*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 1, 2001*
*Электронный журнал,*
*рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal*
*e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

*Групповой анализ дифференциальных уравнений*

# ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА СО СТУПЕНЧАТОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В.М.Лагодинский

**Аннотация.**

Строится теория линейных уравнений, оператор которых является суммой оператора умножения на кусочно постоянную функцию и голоморфной функции оператора дифференцирования (независимая переменная считается вещественной).

## 1 ВВЕДЕНИЕ

В работах автора [1–3] начато построение обобщения теории линейных дифференциальных уравнений на случай бесконечного порядка, причем выбирается такой способ обобщения, который сохраняет свойства дифференциальных уравнений, наиболее важные для приложений. Это, во-первых, локальность, во-вторых, возможность задания краевых задач, имеющих полуограниченный вещественный спектр.

Локальность дифференциальных уравнений связана с тем, что в них входят лишь классические производные, определяемые с помощью предельного перехода:

$$\partial_x u(x) = u'(x) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{u(x+\alpha)-u(x)}{\alpha},$$

а не обобщенные производные, определение которых включает интеграл [4]. Оператор обыкновенного дифференциального уравнения конечного порядка $n$ определен на пространстве $C^n(P)$, где $P$ — промежуток, на котором задано уравнение, он может быть открытым, замкнутым или полуоткрытым. Если такой оператор имеет постоянные коэффициенты, его можно рассматривать как полином $n$-ой степени от оператора дифференцирования:

$$p_n(\partial_x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial_x^i, \tag{1}$$

где $\{a_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{C}$.

Естественным путем обобщения теории обыкновенных дифференциальных уравнений конечного порядка $n$ вида

$$\big(p_n(\partial_x)u\big)(x) + U(x)u(x) = V(x), \qquad \forall x \in P, \tag{2}$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — известные комплекснозначные функции, представляется замена оператора (1) на “голоморфную функцию оператора дифференцирования” $f(\partial_x)$ (определение этого класса локальных операторов дано в работе [2]). Тем самым (2) заменяется на

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) + U(x)u(x) = V(x), \qquad \forall x \in P. \tag{3}$$

Как и раньше [2,3], будем считать, что символ $f(z)$ — функция, определенная на $G \subseteq \mathbb{C}$, голоморфная на $G^0 \ni 0$ (любой круг с центром в $z \in G$ содержит точки из $G^0$) и принимающая все значения из $F \subseteq \mathbb{C}$, имеет на $\mathbb{C}$ лишь конечное число нулей и не имеет на $\mathbb{C}$ ни полюсов, ни устранимых особых точек, ни существенно особых точек, ни точек ветвления логарифмического типа ($f(z)$ либо целая функция, либо имеет только точки ветвления конечного порядка). Каждая точка ветвления соединена прямолинейным разрезом с бесконечно удаленной точкой таким образом, что точка $z = 0$ находится на продолжении любого разреза за соответствующую точку ветвления. Поэтому значение функции $f(z)$ в любой точке ее области определения можно получить однозначным образом, разложив сначала функцию $f(\alpha z)$ при достаточно малом $\alpha$ в степенной ряд Тейлора с центром в нуле, а затем выполнив аналитическое продолжение этого ряда по параметру $\alpha$ по вещественной оси до $\alpha = 1$ (“$\alpha$-продолжение” [2]). Множество таких символов обозначаем через $S$.

Заменив в упомянутом ряде Тейлора степени $z$ на степени оператора дифференцирования $\partial_x$, получаем дифференциальный оператор бесконечного порядка:

$$f(\alpha\partial_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} u^{(n)}(x). \tag{4}$$

Мы называем [2] $f(\partial_x)$-отображаемыми в точке $x \in \mathbb{R}$ функции $u(x)$, для каждой из которых существует такое $\alpha_0 \in (0, 1]$, что ряд

$$\big(f(\alpha\partial_x)u\big)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} u^{(n)}(x)$$

абсолютно сходится при всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$ и допускает $\alpha$-продолжение. Это $\alpha$-продолжение и считается значением функции $f(\partial_x)u$ в точке $x$.

В работе [2] рассмотрены основные свойства голоморфных функций локальных операторов, а в работе [3] — основные свойства линейных уравнений вида:

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) = V(x), \qquad \forall x \in P \subseteq \mathbb{R}, \tag{5}$$

где $V(x)$ — известная функция. Там показано, что такие уравнения имеют решения только в том случае, если $V(x)$ — $f(\partial_x)$-отображаемая функция. Если, к тому же, символ $f(z)$ не имеет нулей, то это уравнение имеет единственное решение (оператор $f(\partial_x)$ имеет обратный), в противном случае (если нули есть, то есть характеристическое уравнение $f(z) = 0$ имеет корни), то соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения, число линейно независимых решений этого уравнения равно числу нулей символа $f(z)$ и, значит, конечно (в $S$ не входят функции вида $f(z) = \exp(az)$, имеющие бесконечно много нулей, следовательно, уравнения с отклоняющимся аргументом, теории которых посвящена обширная литература, здесь рассматриваться не будут).

Как было показано в работе [3], если в (5) символ оператора имеет конечное ненулевое число нулей, а $V(x)$ — $f(\partial_x)$-отображаемая функция, то для (5) существует обыкновенное линейное дифференциальное уравнение конечного порядка с постоянными коэффициентами, такое, что множество решений этого уравнения совпадает с множеством решений уравнения (5). Тем самым оказывается, что в рассматриваемом случае, во-первых, линейное дифференциальное уравнение бесконечного порядка (5) имеет конечное число линейно независимых решений, во-вторых, все его решения могут быть легко найдены. Отсюда следует, казалось бы, что и теория начальных и краевых задач для уравнения (5) уже содержится в теории таких задач для соответствующего уравнения конечного порядка. Это, однако, не так по двум причинам: во-первых, начальные и краевые условия теперь могут задаваться и с помощью голоморфных функций оператора дифференцирования, во-вторых, что касается краевых задач, для приложений важно исследование задач типа Штурма-Лиувилля [5] (в (5) с $V(x) \equiv 0$ вводится спектральный параметр $\lambda$:

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) - \lambda u(x) = 0, \qquad \forall x \in P, \tag{6}$$

задаются некоторые краевые условия и выясняется, при каких значениях $\lambda$ (6) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие этим условиям), но уравнение конечного порядка, соответствующее уравнению (6), имеет, вообще говоря, другой спектральный параметр $\mu$, связанный с $\lambda$ некоторой функциональной зависимостью $\lambda = \lambda(\mu)$, определяемой символом $f(z)$, и может случиться, что при некотором $\mu_0$, принадлежащем спектру данной краевой задачи для уравнения конечного порядка, соответствующего уравнению (6), $\lambda(\mu_0)$ не входит в область значений функции $f(z)$, а поэтому заведомо не может принадлежать спектру какой бы то ни было краевой задачи для уравнения (6). Тогда, если данная краевая задача для этого уравнения конечного порядка имеет ортогональную систему собственных функций, полную в некотором гильбертовом пространстве, то система собственных функций, соответствующая краевой задаче для уравнения (6), будет ортогональной, но неполной. В работе [3] приведены примеры краевых задач для уравнения вида (6), в которых эта трудность не возникает, случай же, в котором она имеет место, именно $P = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, оставлен для дальнейшего изучения.

В этой работе будет рассмотрен более широкий класс краевых задач. Каждую задачу из него можно представить как краевую задачу для уравнения вида (3) с правой частью $V(x) \equiv 0$ и кусочно постоянной потенциальной функцией $U(x)$. Эти краевые задачи аналогичны модельным задачам квантовой механики о состояниях частицы в пространстве с кусочно постоянным потенциалом, которые описывают, например, отражение частицы от скачка потенциала, потенциальных барьера или ямы и состояния частицы в прямоугольной яме конечной глубины [6].

# 2 УСЛОВИЯ В ТОЧКАХ СКАЧКОВ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим уравнение:

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) + U(x)u(x) - \lambda u(x) = 0, \qquad \forall x \in P \subseteq \mathbb{R}, \tag{7}$$

где $f(\partial_x)$ — голоморфная функция оператора дифференцирования, а потенциальная функция $U(x)$ вещественна и имеет ступенчатый вид, то есть $P$ разбивается на $s \in \mathbb{N}$ промежутков точками из $X = \{x_n\}_1^{s-1}$, так что $P = \cup_{n=1}^{s} P_n$, $P_1 = \{x \in P : x \leqslant x_1\}$, $P_n = (x_{n-1}, x_n]$, $n = 2, \ldots, s-1$, $P_s = \{x \in P : x > x_{s-1}\}$, при этом $U(x) = U_n$, $\forall x \in P_n$ ($U(x)$ непрерывна слева), промежутки с одинаковыми $U_n$ не соседствуют между собой. Обозначим: $N = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n \leqslant s\}$.

