ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Прикладные задачи

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ТЕПЛОВЫХ БАЛАНСОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

В.И.Антонов

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
Санкт-Петербургский Государственный Технический Университет
Кафедра "Высшая математика"

Аннотация.

Представлен метод решения задачи теплопроводности для областей произвольной формы.Доказана сходимость, приведены оценки погрешности. Метод использован для расчета нагрева слитков в печах.

При численном решении задач теплопроводности для областей сложной геометрической формы на прямоугольных сетках возникает проблема аппроксимации граничных условий, так как точки границы, как правило, не совпадают с узлами сетки. В работе представлен метод решения подобных задач, основанный на законах теплопроводности Фурье и сохранения энергии.

Разобьём плоскую область (S) на треугольники (рис. 1). Граница Г области при этом аппроксимируется замкнутой ломаной линией. При малых размерах элементов (треугольников) температура в них меняется по линейному закону

$$T(x,y,t) = A_0 + A_1 x + A_2 y, \tag{1}$$

где x, y – декартовы координаты, A_0, A_1, A_2 – постоянные в фиксированный момент времени.

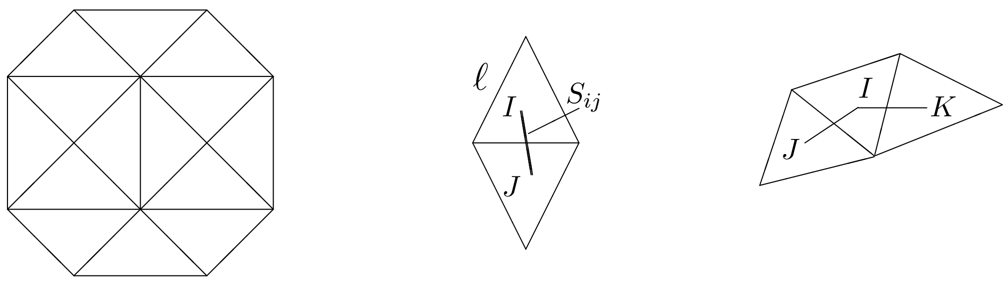

Рис.1. Разбиение области на элементы.

Внутренняя энергия к-го элемента в фиксированный момент времени

$$\Theta_k = l \iint\limits_{S_k} c\rho T(x,y)\,dxdy = c\rho T_k S_k l = \frac{\lambda}{a} T_k S_k l, \tag{2}$$

где $S_k = \iint\limits_{S_k} dxdy$ – площадь элемента, T_k – средняя температура элемента.

Рассмотрим два соседних равносторонних треугольника со стороной L и расстоянием между центрами $r_{ij} = L\sqrt{3}$. Вследствие линейности температурного поля плотность потока тепла в направлении r_{ij}

$$q_{ij} = -\lambda \operatorname{grad} T_{r_{ij}} = \lambda \frac{T_i - T_j}{r_{ij}} = \frac{\lambda}{r_{ij}} \left(\frac{a}{\lambda} \left(\frac{\Theta_i}{S_i} - \frac{\Theta_j}{S_j} \right) \right), \quad \frac{Bm}{м^2}. \tag{3}$$

Количество тепла, проходящее через ребро в единицу времени

$$Q_{ij} = q_{ij} L_{ij} l = a \left(\frac{\Theta_i}{S_i} - \frac{\Theta_j}{S_j} \right) \alpha_{ij} l, \quad Bm. \tag{4}$$

При этом учитывается, что отрезок r_{ij} перпендикулярен ребру L_{ij}.

Вблизи границы элементы будут деформироваться, поэтому необходимо привлекать соседний элемент (рис.1). Введем единичные векторы: нормали к ребру $\vec{n}$, направления ij $\vec{n}_1 = \vec{ij}/|\vec{ij}|$, направления ik $\vec{n}_k = = \vec{ik}/|\vec{ik}|$. Пусть q_x и q_y – проекции на оси x, y. Тогда

$$q_x = \frac{q_{ij}n_{2y} - q_{ik}n_{1y}}{d}, \quad q_y = \frac{q_{ik}n_{1x} - q_{ij}n_{2y}}{d}, \quad d = n_{1x}n_{2y} - n_{2x}n_{2y} \neq 0.$$

