальная погрешность при больших шагах интегрирования	Время счета, при малых шагах интегрирования, отнесенное ко времени счета вторым методом t_m/t_2
Неявный метод Эйлера	27%	3,2
Метод второго порядка точности	24%	1,7
Двухстадийный метод третьего порядка точности	6,5%	1,3
Первый предлагаемый метод	8%	1,3
Второй предлагаемый метод	2,5%	1
Третий предлагаемый метод	1,5%	1,04

Таблица 2. Сравнение результатов работы методов.

Таким образом, проведенный анализ на примере решения промышленной задачи показал, что реализация численной процедуры первого метода позволяет снизить время счета на каждом шаге интегрирования, однако погрешность расчета при этом возрастает. Необходимая точность может быть достигнута только при уменьшении значений шагов интегрирования, а, следовательно, увеличении времени счета. Это обстоятельство снижает эффективность использования первого метода. Применение к задаче второго и третьего методов подтвердило высокую эффективность их использования. Необходимая точность расчета при наименьшем времени счета достигается при использовании второго метода.

Представляется, что построенные методы могут быть рекомендованы для решения линейных и нелинейных задач теории теплопроводности, а также задач теории ползучести и пластичности.

Литература

- [1] Живова Н.Б., Исполов Ю.Г. Новый метод решения задач нестационарной теплопроводности. // XXVII неделя науки СПбГТУ, 7-12 декабря 1998, часть III, материалы межвузовской научной конференции (физико-механический факультет). СПб, изд-во СПбГТУ 1999г.
- [2] Исполов Ю.Г. Численное решение задачи Коши для конечномерных математических моделей механических систем. // Труды СПбГТУ, 1993, №446.
- [3] Исполов Ю.Г., Постоялкина Е.А., Шабров Н.Н. Новые методы численного интегрирования уравнений связанной задачи термоупругости. // Электр. журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления, 1998, №3. (<http://www.neva.ru/journal>).
- [4] Исполов Ю.Г., Шабров Н.Н. Конечноэлементный анализ нестационарных полей температур в деталях ГТУ. // Проблемы прочности, 1989, №12.
- [5] Постоялкина Е.А., Исполов Ю.Г., Шабров Н.Н. Метод повышенного порядка точности в расчете нестационарного температурного поля ротора паровой турбины. // XXVIII неделя науки СПбГТУ. Часть III, материалы межвузовской научной конференции. СПб, 2000 г.
- [6] Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий Н.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
- [7] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Дж. Холл и Дж. Уатт, ред.: Пер. с англ. М.: Мир, 1979.