Пусть сначала все $U_n$, $n \in N$, таковы, что $\lambda - U_n \notin F$. Тогда сужение (7) на любой из промежутков $P_n$ имеет лишь тривиальное решение. Очевидно, в этом случае можно считать, что (7) также имеет лишь тривиальное решение. В противном случае сужения (7) на некоторые или все промежутки $P_n$ имеют нетривиальные решения, но (7) не может иметь нетривиальных решений в смысле определения 2 работы [3], определенных, например, на $P_n \cup P_{n+1}$ ($n < s$). Действительно, согласно этому определению, решение $u(x)$ должно быть $f(\partial_x)$-отображаемым на $P$, но если это так, то функция $\big(f(\partial_x)u\big)(x)$ $f(\partial_x)$-отображаема на $P_n \cup P_{n+1}$, а $U(x)u(x)$ — нет (она разрывна, в то время как все $f(\partial_x)$-отображаемые на $P_n \cup P_{n+1}$ функции непрерывны на $P_n \cup P_{n+1}$). В сущности, здесь ситуация точно та же, как и для уравнения конечного порядка, один из коэффициентов которого имеет в некоторой точке разрыв первого рода: старшая производная решения не может иметь определенного значения в этой точке, поэтому, рассматривая такие уравнения конечного порядка, не требуют существования старшей производной в этой точке, в ней лишь требуется непрерывность решения и его производных порядка меньшего, чем порядок старшей производной. Например, если в уравнении

$$-u''(x) + U(x)u(x) - \lambda u(x) = 0, \qquad \forall x \in P, \tag{8}$$

$U(x) = U_1$, $\forall x \in P_1$ и $U(x) = U_2$, $\forall x \in P_2$, где $P_1 = \{x \in P : x < x_0\}$, $P_2 = P \setminus P_1$, $U_1 \neq U_2$, $x_0$ — внутренняя точка $P$, то решением называют функцию, которая удовлетворяет сужениям (8) на $P_1$ и $P_2$ и непрерывна вместе с первой производной на $P$, то есть и при $x = x_0$.

Естественно было бы и решением уравнения (7) на $Q \subseteq P$ называть функцию, определенную и непрерывную на $Q$ и удовлетворяющую сужениям уравнения (7) на промежутки непрерывности функции $U(x)$, входящие в $Q$, и некоторым условиям непрерывности в точках скачков функции $U(x)$, входящих в $Q$. Это, однако, не могут быть условия непрерывности производных решения всех порядков, меньших, чем порядок старшей производной, поскольку в (7) таковой нет, а все производные решения (7) в точках скачков функции $U(x)$ непрерывными быть не могут.

Так как в приложениях теории краевых задач для уравнений конечного порядка чаще всего встречаются задачи Штурма-Лиувилля, можно думать, что наибольший интерес для приложений должны представлять уравнения вида (7) эффективного порядка [3], равного двум, которые позволяют ставить краевые задачи, достаточно близкие по своим свойствам задачам Штурма-Лиувилля для уравнений второго порядка, то есть имеющие вещественный спектр, неограниченный сверху и ограниченный снизу, и собственные функции, по которым можно раскладывать функции, принадлежащие определенным гильбертовым пространствам. Поэтому прежде всего, по-видимому, необходимо выделить множество $T \subset S$ символов, которым операторы, допускающие возможность построения теории, аналогичной теории Штурма-Лиувилля, и уже для этого класса операторов сформулировать такие условия в точках скачков функции $U(x)$ и в краевых точках, которые приводят к такой теории.

Вернемся к уравнению (8), положив в нем $U(x) \equiv 0$. Рассмотрим его характеристическое уравнение

$$-z^2 = \lambda. \tag{9}$$

Легко видеть, что вещественность спектра, его неограниченность сверху и ограниченность снизу связаны с тем, что (9) имеет два корня, различающихся лишь знаком, при любом $\lambda \in \mathbb{C}$: $z = \pm i\sqrt{\lambda}$ (при $\lambda = 0$ корни сливаются в один), причем квадраты корней вещественны лишь при $\lambda \in \mathbb{R}$, при комплексно сопряженных $\lambda$ корни комплексно сопряженны, при $\lambda \in (0, \infty)$ корни чисто мнимые, а при $\lambda \in (-\infty, 0]$ — вещественные.

Ортогональность собственных функций краевых задач для уравнения (8) связана с одномерной формулой Грина, справедливой для любых функций $u(x)$ и $v(x)$, дважды дифференцируемых на $[a,b] \subset \mathbb{R}$:

$$\int_a^b [u(x)v''(x) - u''(x)v(x)]\,dx = [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]\Big|_a^b. \tag{10}$$

Поэтому множество $T$ должно включать символы, похожие на $-z^2$ тем, что соответствующие операторы приводят к характеристическому уравнению со свойствами, близкими свойствам уравнения (9), и к некоторому обобщению формулы (10). При этом, поскольку допускаются неполиномиальные $f(z)$, они могут быть определены не на всем $\mathbb{C}$.

Не стремясь к максимальной общности, отнесем к множеству $T$ символы вида $f(z) = (z_0^2 - z^2)^{1/k}$, где $k \in \mathbb{N}$, $z_0 > 0$. Если здесь $k = 1$, то $f(z)$ не имеет особых точек, область определения $G = \mathbb{C}$, область голоморфности $G^0 = G$, а $f(\partial_x)$ — просто локальный дифференциальный оператор второго порядка. Если же $k > 1$, то $f(z)$ имеет две точки разветвления $z = \pm z_0$ $k$-го порядка, разрезы проводим по интервалам вещественной оси $(-\infty, -z_0)$ и $(z_0, \infty)$: $G = \mathbb{C} \setminus [(-\infty, -z_0] \cup [z_0, \infty)]$, $G^0 = G \setminus [\{z_0\} \cup \{-z_0\}]$, голоморфную ветвь выбираем с помощью условия $f(0) = |z_0|^{2/k}$.

Если $f \in T$ и $k = 1$, то областью значений $F$ функции $f(z)$ является вся плоскость $\mathbb{C}$, если же $k > 1$, то $F = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ (значения $z$, при которых функция $f(z)$ могла бы принимать отрицательные вещественные значения, расположены на разрезах). Уравнение $f(z) = \lambda$ имеет два корня, одинаковых по модулю и различающихся знаком, при любом $\lambda \in F \setminus \{f(0)\}$, а при $\lambda = f(0)$ — один корень $z = 0$. Если $\lambda \in F \cap \mathbb{R}$, то при $\lambda > f(0)$ корни чисто мнимые, а при $0 \leqslant \lambda \leqslant f(0)$ — вещественные. Если же $\lambda \notin F$, то это уравнение, естественно, корней не имеет.

В дальнейшем считаем, что в (7) оператор $f(\partial_x)$ имеет символ из $T$. Тогда если $\lambda - U_n \notin F$, то сужение (7) на $P_n$ имеет лишь тривиальное решение, а если $\lambda - U_n \in F$, то сужению (7) на $P_n$ соответствует уравнение второго порядка [3]:

$$u''(x) - z_n^2(\lambda)u(x) = 0, \qquad \forall x \in P_n, \tag{11}$$

где

$$z_n(\lambda) = \sqrt{z_0^2 - (\lambda - U_n)^k}. \tag{12}$$

Общее решение этого уравнения, то есть общее решение сужения (7) на $P_n$, в случае, когда $z_n(\lambda) \neq 0$, можно записать в виде:

$$u(\lambda, x) = A_n(\lambda)\exp[z_n(\lambda)x] + B_n(\lambda)\exp[-z_n(\lambda)x], \qquad \forall x \in P_n,\ n \in N. \tag{13}$$

Если же $\lambda = U_n + f(0)$ $(z_n(\lambda) = 0)$, то (11) имеет решения вида

$$u[U_n + f(0), x] = C_n[U_n + f(0)] + D_n[U_n + f(0)]x, \qquad \forall x \in P_n. \tag{14}$$

Пусть $g_l(z) \equiv [f(z)]^l \equiv (z_0^2 - z^2)^{l/k}$ $(l \in \mathbb{Z})$, $h(z) \equiv z g_{1-k}(z)$. Очевидно, $h(z)$ и $g_l(z)$ являются символами из $S$. Любая $h(\partial_x)$-отображаемая функция является $g_l(\partial_x)$-отображаемой при любом целом $l$ [2], будем такие функции называть также $h$-функциями, а если такая функция является нетривиальным решением сужения (7), то будем ее называть и $h$-решением этого сужения. Легко видеть, что $h(z)$ обращается в нуль только при $z = 0$.

Для того, чтобы сужение (7) на $P_n$ имело $h$-решения, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda - U_n \in F^0$, где $F^0 = F \setminus \{0\}$.

Покажем, что для операторов с символами из $T$ справедлива формула, аналогичная формуле (10), и ее следствия, аналогичные тем следствиям формулы (10), на которых основана теория Штурма-Лиувилля [5].