Проекция вектора плотности теплового потока на нормаль n

$$\vec{q}\,\vec{n} = q_x n_x + q_y n_y = b_1 q_1 + b_2 q_2, \;\; b_1 = \frac{n_x n_{2y} - n_y n_{2x}}{d}, \;\; b_2 = \frac{n_y n_{1x} - n_x n_{1y}}{d}.$$

Тепловой поток через ребро неправильного треугольника в единицу времени

$$Q_{ij}^n = (\vec{q}\,\vec{n})\,L_{ij}l, \quad Bm. \tag{5}$$

Пусть $\Re_p$ – p-мерное вещественное евклидово пространство. Рассмотрим m – мерную переменную внутренних энергий $\{\Theta\} = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \in \Re_m$; n-мерную переменную тепловых потоков $\{q^{(n)}\} = \{q_1^{(n)}, \ldots, q_n^{(n)}\} \in \Re_n$, где m – количество элементов, n – число ребер. Можно записать линейное преобразование

$$\{Q^n\} = B\,\{\Theta\} \tag{6}$$

где B – не зависящая от времени (в предположении постоянства a и λ) матрица размерности $m\,n$. Зная потоки через ребра, находим изменение внутренней энергии элементов

$$\Delta\Theta = \Delta\tau(Q_\alpha^n + Q_\beta^n + Q_\gamma^n), \tag{7}$$

где $\Delta\tau$ – шаг по времени. Формула (7) задает постоянную матрицу A для определения изменения внутренних энергий

$$\{\Delta\Theta\} = A\,\{Q^n\}\,. \tag{8}$$

Формулы (6) и (8) дают явную вычислительную схему

$$\left\{\Theta^{k+1}\right\} = \left\{\Theta^k\right\} + AB\left\{\Theta^k\right\} = (E + AB)\left\{\Theta^k\right\}, \quad \left\{\Theta^0\right\} = \{\Theta_0\} \tag{9}$$

где k – номер итерации по времени. При разбиении области на треугольники желательно сделать так, чтобы большинство из них были правильными.

Аппроксимация граничных условий. При построении вычислительной схемы граница Г области разбивается на участки, каждый из которых аппроксимируется стороной граничного треугольника. Для граничных условий второго рода поток через эту границу полагают равным потоку через криволинейный элемент границы Г. Оценим совершаемую при этом погрешность. Криволинейный элемент границы Г можно считать дугой окружности с радиусом $R >> L$. Пусть $\tilde{Q}$ – поток через дугу AB, Q – значение потока через ребро AB. Тогда

$$\tilde{Q} - Q = c\rho Sl\frac{\partial T}{\partial t} = O(S)$$

где S – площадь области между границами. Но

$$S = S_{сектOAB} - S_{\Delta OAB} = R^2\frac{\varepsilon}{2} - \frac{L}{2}R\left(1 - \frac{L^2}{8}\right) = \frac{L^3}{16R} = O(L^3).$$

Таким образом, $\tilde{Q} - Q = O(L^3)$.

В случае граничных условий первого рода разобьем внутренность области (S) на равные правильные треугольники. Внутри области выбираем положение опорного треугольника, начиная с которого строим равномерную треугольную сетку (рис.1). На границе Γ^* этой области S^* зададим поток следующим образом: на середине граничного ребра проведем перпендикуляр до границы Г и построим равнобедренный треугольник с центром в этой точке (рис.1). Поток через граничное ребро

$$Q_{pI} = \lambda\frac{L}{r_{pI}}\left(T_p - \frac{a\Theta_I}{\lambda S}\right)l, \quad Вт, \tag{10}$$

где L – длина ребра, S – площадь треугольника, r_{pI} – расстояние от центра граничного треугольника до границы Г по нормали к граничному ребру, $T_p = T_p(M)$ – температура точки границы. Погрешность последней формулы имеет второй порядок аппроксимации.