Лемма 1. *Пусть $f \in T$, а $u(x)$ и $v(x)$ — $h$-функции на $[c, d] \subset \mathbb{R}$, тогда справедлива обобщенная формула Грина*

$$\langle u, f(\partial_x)v\rangle_c^d - \langle v, f(\partial_x)u\rangle_c^d = L[d; u, v] - L[c; u, v], \tag{15}$$

где

$$\langle u_1, u_2\rangle_c^d = \int_c^d \Big[u_1(x)u_2(x) + \\ + z_0^2 \sum_{l=0}^{k-2} \big(g_{l-k+1}(\partial_x)u_1\big)(x)\big(g_{-l-1}(\partial_x)u_2\big)(x) + \\ + \sum_{l=0}^{k-2} \big(g_{l-k+1}(\partial_x)u_1'\big)(x)\big(g_{-l-1}(\partial_x)u_2'\big)(x)\Big]\, dx, \tag{16}$$

$$L[x; u, v] = u(x)\big(h(\partial_x)v\big)(x) - v(x)\big(h(\partial_x)u\big)(x). \tag{17}$$

Доказательство. Используя изоморфность кольца символов, голоморфных в некоторой области, кольцу соответствующих им операторов [2] и формулу Грина (10), получаем:

$$\int_c^d \big[u(x)\big(f(\partial_x)v\big)(x) - v(x)\big(f(\partial_x)u\big)(x)\big]\,dx =$$
$$= \int_c^d \big[u(x)(z_0^2 - \partial_x^2)\big(g_{1-k}(\partial_x)v\big)(x) - v(x)(z_0^2 - \partial_x^2)\big(g_{1-k}(\partial_x)u\big)(x)\big]\,dx =$$
$$= \int_c^d \big\{z_0^2[u(x)\big(g_{1-k}(\partial_x)v\big)(x) + v(x)\big(g_{1-n}(\partial_x)u\big)(x)]+$$
$$+ u'(x)\big(g_{1-k}(\partial_x)v'\big)(x) - v'(x)\big(g_{1-k}(\partial_x)u'\big)(x)\big\}\,dx -$$
$$- \big[u'(x)\big(g_{1-k}(\partial_x)v'\big)(x) - v'(x)\big(g_{1-k}(\partial_x)u'\big)(x)\big]\Big|_c^d. \quad (18)$$

Но для любых $h$-функций $w_1(x)$ и $w_2(x)$ справедливо равенство:

$$\big(g_{k-1}(\partial_x)w_1\big)(x)w_2(x) - w_1(x)\big(g_{k-1}(\partial_x)w_2\big)(x) =$$
$$= \sum_{l=0}^{k-2}\Big[\big(g_l(\partial_x)w_1\big)(x)\Big(g_{k-2-l}(\partial_x)\big(f(\partial_x)w_2\big)\Big)(x) -$$
$$- \Big(g_{k-2-l}(\partial_x)\big(f(\partial_x)w_1\big)\Big)(x)\big(g_l(\partial_x)w_2\big)(x)\Big],$$

поскольку все остальные слагаемые в правой части взаимно сокращаются. В частности, оно справедливо при

$$w_1(x) = \big(g_{1-k}(\partial_x)u\big)(x), \qquad w_2(x) = \big(g_{1-k}(\partial_x)v\big)(x)$$

и при

$$w_1(x) = \big(g_{1-k}(\partial_x)u'\big)(x), \qquad w_2(x) = \big(g_{1-k}(\partial_x)v'\big)(x).$$

Подставив это в (18), получим (15). Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения сужения на $P_n$ уравнения (7) с $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ соответственно, $\lambda_1$, $\lambda_2 \in F^0$, $c$, $d \in P_n$, тогда*

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2\rangle_c^d = L[d; u_1, u_2] - L[c; u_1, u_2]. \quad (19)$$

Следствие 2. *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения сужения на $P_n$ уравнения (7) с одним и тем же $\lambda \in F^0$, тогда функция $L[x; u_1, u_2]$ постоянна на $P_n$.*

Следствие 3. *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения сужения на $P_n$ уравнения (7) с $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ соответственно, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1$, $\lambda_2 \in F^0$, $c$, $d \in P_n$, $L[c; u_1, u_2] = L[d; u_1, u_2]$, тогда $\langle u_1, u_2\rangle_c^d = 0$.*

Следствие 4. *Пусть* $u(x) \not\equiv 0$ — *решение сужения на* $P_n$ *уравнения* (7) *с* $\lambda = \lambda_0 \in F^0$, $c$, $d \in P_n$, $L[c; u^*, u] = L[d; u^*, u]$, *тогда* $\operatorname{Im}\lambda_0 = 0$.

Доказательство. Предположим обратное, то есть $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$. Так как $\big[\big(f(\partial_x)u\big)(x)\big]^* \equiv \big(f(\partial_x)u^*\big)(x)$, то $u^*(x)$ — решение сужения на $P_n$ уравнения (7) с $\lambda = \lambda_0^*$. Тогда из следствия 1 получаем

$$(\lambda_0 - \lambda_0^*)\langle u^*, u\rangle_c^d = 0,$$

но поскольку $\langle u^*, u\rangle_c^d > 0$, то$(\lambda_0 - \lambda_0^*) = 0$. Следствие 4 доказано.

Легко заметить, что здесь симметричная билинейная форма (16) соответствует интегралу

$$\int_c^d u_1(x)u_2(x)\,dx,$$

используемому в обычной теории Штурма-Лиувилля, а функция (17) — вронскиану (она имеет вид определителя). И (16), и (17) определены не для всех $f(\partial_x)$-отображаемых функций, а лишь для $h$-функций.

Пример 1. Пусть символ $f(z) = \sqrt{1-z^2}$ $(k = 2)$ определен на $\mathbb{C} \setminus [(-\infty, -1) \cup (1, \infty)]$, причем $f(0) = 1$ (тогда уравнение (7) — одномерное стационарное релятивистское уравнение Шредингера для частицы единичной массы [1–3]). Характеристическое уравнение $f(z) = \lambda - U_n$ имеет корни из $G^0$, если $\lambda - U_n > 0$: $z = \pm\sqrt{(\lambda - U_n)^2 - 1}$. Если $\lambda - U_n \geqslant 1$, корни чисто мнимые, если $\lambda - U_n \leqslant 1$, корни вещественные. Пусть $\lambda - U_n \geqslant 1$, положим $p = iz$. Выберем $u_1(x) = A\exp(ipx)$, $u_2(x) = u_1^*(x) = A^*\exp(-ipx)$, $\forall x \in P_n$. Так как

$$\big(h(\partial_x)u_1\big)(x) = iA\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \big(h(\partial_x)u_2\big)(x) = -iA^*\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

то

$$L[x; u_1^*, u_2] = 2i|A|^2\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \forall x \in P_n.$$

Обобщенная формула Грина имеет вид:

$$\int_c^d \left[u(x)\sqrt{1-\partial_x^2}v(x)+v(x)(1-\partial_x^2)^{-1/2}u(x)+ +v'(x)(1-\partial_x^2)^{-1/2}u'(x)-\right.$$
$$\left.-v(x)\sqrt{1-\partial_x^2}u(x)-u(x)(1-\partial_x^2)^{-1/2}v(x)+u'(x)(1-\partial_x^2)^{-1/2}v'(x)\right]dx=$$
$$=u(d)\left(\frac{\partial_x}{\sqrt{1-\partial_x^2}}v\right)(d)-v(d)\left(\frac{\partial_x}{\sqrt{1-\partial_x^2}}u\right)(d)-$$
$$-u(c)\left(\frac{\partial_x}{\sqrt{1-\partial_x^2}}v\right)(c)+v(c)\left(\frac{\partial_x}{\sqrt{1-\partial_x^2}}u\right)(c),$$

Но величина

$$v=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

в механике теории относительности — это скорость частицы с импульсом $p$ и массой, равной единице (если скорость света принята за единицу). Отсюда видно, что функция $L[x;u^*,u]$ — это с точностью до постоянного множителя плотность потока частиц.

Рассмотренный пример подсказывает наиболее естественные условия в точках, где потенциальная функция $U(x)$ имеет скачки. Это такие условия, которые приводят к непрерывности функции $L[x;u^*,u]$. Но такие условия могут быть наложены только на $h$-решения (7). Поэтому будем считать, что если сужение (7) на $P_n$ не имеет $h$-решений (а это будет в том случае, если уравнение $\lambda-U_n\notin F^0$), то оно имеет только тривиальное решение.

Примем следующее

Определение 1. *Решением уравнения (7) на промежутке $Q\subset P$ называется комплекснозначная функция $u(x)$, опрелеленная на $Q$ и обладающая следующими свойствами:*

*1) сужение $u(x)$ на любой из промежутков постоянства потенциальной функции $U(x)$, входящий в $Q$, является решением сужения (7) на этот промежуток, в частности, если $\lambda-U(x)\notin F^0$ на этом промежутке, то $u(x)\equiv 0$ на этом промежутке;*

*2) если $y$ — внутренняя точка промежутка $Q$, в которой функция $U(x)$ имеет скачок, то в ней выполняются условия:*

$$\lim_{\delta\to 0}[u(y+|\delta|)-u(y-|\delta|)]=$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\Big[\big(h(\partial_x)u\big)(y+|\delta|)-\big(h(\partial_x)u\big)(y-|\delta|)\Big]=0. \quad (20)$$

Примем также новое определение задачи Коши.