Погрешность аппроксимации метода. Формулы (7) и (8) являются точными, поэтому погрешность возникает только при нахождении теплового потока через боковые ребра элементов. Будем предполагать, что теплообмен через верхнюю и нижнюю грани отсутствует. Тепловой поток через боковую грань элемента в единицу времени

$$\tilde{Q} = l\int\limits_{L_{ij}} q_n(x)\,dx = l\int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} q_n(x)\,dx, \quad q_n = -\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = \lambda\frac{\partial T}{\partial y}.$$

По приближенным формулам $Q = l\lambda\alpha_{ij}(T_i - T_j) = l\lambda\sqrt{3}(T_i - T_j)$. Разложим температуру $T = T(x, y)$ в ряд в окрестности точки O – центра ребра, получим

$$\begin{aligned} &T_i = T_O - \frac{\partial T(o)}{\partial n}\bar{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T(o)}{\partial n^2}\bar{r}^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 T(o^+)}{\partial n}\bar{r}^3, \\ &T_j = T_O + \frac{\partial T(o)}{\partial n}\bar{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T(o)}{\partial n^2}\bar{r}^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 T(o^-)}{\partial n^3}\bar{r}^3, \bar{r} = \tfrac{r}{2},\ o^+ \in OI,\ o^- \in OJ. \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &T_i - T_j = -\frac{\partial T(o)}{\partial n}r - \frac{r^3}{48}\left(\frac{\partial^3 T(o^+)}{\partial n^3} - \frac{\partial^3 T(o^-)}{\partial n^3}\right), \\ &\frac{\partial T(x)}{\partial n} = \frac{\partial T(o)}{\partial n}x + \frac{\partial^2 T(o)}{\partial x}x + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 T(\bar{o})}{\partial n \partial x^2}x^2, \quad \bar{o}(x) \in OX. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть совокупность модулей всех третьих частных производных от температуры по x и y ограничена постоянной M_3

$$\left|\frac{\partial^4 T}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right| \leqslant M_{3,} \quad \alpha + \beta = 3, \tag{13}$$

тогда

$$\int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial T}{\partial n}\,dx = L\frac{\partial T(o)}{\partial n} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial^3 T(o)}{\partial n \partial x^2}x^2\,dx = L\frac{\partial T(o)}{\partial n} + \frac{1}{24}\bar{M}L^3, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \delta Q = -\lambda L\frac{\partial T(o)}{\partial n} - \frac{1}{24}\bar{M}L^3 + \sqrt{3}r\frac{\partial T(o)}{\partial n} + \frac{\sqrt{3}r^3}{48}\left(\frac{\partial^3 T(o^+)}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 T(o^-)}{\partial n^3}\right) = \\ = \frac{\lambda L^3}{24}\left(-\bar{M} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 T(o^+)}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 T(o^-)}{\partial n^3}\right)\right) = \frac{\lambda L^3}{24}\tilde{M}, \\ \left|\tilde{M}\right| \leqslant M_3 + \frac{2M_3}{6} = \frac{4M_3}{3}. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, погрешность аппроксимации имеет третий порядок относительно размера стороны треугольника.

Определим погрешность, возникающую за счет неточности определения температуры в центрах треугольников. Разложим $T(x, y)$ в ряд в окрестности центра треугольника

$$\begin{aligned} T(x, y) = T(x_0, y_0) + \frac{\partial T(o)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial T(o)}{\partial y}\,dy + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T(\bar{o})}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 T(\bar{o})}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 T(\bar{o})}{\partial y^2}\,dy^2\right), \end{aligned} \tag{16}$$

Проинтегрируем это равенство по площади треугольника:

$$\iint\limits_{S_\Delta} T(x,y)\,dxdy = T(x_0,y_0)S_\Delta + O(L^4). \tag{17}$$

Погрешность последней формулы имеет порядок (L^4) и ей можно пренебречь. Поэтому погрешность аппроксимации при вычислении потока по формулам (3) и (4) для правильных треугольников есть величина порядка L^3.

В случае неправильных треугольников эта погрешность имеет порядок L^2. Действительно, при расчетах по формулам (3) и (4) предполагается, что температура известна в трех точках – $I,\ J,\ K$ (рис.1).

Отсюда определяются три первых коэффициента разложения в ряд температуры

$$T = T_0 + \frac{\partial T(o)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial T(o)}{\partial y}\,dy + \ldots. \tag{18}$$

В предположении линейности распределения температуры в элементах, это равносильно отбрасыванию членов второго порядка в последнем разложении, а это определяет второй порядок аппроксимации.

Сходимость метода. Пусть $\{\Theta_m\} \in \Re_m,\ \{q_n\} \in \Re_n$ – переменные внутренних энергий и потоков (в дальнейшем будем писать их без фигурных скобок), $g \in \Re_m$ – переменная внешних потоков (для внутренних элементов $g_k = 0$). Для граничных элементов потоки g_i войдут в качестве слагаемых в правую часть формулы (7). Точные значения величин будем помечать чертой сверху.