Определение 2. *Задачей Коши для уравнения (7) называется задача, в которой требуется найти решение (7) $u_\lambda(x)$, определенное на заданном промежутке $Q \subset P$ и удовлетворяющая условиям*

$$u_\lambda(x_0) = u_0, \qquad \big(h(\partial_x)u\big)(\lambda, x_0) = v_0, \tag{21}$$

*где $x_0 \in Q$, $u_0 \in \mathbb{C}$, $v_0 \in \mathbb{C}$.*

Теорема 1. *Пусть $Q \in P$ — промежуток, ограниченный точками $c \in P_{n_1}$ и $d \in P_{n_2}$ $(0 < n_1 \leqslant n_2 < s+1)$, $n_1 \leqslant m \leqslant n_2$, $x_0 \in P_m$, $N_1 = \{n : 0 < n_1 \leqslant n \leqslant n_2 < s+1$, $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - U_n \in F^0, \forall n \in N_1\}$. Если $\lambda \in \Lambda$, то задача Коши, определенная условиями (21), имеет единственное решение, причем оно голоморфно зависит от $\lambda$, если же $\lambda - U_n \notin F^0$ хотя бы для одного $n \in N_1$, то эта задача имеет решение, только если $u_0 = v_0 = 0$, причем это решение тождественно равно нулю на $Q$.*

Доказательство. Пусть сначала $\lambda - U_n \in F^0$ для всех $n \in N_1$, $z_n \neq 0$ — положительный корень уравнения $f(z) = \lambda - U_n$, $n \in N$. Если $\lambda - U_m \neq f(0)$, то в согласии с (13) общее решение сужения (7) на $P_m$ можно записать в виде:

$$u_\lambda(x) = C_m \operatorname{ch}(z_m x) + z_m^{-1} D_m \operatorname{sh}(z_m x), \qquad \forall x \in P_m, \tag{22}$$

где $C_m$ и $D_m$ зависят от $\lambda$: $C_m = C_m(\lambda)$, и $D_m = D_m(\lambda)$.

Используя (21), получим систему линейных уравнений относительно $C_m$ и $D_m$:

$$\begin{gathered} C_m \operatorname{ch}(z_m x_0) + z_m^{-1} D_m \operatorname{sh}(z_m x_0) = u_0, \\ h(z_m)[C_m \operatorname{sh}(z_m x_0) - z_m^{-1} D_m \operatorname{ch}(z_m x_0) = v_0. \end{gathered} \tag{23}$$

Определитель этой системы отличен от нуля, и она имеет единственное решение:

$$C_m = u_0 \operatorname{ch}(z_m x_0) - v_0/h_m \operatorname{sh}(z_m x_0), \tag{24}$$

$$D_m = -z_m[u_0 \operatorname{sh}(z_m x_0) + v_0/h_m \operatorname{ch}(z_m x_0)], \tag{25}$$

где

$$h_m = h(z_m) = z_m(z_0^2 - z_m^2)^{1/k-1}. \tag{26}$$

Из (12), (26), (24) и (25) видно, что (22) при $\lambda - U_m \neq f(0)$ — голоморфная функция $\lambda$. Но при $\lambda \to f(0) + U_m$ $z_m \to 0$ и $h_m \to 0$. Легко показать, однако, что

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh}(zx_0)}{h(z)} = z_0^{2-2/k}x_0,$$

поэтому (24) и (25) превращаются в

$$C_m = u_0 - v_0 z_0^{2-2/k}x_0, \qquad D_m = -v_0 z_0^{2-2/k}.$$

Но это тот же результат, который был бы получен, если бы при $\lambda = f(0) + U_m$ сужение решения на $P_m$ было взято в виде (14) с $n = m$. Таким образом, получено сужение решения на $P_m$ и доказана его голоморфность по $\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. На другие промежутки $P_n \subset Q$, $n \neq m$, решение можно однозначным образом продолжить с помощью условий в точках скачков. Пусть $m < n_2 - 1$ и $\lambda \neq f(0) + U_{m+1}$, тогда

$$u_\lambda(x) = C_{m+1}\operatorname{ch}(z_{m+1}x) + z_{m+1}^{-1}D_{m+1}\operatorname{sh}(z_{m+1}x), \qquad \forall x \in P_{m+1},$$

где $C_{m+1}$ и $D_{m+1}$ зависят от $\lambda$: $C_{m+1} = C_{m+1}(\lambda)$, и $D_{m+1} = D_{m+1}(\lambda)$ и удовлетворяют системе, которая в случае, если $\lambda \neq f(0) + U_m$, имеет вид:

$$\begin{gathered} C_{m+1}c_{m+1} + z_{m+1}^{-1}D_{m+1}s_{m+1} = C_m c_m + z_m^{-1}D_m s_m, \\ h_{m+1}[C_{m+1}s_{m+1} - z_{m+1}^{-1}D_{m+1}c_{m+1}] = h_m[C_m s_m - z_m^{-1}D_m c_m], \end{gathered}$$

где $c_l = \operatorname{ch}(z_l x_m)$, $s_l = \operatorname{sh}(z_l, x_m)$, $l = m,\, m+1$. Определитель и этой системы отличен от нуля, поэтому и она имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= C_m(c_{m+1}c_m - \gamma_m s_{m+1}s_m) + z_m^{-1}D_m(c_{m+1}s_m - \gamma_m s_{m+1}c_m), \\ D_{m+1} &= z_{m+1}[C_m(\gamma_m c_{m+1}s_m - s_{m+1}c_m) + D_m(\gamma_m c_{m+1}c_m - s_{m+1}s_m)], \end{aligned}$$

где $\gamma_m = h_m/h_{m+1}$. Это решение голоморфно по $\lambda$ при $\lambda \neq f(0) + U_{m+1}$ и $\lambda \neq f(0) + U_m$ и имеет конечные пределы и при $\lambda \to f(0) + U_{m+1}$, и при $\lambda \to f(0) + U_m$, причем, как легко показать, эти пределы совпадают с теми решениями, которые получаются при $\lambda = f(0) + U_{m+1}$ и при $\lambda = f(0) + U_m$ соответственно, когда сужение решения (7) на соответствующий промежуток берется в виде (14). Таким образом, решение задачи Коши продолжено на промежуток $P_{m+1}$ и показано, что это продолжение голоморфно по $\lambda$ при всех $\lambda \in \Lambda$. Действуя далее аналогично, можно продолжить решение на весь $Q$ и доказать его голоморфность по $\lambda$ при всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть теперь существует такое $n \in N$, что $\lambda - U_n \notin F^0$. Если $Q = P_n$, то $u_\lambda(x) \equiv 0$ по первому пункту определения 1. Если $Q \neq P_n$, то хотя бы один из концов $P_n$ является внутренней точкой $Q$. Пусть это будет $x_n$. Если $\lambda - U_{n+1} \notin F^0$, то и на $P_{n+1} \cap Q$ $u_\lambda(x) \equiv 0$. Пусть $P_l \cap Q \neq \varnothing$, $P_{l+1} \cap Q \neq \varnothing$, $\lambda - U_l \notin F^0$, а $\lambda - U_{l+1} \in F^0$. Тогда

$$u_\lambda(x) = C_{l+1} \operatorname{ch}(z_{l+1}x) + z_{l+1}^{-1} D_{l+1} \operatorname{sh}(z_{l+1}x), \qquad \forall x \in P_{l+1} \cap Q,$$

но, поскольку на $P_l$ $u_\lambda(x) \equiv 0$ и $\big(h(\partial_x)u_\lambda\big)(x) \equiv 0$, то, согласно (20), $C_{l+1} = D_{l+1} = 0$, следовательно, $u_\lambda(x) \equiv 0$ и на $P_{l+1}$. Таким образом, если хотя бы для одного $n \in N_1$ $\lambda - U_n \notin F^0$, то $u_\lambda(x) \equiv 0$ на $Q$. Теорема доказана полностью.

Очевидно, справедлива

Теорема 2. *Если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения уравнения (7) с $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ соответственно, определенные на $Q \subset P$, $N_1 = \{n \in mathbbN : P_n \cap Q \neq \varnothing\}$, и $\lambda_{1,2} > U_n$ для всех $n \in N_1$, то $L[x; u_1, u_2]$ — непрерывная на внутренности $Q$ функция.*

Функция (17) в теории рассматриваемых здесь уравнений играет ту же роль, что и вронскиан в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений конечного порядка [7]. В частности, справедлива

Теорема 3. *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения уравнения (7) на $Q \subset P$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) $L[x; u_1, u_2] = 0$ при всех $x \in Q$;*

*2) $L[x; u_1, u_2] = 0$ при некотором $x \in Q$;*

*3) решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ линейно зависимы на $Q$.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме 3.2.2 из курса [7], надо только вместо системы

$$C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) = 0, \qquad C_1 u_1'(x_0) + C_2 u_2'(x_0) = 0$$

рассматривать систему

$$C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) = 0, \qquad C_1\big(h(\partial_x)u_1\big)(x_0) + C_2\big(h(\partial_x)u_2\big)(x_0) = 0$$

(конечно, $x_0 \in Q$).

# 3 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть (7) задано на $P = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $X = X_1 = \{x_n\}_{n=0}^{s}$ ($x_0 = a$, $x_s = b$) — множество точек, ограничивающих промежутки $P_n$ постоянства кусочно постоянной потенциальной функции $U(x)$. Без ограничения общности примем $U_s = 0$. Сопоставим оператору $f(\partial_x)$ и множеству $X_1$ линейное пространство $W_f(X_1)$ функций, квадратично интегрируемых на каждом из $P_n$ и имеющих квадратично интегрируемые на каждом из $P_n$ $g_l(\partial_x)$-образы и $\partial_x g_l(\partial_x)$-образы $(l \in \{l \in \mathbb{Z} : \max(-k+1,-1) \leqslant l \leqslant \min(-k+1,-1)\})$. Хотя любая функция из $W_f(X_1)$ принадлежит $L^2[a,b]$, $W_f(X_1)$ *не является* подпространством пространства $L^2[a,b]$, поскольку не замкнуто в смысле нормы $L^2[a,b]$. Введем в $W_f(X_1)$ скалярное произведение формулой:

$$(u_1, u_2)_f = \sum_{n=1}^{s} \langle u_1^*, u_2 \rangle_{x_{n-1}}^{x_n}. \tag{27}$$

Легко видеть, что оно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к скалярному произведению в анализе. Норму вводим в соответствии с (27):

$$\|u\|_f = |(u,u)_f|^{1/2}, \qquad \forall u \in W_f(X), \tag{28}$$

Таким образом, $W_f(X_1)$ — предгильбертово пространство.

Теорема 4. *Пусть для уравнения (7) поставлены некоторые однородные линейные вещественные краевые условия. Если из того, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются нетривиальными решениями уравнения (7) на $P$ с $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ соответственно и удовлетворяют этим краевым условиям, следует справедливость равенства:*

$$L[a; u_1, u_2] = L[b; u_1, u_2], \tag{29}$$

*то эта краевая задача имеет нетривиальные решения только при вещественных $\lambda$. В этом случае, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(u_1, u_2)_f = 0$.*

Доказательство. Так $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения (7), а функция $L[x; u_1, u_2]$ непрерывна на $P$, то, используя (19), получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{n=1}^{s} \langle u_1, u_2 \rangle_{x_{n-1}}^{x_n} = L[b; u_1, u_2] - L[a; u_1, u_2]. \tag{30}$$

Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения (7), удовлетворяющее вышеупомянутым краевым условиям, тогда сужение $u^*(x)$ на $P_n$ удовлетворяет сужению (7) с $\lambda^*$ вместо $\lambda$ на $P_n$. В силу вещественности условий в точках скачков $u^*(x)$ — решение (7) с $\lambda^*$ вместо $\lambda$, в силу вещественности краевых условий $u^*(x)$ удовлетворяет этим краевым условиям. Следовательно, если в (30) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda^*$, $u_1(x) \equiv u^*(x)$, $u_2(x) \equiv u(x)$, то в правой части этого равенства — нуль. Но сумма больше нуля, поэтому $\lambda = \lambda^*$.

Таким образом, в (30) $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — вещественные, а в правой части — нуль. Но если $u_1(x)$ удовлетворяет уравнению (7) с $\lambda = \lambda_1$ и всем условиям, то и $u_1^*(x)$ удовлетворяет тому же. Поэтому в (30) можно заменить $u_1(x)$ на $u_1^*(x)$. В соответствии с (30) получаем: $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2)_f = 0$. Если при этом $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то отсюда следует $(u_1, u_2)_f = 0$. Теорема доказана.

Очевидны два типа краевых условий, следствием которых является (29):

$$u(a)\cos\alpha + \big(h(\partial_x)u\big)(a)\sin\alpha = \\ = u(b)\cos\beta + \big(h(\partial_x)u\big)(b)\sin\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (31)$$

и

$$u(a) = u(b), \qquad \big(h(\partial_x)u\big)(a) = \big(h(\partial_x)u\big)(b). \quad (32)$$

Краевые условия (32) — это периодические условия, пользуясь ими, определение решения можно распространить на всю ось $\mathbb{R}$.

Рассмотрим краевые задачи (7), (31) и (7), (32). Как обычно, любое значение $\lambda$, при котором данная краевая задача имеет нетривиальное решение $\varphi(x, \lambda) \not\equiv 0$, то есть существует решение уравнения (7), удовлетворяющее поставленным краевым условиям, будем называть собственным числом этой краевой задачи, а соответствующее решение $\varphi(x, \lambda)$ — ее собственной функцией.

Теорема 5. *Собственные числа краевой задачи (7), (31) или (7), (32) составляют бесконечное множество простых нулей голоморфной функции — изолированных точек вещественной оси, ограниченное снизу и неограниченное сверху, причем если $b - a$ достаточно велико, то в любом интервале $(l_{i-1}, l_i)$, где $l_j = [(j\pi)^2(b-a)^{-2} + z_0^2]^{1/k}$, $j = i-1, i$, $i \in \mathbb{N}$, содержится ровно одно собственное число.*

Доказательство. Вещественность собственных чисел следует из теоремы 4. Из теоремы 3 следует, что если $\lambda$ — собственное число, то $\lambda - U_n \in F^0$, для всех $n \in N$, поэтому множество собственных чисел ограничено снизу. Пусть $u_\lambda(x)$, $v_\lambda(x)$ — решения (7), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} u_\lambda(a) &= \sin\alpha, & \big(h(\partial_x)u_\lambda\big)(a) &= -\cos\alpha, \\ v_\lambda(b) &= \sin\beta, & \big(h(\partial_x)v_\lambda\big)(b) &= -\cos\beta, \end{aligned} \quad (33)$$

Как следует из леммы 1, функция $L[x; u\lambda, v_\lambda] \equiv L(\lambda)$ постоянна на $P$, причем $L(\lambda) = 0$, если и только если $u_\lambda(x)$ и $v_\lambda(x)$ линейно зависимы, то есть $\lambda$ — собственное число. Отсюда следует, что множество собственных чисел задачи (7), (31) — это множество корней уравнения $L(\lambda) = 0$. Поскольку функция $L(\lambda)$ голоморфна, ее нули — изолированные точки $\mathbb{C}$. Пусть $\lambda'$ — одно из собственных чисел задачи (7), (31), и $\lambda'' \neq \lambda'$, тогда из (30) получаем:

$$(\lambda' - \lambda'')(u_{\lambda''}, v_{\lambda'})_f = L[b; u^*_{\lambda''}, v_{\lambda'}].$$

Так как $(u_{\lambda'}, v_{\lambda'})_f \neq 0$, то отсюда видно, что нули функции $L(\lambda)$ — простые. Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > f(0) + U_n$, $\forall n \in N\}$, тогда сужение $u_\lambda(x)$ на $P_s$ можно записать в виде:

$$u_\lambda(x) = A(p)\sin[p(x-a) + \varphi(p)], \qquad \forall x \in P_s,$$

где $p = (\lambda^k - z_0^2)^{1/2}$. Отсюда и из (33) видно, что $\lambda$ — собственное число задачи (7), (31), если

$$\operatorname{tg}[p(b-a) + \varphi(p)] = -v(p)\operatorname{tg}\beta, \tag{34}$$

где $v(p) = -ih(ip) = p(p^2 + z_0^2)^{1/k-1}$. Поскольку $v(p)$ — непрерывная, а $\varphi(p)$ — ограниченная функция, то при $b \gg \varphi(p)/p$ в каждом интервале $((i-1)\pi/b, i\pi/b)$, $i \in \mathbb{N}$ содержится ровно один корень уравнения (34) $p_i$, которому соответствует собственное число $\lambda_i = (p_i^2 + z_0^2)^{1/k}$, поэтому множество собственных чисел задачи (7), (31) не ограничено сверху и в интервале $(l_{i-1}, l_i)$. Теорема доказана для задачи (7), (31). Рассмотрим теперь краевую задачу (7), (32). Без ограничения общности можно считать, что $U_1 = U_s = 0$ (если это не так, можно, пользуясь периодичностью задачи, сместить начало отсчета), тогда сужения решения этой задачи $\psi(x)$ на $P_1$ и $P_s$ можно записать в виде

$$\psi_z(x) = A_i(z)\exp(zx) + B_i(z)\exp(-zx) \qquad \forall x \in P_i, \qquad i = 1, s, \tag{35}$$

где $z = (z_0^2 - \lambda^k)^{1/2}$. Таким образом, (35) является решением нашей задачи, если справедливы равенства:

$$A_1(z)\exp(za) + B_1(z)\exp(-za) = A_s(z)\exp(zb) + B_s(z)\exp(-zb),$$
$$A_1(z)\exp(za) - B_1(z)\exp(-za) = A_s(z)\exp(zb) - B_s(z)\exp(-zb),$$

или $A_1(z) = A_s(z)\exp[z(b-a)]$, $B_1(z) = B_s(z)\exp[z(a-b)]$. Но $A_s$ и $B_s$ линейно выражаются через $A_1$ и $B_1$, причем, по теореме 1, коэффициенты — голоморфные функции $\lambda$. Поэтому условия (32) приводят к однородной системе уравнений для $A_1(z)$ и $B_1(z)$ с голоморфными коэффициентами, которая имеет нетривиальные решения лишь при нулевом определителе. Следовательно, собственные числа нашей задачи являются нулями голоморфной функции и, значит, изолированными точками вещественной оси. Они являются также нулями разности определителей $L[a;\psi^*_{z'},\psi_z]-L[b;\psi^*_{z'},\psi_z]$, где $z$ соответствует собственному числу $\lambda$, отсюда и из (30) следует, что эти нули — простые. Ограниченность их множества снизу доказывается так же, как для задачи (7), (31). Нетрудно видеть, что при $\lambda\to\infty$ $A_s\to A_1$, $B_s\to B_1$, поэтому $z_n\to im\pi/(b-a)$, $m\in\mathbb{N}$, следовательно, множество собственных чисел не ограничено сверху, и при достаточно большом $b-a$ в интервале $(l_{i-1},l_i)$, $i\in\mathbb{N}$ содержится ровно одно собственное число. Теорема доказана полностью.