Начальное распределение температуры $\Theta_0 = \bar{\Theta}_0$. На первом шаге находим

$$\begin{aligned}
Q_1 &= B\Theta_0,\\
\Theta_1 &= \Theta_0 + AQ_1 + g_1 = (E+AB)\Theta_0 + g_1,\\
\tilde{Q}_1 &= B\Theta_0 + \delta Q_1 = Q_1 + \delta Q_1,\\
\bar{\Theta}_1 &= \Theta_0 + A\bar{Q}_1 + g_1 = (E+AB)\Theta_0 + A\delta Q_1 + g_1 = \Theta_1 + A\delta Q_1,
\end{aligned}$$

где E – единичная матрица. Погрешность в определении потока $\delta Q_1 = \bar{Q}_1 - Q_1$ обусловлена неточностью формул (3), (4) и (5). При доказательстве устойчивости схемы по начальным данным аппроксимацию граничных условий можно считать точной.

На первом шаге по времени совершается ошибка $\bar{\Theta}_1 - \Theta_1 = A\delta Q_1$.

Аналогично на следующей итерации

$$\begin{aligned}
&Q_2 = B\Theta_1,\\
&\Theta_2 = \Theta_1 + AQ_2 + g_2,\\
&\bar{Q}_2 = B\bar{\Theta}_1 + \delta Q_2 = B\Theta_1 + AB\delta Q_1 + \delta Q_2,\\
&\bar{\Theta}_2 = \bar{\Theta}_1 + AQ_2 + g_2 = \Theta_2 + (E + AB)A\delta Q_1 + \delta Q_2,\\
&\bar{\Theta}_2 - \Theta_2 = (E + AB)A\delta Q_1 + A\delta Q_2.
\end{aligned}$$

Пусть $C = E + AB$. По индукции получаем формулу для погрешности на k-ом шаге

$$\bar{\Theta}_k - \Theta_k = C^{k-1}A\delta Q_1 + C^{k-2}A\delta Q_2 + \ldots + A\delta Q_k. \tag{19}$$

В качестве норм векторов X и матриц Y возьмем следующие:

$$\|X\| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|, \quad \|Y\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |y_{ij}|.$$

Эти нормы являются согласованными: $\|YX\| \leqslant \|Y\| \cdot \|X\|$.

Получить оценку погрешности непосредственно из формулы (19) не удается, так как $\|C\| \geqslant 1$, поэтому оценим величины $A \cdot \delta Q_i$, $i = 1, \ldots, k$. Так как погрешность при вычислении потока не превосходит L^2, то

$$\|\delta Q_i\| \leqslant \xi\lambda M_2 L^2, \quad \xi = \mathrm{Const}, \quad \left|\frac{\partial^2 T}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right| \leqslant M_2, \quad \alpha + \beta = 2. \tag{20}$$

Учитывая последнюю формулу, получим

$$\|A \cdot \delta Q_i\| \leqslant \|A\| \cdot \|\delta Q_i\| \leqslant \|A\|\xi\lambda M_2 L^2 = \eta, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Между векторами внутренних энергий и температур матричным равенством $\Theta = S \cdot T$, где S – диагональная матрица площадей треугольников с элементами $s_{ii} = \frac{\lambda}{a} S_i$, $i = 1, \ldots, n$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. При этом $T = S^{-1}\Theta$. Преобразуем равенство (19):

$$\begin{aligned}
\delta\bar{T}_k = \bar{T}_k - T_k = S^{-1}(C^{k-1}A\delta Q_1 + \ldots + A\delta Q_k) = \\
= (S^{-1}CS)^{k-1}(S^{-1}A\delta Q_1) + \ldots + S^{-1}A\delta Q_k.
\end{aligned}$$

Обозначим $G = S^{-1}CS$ – матрицу перехода для вектора T: $T^{k+1} = GT^k$. При нулевых граничных условиях $\tilde{T} = G\tilde{T}$, откуда $\|G\| \geqslant 1$. Можно показать, что при выполнении условий $\Delta t/L^2 < R$, где R – положительная постоянная, $\|G\| = 1$. При выполнении последнего условия матрица перехода вычислительной схемы $T^{k+1} = GT^k$, $T^0 = T_0$, имеет норму, равную 1. Поэтому

$$\|T^k\| \leqslant \|T_i\|, \quad \|\Theta^k\| \leqslant \|S\| \|T^k\| \leqslant \|S\| \|T_i\| \leqslant \|S\| \|S^{-1}\| \|\Theta_i\|,$$

откуда

$$\|T^k\| \leqslant \|T_0\|, \quad \|\Theta^k\| \leqslant \|S\| \|S^{-1}\| \|\Theta_0\|. \tag{21}$$

Схема метода является линейной и позволяет применять результаты, пригодные для других явных схем, например, приведенные в [1].