Теперь нашей целью будет доказательство теоремы о разложении функций в обобщенный ряд Фурье по системе собственных функций какой-либо из задач (7), (31) или (7), (32). Будем обозначать эту задачу через $A$, то есть $A$ — это набор, включающий оператор $f(\partial_x)$, множество $X_1$, числа $U_n$, $n\in N$ и краевые условия. Пусть $W(A)$ — это множество функций из $W_f(X_1)$, которые в точках $x\in X_1$ удовлетворяют всем условиям, накладываемым на решение задачи $A$, кроме, может быть, требования быть решением уравнения (7) (то есть решения задачи $A$ тоже принадлежат множеству $W(A)$). $W(A)$ — линейное пространство, в нем можно ввести скалярное произведение и норму посредством (27) и (28) соответственно, поэтому $W(A)$ — предгильбертово пространство.

Теорема 6. *Пусть $\{\omega_n\}$ — ортонормированная система собственных функций задачи $A$. Тогда любая функция $u\in W(A)$, разлагается в (обобщенный) ряд Фурье по этим функциям:*

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\omega_n(x),$$

*равномерно и абсолютно сходящийся к $u(x)$, причем*

$$u_n=(\omega_n,u)^f=O(n^{-2})$$

*и справедливо равенство Парсеваля*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2=\|u\|_f^2.$$

Доказательство. Используем метод продолжения по параметру. Поставим в соответствие уравнению (7) однопараметрическое семейство уравнений

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x)+\gamma U(x)u(x)-\lambda u(x)=0,\qquad \forall x\in P\subseteq\mathbb{R}, \tag{36}$$

где $\gamma \in [0,1]$. Таким образом получается однопараметрическое семейство краевых задач (36), (32) и трехпараметрическое семейство краевых задач(36), (31). Пусть сначала $A$ — задача (7), (32). Положим $\gamma_0 = 0$. Нетрудно найти собственные числа и собственные функции этой задачи при $\gamma = \gamma_0$: $\lambda_1 = f(0)$ — однократное собственное число, ему соответствует постоянная собственная функция $\psi_1(x) \equiv 1$, остальные собственные числа — двукратные, $\lambda_{2n} = \lambda_{2n+1} = f\big(2(n-1)\pi/(b-a)\big)$, $\psi_{2n}(x) = \sin[2(n-1)\pi x/(b-a)]$ и $\psi_{2n+1}(x) = \cos[2(n-1)\pi x/(b-a)]$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ (собственные функции — ненормированные). Полнота этой системы собственных функций в $L^2[a,b]$ известна, ряды по этим функциям — это обычные ряды Фурье. Если функция $u \in W(A)$, то она непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную, значит, разлагается в ряд Фурье, равномерно и абсолютно сходящийся к $u(x)$:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \psi_n(x), \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{37}$$

Используя ортогональность собственных функций (здесь и далее — в смысле (27), отсюда получаем: $u_n = (\psi_n, u)_f/(\psi_n, \psi_n)_f$. Вводя нормированные собственные функции

$$\omega_n^0(x) = \psi_n(x)/\|\psi_n\|_f, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots\ ,$$

ряд (37) можно переписать в виде:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 \omega_n^0(x), \tag{38}$$

где $u_n^0 = (\omega_n^0, u)_f = O(n^{-2})$. Из (38) и ортонормированности системы $\{\omega_n^0\}$ следует равенство Парсеваля. Теорема доказана для задачи (7), (32) в случае, когда $U(x) \equiv 0$. Пусть теперь в (36) $\gamma = \gamma_1 \in (0,1]$, $\{\omega_n^1\}$ — ортонормированая система собственных функций задачи (36), (32). Поскольку любая $\omega_n^1 \in W(A)$, ее можно разложить в ряд вида (38), абсолютно и равномерно сходящийся к $\omega_n^1(x)$:

$$\omega_n^1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \omega_m^0(x), \qquad \forall x \in [a,b], \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots\ , \tag{39}$$

где $A_{nm} = (\omega_m^0, \omega_n^1)_f = O(m^{-2})$. Обозначив $\delta_n^m - A_{nm} = B_{nm}$, запишем (39) в виде

$$\omega_n^0 - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} (\omega_m^0, \omega_n^1)_f \omega_m^0(x) = \omega_n^1(x), \quad \forall x \in [a,b],\ n = 1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{40}$$

Так как $B_{nm} = O(m^{-2})$, то сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} |B_{nm}| = q_n, \qquad n = 1,\, 2,\, \dots\, .$$

Поскольку, к тому же, как легко показать, $B_{nm} = O(\lambda_n^{-2/k})$, то среди этих $q_n$ есть наибольшее: $q_n \leqslant q$, $n = 1,\, 2,\, \dots$ . Все $B_{nm}$ являются функциями $\gamma_1$, непрерывными в нуле и равными там нулю, поэтому существует такая окрестность нуля $V_0$, что при $\gamma_1 \in V_0$ $q < 1$. При таких $\gamma_1$ (40) является вполне регулярной бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно $\omega_m^0(x)$ с правыми частями, составляющими ограниченную последовательность [8], и имеет единственное решение в виде бесконечного набора рядов

$$\omega_n^0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}\omega_m^1(x), \qquad \forall x \in [a,b], \qquad n = 1,\, 2,\, \dots\, , \tag{41}$$

сходящихся равномерно (это решение можно получить методом последовательных приближений). Используя ортонормированность функций $\omega_m^1(x)$, получаем:

$$C_{nm} = (\omega_m^1, \omega_n^0)_f = (\omega_m^0, \omega_n^1)_f^* = A_{mn}^* = O(m^{-2}),$$

поэтому ряд (41) сходится и абсолютно. Подставив (41) в (38), получим абсолютно и равномерно сходящийся повторный ряд:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}\omega_m^1(x), \qquad \forall x \in [a,b],$$

в котором законно изменение порядка суммирования:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^1(x) \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 C_{nm}, \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{42}$$

Справедливо обобщенное равенство Парсеваля для функций $u$ и $\omega_m^1$:

$$(\omega_m^1, u)_f = \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n^0, u)_f (\omega_m^1, \omega_n^0)_f =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 C_{nm}, \qquad m = 1,\, 2,\, \dots\, ,$$

следовательно, (42) — это обобщенный ряд Фурье функции $u(x)$ по системе $\{\omega_m^1\}$, абсолютно и равномерно сходящийся к $u(x)$:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^1 \omega_n^1(x),$$

где $u_n^1 = (\omega_n^1, u)_f = O(n^{-2})$. Справедливость равенства Парсеваля для $u(x)$ по системе $\{\omega_n^1\}$ следует из ортонормированности системы.

Таким образом, теорема доказана для задачи (36), (32) с $\gamma = \gamma_1$. Если $1 \in V_0$, то теорема доказана для задачи (7), (32), в противном случае берем $\gamma_1 \in V_0 \cap (0, 1]$ и показываем, что существует $V_1$ — окрестность точки $\gamma_1$, такая, что при всех значениях $\gamma$ из этой окрестности система, аналогичная системе (40), будет вполне регулярной и, следовательно, будет иметь единственное решение. Повторяя эти шаги, мы либо за конечное число шагов получим окрестность, включающую единицу, либо получим бесконечное число таких окрестностей, покрывающих отрезок $[0, 1]$. Поскольку $[0, 1]$ — компактное множество, то, по лемме Гейне-Бореля, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, следовательно, получить конечное число значений $\gamma$, с помощью которых можно перейти вышеописанным способом от базиса, соответствующего значению $\gamma = 0$, к базису при $\gamma = 1$ (за конечное число шагов). Равенство Парсеваля следует из абсолютной сходимости обобщенного ряда Фурье к функции $u(x)$. Таким образом, теорема доказана для задачи (7), (32). Задача (7), (31) отличается от предыдущей тем, что имеет два параметра: $\alpha$ и $\beta$. Чтобы теорему доказать для нее, надо рассмотреть трехпараметрическую задачу (36), (31). При $\gamma = \alpha = \beta = 0$ получаем задачу, имеющую собственные числа $\lambda_n = n\pi/(b - a)$, $n = 1, 2, \ldots$ (однократные) и ортогональную систему собственных функций $\psi_n^0(x) = \sin[n\pi x/(b - a)]$, $n = 1, 2, \ldots$, полнота которой в $L^2[a, b]$ известна. Доказать, что она является базисом в $W(A)$, можно так же, как это было сделано для задачи (7), (32). Поскольку значения $\alpha$ и $\alpha + 2n\pi$, $\beta$ и $\beta + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$) попарно эквивалентны, пространство параметров имеет топологию прямого произведения двухмерного тора на отрезок $[0, 1]$ и потому компактно. Пользуясь этим, можно показать, что за конечное число шагов можно перейти от исходного базиса к базису для произвольной задачи (7), (31). Теорема доказана полностью.

Но $W(A)$, вообще говоря, не полно. Действительно, пусть $\{u^m(x)\}$ — последовательность Коши в $W(A)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n, m > N$ $\|u^n - u^m\|_f < \varepsilon$. Пользуясь теоремой 6, разложим каждую из $u^m(x)$ в ряд Фурье по базису $\{\varphi_n\}$:

$$u^m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m \varphi_n(x), \qquad \forall x \in P,$$

где

$$a_n^m = (\varphi_n, u^m)_f. \tag{43}$$

Так каждому элементу последовавательности Коши $\{u^m\}$ ставится в соответствие последовательность $\{a_n^m\}_{n=1}^{\infty}$. Из равенства Парсеваля для $u^m(x)$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^m|^2 < \infty,$$

то есть $b^m = \{a_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ — элемент гильбертового пространства $l^2$. Из равенства Парсеваля для $u^n(x) - u^m(x)$ получаем, что $\{b^m\}$ — последовательность Коши в $l^2$. Так как $l^2$ — полное пространство, существует

$$\lim_{m\to\infty} b^m = \{a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, которой можно сопоставить ряд

$$u_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \forall x \in P, \tag{44}$$

но нельзя гарантировать, что $u \in W(A)$ и этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Иначе говоря, $u_a(x)$ может не удовлетворять условиям (20) и краевым условиям задачи $A$. С другой стороны, любому такому $u_a(x)$ можно сопоставить последовательность Коши $\{u^m\} \subset W(A)$:

$$u_a^m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n \varphi_n(x), \qquad \forall x \in P. \tag{45}$$

Пространство $W(A)$ можно пополнить с помощью стандартной процедуры: каждому классу эквивалентности последовательностей Коши из $W(A)$ сопоставляем функцию (44), где $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — предел соответствующей последовательности Коши из $l^2$ (соответствие — по формуле (43)). Пусть в (43) $u^m$ — это функции (45), тогда, используя непрерывность скалярного произведения, из (43) получим:

$$a_n = (\varphi_n, u_a)_f.$$

Следовательно, (44) — это обобщенный ряд Фурье функции $u_a(x)$, справедливо равенство Парсеваля

$$\|u_a\|^{f2} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

и ряд (44) сходится в смысле метрики пространства $W_f(X_1)$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *$W_f(X_1)$ — гильбертово пространство, $W(A)$ плотно в $W_f(X_1)$, а система собственных функций любой из задач (7), (31) или (7), (32) полна в $W_f(X_1)$.*

В теории краевых задач (7), (31) и (7), (32) пространство $W_f(X_1)$ играет ту же роль, что пространство $L^2(P)$ в теории краевых задач для уравнений второго порядка. Однако в отличие от $L^2[a,b]$, элементами которого являются не функции, а классы эквивалентности функций, различающихся на множествах нулевой меры, $W_f(X_1)$ состоит из непрерывных функций с кусочно непрерывными производными. Действительно, если $p(z) \in S$, то из квадратичной интегрируемости функции $\big(p(\partial_x)u\big)(x)$ следует непрерывность функции $\big(q(\partial_x)u\big)(x)$, где $q(\partial_x)$ — оператор с символом $q(z) = p(z)/z$. Поэтому интегралы в (27) можно понимать в смысле Римана. Сужение множества допустимых функций и ванное этим упрощение некоторых элементов формализма связано, очевидно, с расширением множества операторов.

Итак, любой из краевых задач (7), (31), как и задаче (7), (32), соответствует свой набор собственных чисел (точечный спектр) $\sigma = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированная система собственных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, полная в гильбертовом пространстве $W_f(X)$. Это позволяет сопоставить каждой такой задаче свой оператор в $W_f(X_1)$, например, задаче (7), (31) оператор $F_{\alpha\beta}$:

$$D(F_{\alpha\beta}) = \Big\{u \in W_f(X_1) : u(a)\cos\alpha + \big(h(\partial_x)u\big)(a)\sin\alpha =$$
$$= u(b)\cos\beta + \big(h(\partial_x)u\big)(b)\sin\beta = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(u,\varphi_n)_f|^2 < \infty\Big\},$$

$$(F_{\alpha\beta}u)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\varphi_n, u)_f \varphi_n(x), \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall u \in D(F_{\alpha\beta}),$$

а задаче (7), (32) оператор $G$:

$$D(G) = \Big\{u \in W_f(X_1) : u(a) = u(b), \quad \big(h(\partial_x)u\big)(a) = \big(h(\partial_x)u\big)(b), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(u, \varphi_n)_f|^2 < \infty\Big\},$$

$$(Gu)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi_n, u)_f \varphi_n(x), \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall u \in D(G).$$

Теорема 8. *Операторы $F_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ и $G$ — самосопряженные в $W_f(X_1)$.*

Доказательство. Пусть $A$ — любой из операторов $F_{\alpha\beta}$ или $G$. Равенство $(v, Au)_f = (Av, u)_f$ для любых $v$, $u \in D(A)$ легко проверяется, если использовать их разложение по собственным функциям соответствующей краевой задачи, плотность $D(A)$ в $W_f(X_1)$ следует из того, что каждая функция из $W_f(X_1)$ может быть представлена в виде сходящегося ряда, любая частичная сумма которого принадлежит $D(A)$, поэтому $A$ — симметрический оператор. Так как собственные функции оператора $A$ — это собственные функции соответствующей краевой задачи, то по теореме 7 оператор $A$ имеет полную в $W_f(X_1)$ систему собственных функций. Поэтому он самосопряженный [4]. Теорема доказана.

Таким образом, локальному оператору $f(\partial_x) + U(x)$ сопоставляется бесконечное множество (имеющее мощность континуума) самосопряженных операторов. Конечно, это нелокальные операторы — каждый из них соответствует определенным краевым условиям. Следует подчеркнуть, что оператор $f(\partial_x) + U(x)$ и операторы $F_{\alpha\beta}$ и $G$ играют разные роли в краевой задаче: первый — элемент ее условия, каждый из вторых — результат ее решения. Операторы $F_{\alpha\beta}$ и $G$ могут быть использованы (ими можно оперировать) при решении других задач, достаточно близких к той, которая породила эти операторы, по теории возмущений.

Заметим, что полученные здесь самосопряженные операторы не совпадают, вообще говоря, с теми, которые получаются при использовании определения функции от оператора, данного Дж. фон Нейманом [9]. Действительно, в соответствии с этим определением оператор $f(i\partial_x)$ должен иметь те же собственные функции, что и оператор-аргумент $i\partial_x$, но последний может быть определен как самосопряженный только при краевых условиях вида $u(a) = u(b)\exp(i\vartheta)$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$ [4]. Поэтому совпадение с определением Дж. фон Немана получается лишь в одном случае: когда при $U(x) \equiv 0$ поставлена задача (7), (32).

Пример 2. Пусть символ $f(z)$ тот же, что и в примере 1, $P = [0, 1]$, $c \in (0, 1)$, $U(x) = 0$, $\forall x \in [0, c]$, $U(x) = U_0 > 0$, $x \in (c, 1]$. Требуется найти собственные числа и собственные функции краевой задачи (7), (31), если $\alpha = \beta = 0$ (в релятивистской квантовой механике — это задача о состояниях частицы в одномерной “ступенчатой” потенциальной яме бесконечной глубины).

Решение. Сужения уравнения (7) на $[0, c]$ и $(c, 1]$ имеют вид:

$$\left(\sqrt{1-\partial_x^2} - \lambda\right) u(x) = 0, \qquad \forall x \in [0, c], \tag{46}$$

$$\left(\sqrt{1-\partial_x^2} + U_0 - \lambda\right) u(x) = 0, \qquad \forall x \in (c, 1]. \tag{47}$$

При $\lambda < 0$ ни (46), ни (47) не имеют $h$-решений, при $\lambda \in [0, 1]$ (46) имеет $h$-решения, а (47) — нет, при $\lambda > U_0$ и (46), и (47) имеют $h$-решения, поэтому все собственные числа этой задачи больше $U_0$. Но можно дать и более точную оценку. Пусть $0 < \lambda < 1$, тогда решения уравнений (46) и (47), удовлетворяющее краевым условиям $u(0) = 0$ и $u(1) = 0$ соответственно, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= A \operatorname{sh} \varkappa_1 x, && \forall x \in [0, c], \\ u(x) &= B \operatorname{sh}[\varkappa_2(1-x)], && \forall x \in (c, 1], \end{aligned}$$

где $A$, $B \in \mathbb{C}$, $\varkappa_1 = (1-\lambda^2)^{1/2} \in \mathbb{R}_+$, $\varkappa_2 = [1-(\lambda-U_0)^2]^{1/2} \in \mathbb{R}_+$. Так как в точке $x = c$ должны выполняться условия (20), то $A$ и $B$ должны удовлетворять однородной системе:

$$\begin{aligned} A \operatorname{sh} \varkappa_1 c - B \operatorname{sh}[\varkappa_2(1-c)] &= 0, \\ h(\varkappa_1) A \operatorname{ch} \varkappa_1 c + h(\varkappa_2) B \operatorname{ch}[\varkappa_2(1-c)] &= 0. \end{aligned}$$