Метод балансов может быть применен для решения уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. При этом необходимо определять тепло- и температуропроводность на каждом шаге по времени и следить за равенством потоков на границах элементов.

Для проверки точности вычислительной схемы получено аналитическое решение нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\lambda}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

в виде $T = (\delta t + \alpha x + \beta y + \gamma)^n$, причем предполагали следующие зависимости $\lambda = \lambda_0 T^\sigma$, $a = a_0 T^\mu$, где λ_0, a_0, σ, μ – некотоые константы. Уравнение теплопроводности дает связь между ними

$$n = \frac{1}{\mu}, \quad \frac{a_0}{\sigma} = \frac{\mu}{(\sigma + 1 - \mu)(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

С помощью аналитического решения протестирован метод балансов. Погрешность метода исследовали для области, граница которой в полярных координатах задается уравнеием $r(\varphi) = a + b\cos\varphi$, $a - b > 0$.

Граничное условие второго рода задается через градиент температуры. Если в соответствии с точным решением вычислить начальное распределение температуры, то поставлена задача теплопроводности с известным решением. Получено, что относительная погрешность расчетов менее 2% вблизи границы области и 1,5% внутри.

Разработанный метод применен для решения задачи нагрева слитков в нагревательной печи. Проведены расчеты нагрева изделий шести – и восьмиугольной формы. Площадь сечения изделий во всех вариантах расчетов равна площади круга диаметром 0,5 м. Тепловой поток на поверхность металла задавали с помощью зависимости

$$q(\varphi, t) = \bar{q}(t) + \Delta q(t) \left(0,467 - 2\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^4\right).$$

Значения среднего теплового потока $\bar{q}(t)$ приняты в соответствии с реальными скоростями нагрева металла в печах. На режиме подъема температуры $\bar{q} = 2,3 \bullet 10^4 Вт/м^2$ – для нагревательных, $\bar{q} = 1,4 \bullet 10^4 Вт/м^2$ – для термических печей. На режиме выдержки

$$\bar{q}_в(t) = 4\bar{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\mu_n^2 \frac{a(t-t_n)}{R^2}\right)}{\mu_n^2}, \quad Вт/м^2,$$

где μ_n – корни уравнения $I_0(\mu) = 0$, t_n – время подъёма температуры металла, сек. Рассмотрены два способа задания неравномерности теплового потока по поверхности. Первый из них соответствует максимальной неравномерности нагрева в начальный момент времени и уменьшение её до нуля при переходе к режиму выдержки, второй – максимальной неравномерности в середине периода подъёма температуры.

Проведено сравнение результатов расчетов полей температуры для тел круглой, шести- и восьмигранной формы. В таблице 1 приведены значения наибольшего за период нагрева перепада температуры по поверхности и сечению для различных значений неравномерности теплового потока. Видно, что влияние формы слитков на создание в них перепада температуры значительно меньше, чем неравномерности теплового потока.

Таблица 1. Значения максимального перепада температуры, (^{0}C), по поверхности и сечению нагреваемых изделий различной формы

Форма слитка	$\Delta q = 0$		$\Delta q = 0{,}66 \cdot 10^4$ $Вт/м^2$		$\Delta q = 1{,}33 \cdot 10^4$ $Вт/м^2$		$\Delta q = 1{,}98 \cdot 10^4$ $Вт/м^2$	
	$\Delta T_{пов}$	$\Delta T_{сеч}$	$\Delta T_{пов}$	$\Delta T_{сеч}$	$\Delta T_{пов}$	$\Delta T_{сеч}$	$\Delta T_{пов}$	$\Delta T_{сеч}$
Цилиндрическая	0	162	110	227	215	295	320	387
Шестигранная	0	170	104	235	203	281	307	364
Восьмигранная	0	167	106	232	210	289	312	379

Литература

[1] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.