Но определитель этой системы строго положителен, и она имеет единственное решение: $A = B = 0$, поэтому все собственные числа нашей задачи больше максимального из чисел 1 и $U_0$. Если $\lambda > \max(1, U_0)$, то решения уравнений (46) и (47) удобнее записать в виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= A \sin px, && \forall x \in [0, c], \\ u(x) &= B \operatorname{sh}[\varkappa(1-x)], && \forall x \in (c, 1], \end{aligned}$$

где $A$, $B \in \mathbb{C}$, $p = (\lambda^2 - 1)^{1/2} \in \mathbb{R}_+$, $\varkappa = [1 - (\lambda - U_0)^2]^{1/2}$ ($\varkappa$ может теперь быть и вещественным, и чисто мнимым). Для $A$ и $B$ с помощью условий (20) получаем систему:

$$A \sin pc - B \operatorname{sh}[\varkappa(1-c)] = 0,$$
$$v(p) A \cos pc + h(\varkappa) B \operatorname{ch}[\varkappa(1-c)] = 0,$$

где $v(p) = -ih(ip) \in \mathbb{R}_+$. Условие существования ненулевых решений этой системы, то есть обращения в нуль ее определителя, можно записать в виде:

$$\operatorname{tg} pc = -\frac{v(p)}{h(\varkappa)} \operatorname{th}[\varkappa(1-c)].$$

Это трансцендентное уравнение для $\lambda$, корни которого представляют собой собственные числа нашей задачи. Легко получить, что их бесконечно много, и их асимптотическое представление

$$\lambda_n = (n\pi - U_0)(2c-1)^{-1} + O(n^{-1}).$$

Ортогональность системы собственных функций проверяется непосредственно.

Таким образом, если в (7) под $f(\partial_x)$ понимать голоморфную функцию от оператора дифференцирования, то задача легко решается. Если же считать, что $f(\partial_x)$ — функция от оператора в смысле Дж. фон Неймана, то пришлось бы искать решение в виде ряда по собственным функциям задачи (7), (32), что свелось бы к поиску собственных чисел и собственных векторов бесконечной матрицы. Очевидно, предлагаемый здесь подход, основанный на определении локального оператора $f(\partial_x)$, рациональнее.

В общепринятом варианте релятивистской квантовой механики [10] считается, что состояния частицы единичной массы в поле с потенциалом $U(x)$ описываются решениями уравнения Клейна-Гордона или уравнения Дирака. Как известно [10,11], оба эти уравнения приводят к неограниченности спектра снизу и парадоксу Клейна.

# 4 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ И ОСИ

Пусть теперь в (7) $P = [0, \infty)$, $s < \infty$, $N = \{n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant n \leqslant s\}$, $x_0 = 0$, $x_s = \infty$, $X = X_2\{x_n\}_{n=0}^{s}$, $P_n = [x_{n-1}, x_n)$, $\forall n \in N$. Тогда скалярное произведение может по-прежнему определяться формулой (27), а соответствующее линейное пространство функций $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ обозначим через $W_f(X_2)$. Без ограничения общности примем $U_s = 0$. Определим краевую задачу $B$, поставив линейные однородные вещественные условия в нуле:

$$u(0)\cos\alpha + \bigl(h(\partial_x)u\bigr)(0)\sin\alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{48}$$

и потребовав ограниченности решений на $P$.

Теорема 9. *Множество $\sigma$ тех значений $\lambda$, при которых краевая задача $B$ имеет ограниченные решения (спектр), является подмножеством вещественной оси и состоит из двух подмножеств: точечного спектра $\sigma_1$, который включает конечное число значений (возможно, равное нулю), и непрерывного спектра $\sigma_2$, который включает все вещественные числа $\lambda \geqslant f(0)$. Все значения спектра — однократные и являются простыми нулями голоморфной функции. Все собственные функции точечного спектра ортогональны в смысле (27) с $x_0 = 0$ и $x_s = \infty$ друг другу и любой из собственных функций непрерывного спектра. Если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения здачи $A$ с $\lambda_1 \in \sigma_2$ и $\lambda_2 \in \sigma_2$ соответственно, то их скалярное произведение представляет собой обобщенную функцию разности $\lambda_1 - \lambda_2$, и может быть выбрана такая нормировка, что это — $\delta(\lambda_1 - \lambda_2)$ либо $\delta(p_1 - p_2)$ ($p = (\lambda^k - z_0^2)^{1/2}$, $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака).*

Доказательство. Пусть при данном $\lambda$ характеристическое уравнение $f(z) = \lambda$, соответствующее промежутку $P_s$, имеет комплексные корни $z_{1,2} = \nu_{1,2} + i\mu_{1,2}$, тогда сужение решения (7) на $P_s$ имеет вид:

$$u_\lambda(x) = A\exp(z_1 x) + B\exp(z_2 x), \qquad \forall x \in P_s, \tag{49}$$

где $A$, $B \in \mathbb{C}$. Эта функция ограничена в двух случаях: либо при чисто мнимых $z_1$ и $z_2$, либо если хотя бы одна из вещественных частей $\nu_{1,2}$ отрицательна, а коэффициент в слагаемом с положительным $\nu$ равен нулю. Но так как $f(z) \in T$, первое возможно, только если $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \geqslant f(0)$. Во втором случае $L[x; u^*, u] \to 0$ при $x \to \infty$, а поскольку $L[0; u^*, u] = 0$ благодаря условию (48), то и в этом случае $\lambda \in \mathbb{R}$ (по теореме 4), но теперь $0 < \lambda < f(0)$. Таким образом, если $\lambda \in F^0$, а (49) ограничена, то $\lambda$ вещественна и при $\lambda \geqslant f(0)$ (49) можно переписать в виде:

$$u_\lambda(x) = C_s(p)\sin[px + \varphi(p)], \qquad \forall x \in P_s, \tag{50}$$

где $p = (\lambda^k - z_0^2)^{1/2} \in [0, \infty)$, а при $0 < \lambda < f(0)$ — в виде

$$u_\lambda(x) = E\exp[-\varkappa(x - x_{s-1})], \qquad \forall x \in P_s, \tag{51}$$

где $\varkappa = (z_0^2 - \lambda^k)^{1/2}$. Спектр задачи $B$ ограничен снизу: $\lambda > U_n$, $\forall n \in N$, поскольку любое решение задачи $B$ совпадает с решением некоторой задачи Коши, определенном на всем $P$. Пусть $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > U_n, \forall n \in N\} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda < f(0)\}$, $\Lambda_2 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \geqslant f(0)$. Для любого $\lambda \in \Lambda$ существует решение $y_\lambda(x)$ задачи Коши для уравнения (7), определенной начальными условиями

$$y_\lambda(0) = C \sin\alpha, \qquad \big(h(\partial_x) y_\lambda\big)(0) = -C\cos\alpha.$$

При $\lambda \in \Lambda_2$ сужение этого решения на $P_s$ имеет вид правой части (50) и потому ограничено, значит, $y_\lambda(x)$ является и решением задачи (7), (48). Таким образом, любое значение $\lambda \in \Lambda_2$ принадлежит непрерывному спектру: $\sigma_2 = \Lambda_2$. Пусть теперь $\lambda \in \Lambda_1$, тогда функция $u(x)$ будет решением задачи (7), (48) в том случае, если существует решение $u_\lambda(x)$ уравнения (7), сужение которого на $P_s$ имеет вид (51), и справедливо тождество $L[x; u_\lambda, y_\lambda] \equiv 0$. Но по теореме 1 $u_\lambda(x)$ и $y_\lambda(x)$ — голоморфные функции $\lambda$, поэтому $\lambda \in \sigma_1$, если $\lambda$ — нуль голоморфной функции, а эти нули — изолированные, и их точка сгущения может быть лишь в бесконечности. Простота этих корней доказывается так же, как в теореме 5. Поскольку все $\lambda \in \Lambda_1$ меньше $f(0)$, отсюда следует, что $\sigma_1$ содержит конечное число значений $\lambda$. Из теоремы 4 следует, что если функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются собственными функциями задачи $B$ с $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) соответственно и хотя бы одно из них принадлежит точечному спектру, то

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2)_f = L[0; u_1^*, u_2] - L[\infty; u_1^*, u_2].$$

Но $L[0; u_1^*, u_2] = 0$, поскольку и $u_1(x)$, и $u_2(x)$ удовлетворяют условиям (48), а $L[\infty; u_1^*, u_2] = 0$, поскольку сужение собственной функции точечного спектра на $P_s$ имеет вид (51). Отсюда следует, что $(u_1, u_2)_f = 0$. Пусть теперь и $\lambda_1 \in \sigma_2$, и $\lambda_2 \in \sigma_2$. Возьмем $y \in P_s$. Поскольку $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются решениями уравнения (7), удовлетворяющими условию (48), то из формулы (30) следует, что

$$(u_1, u_2)_f = \lim_{y\to\infty} [u_2(y)\big(h(\partial_x) u_1^*\big)(y) - [u_1^*(y)\big(h(\partial_x) u_2\big)(y)]/(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Из (50) видно, что сужение решения на $P_s$ можно взять в виде:

$$u_j(x) = A_j \sin(p_j x + \varphi_j), \qquad j = 1,\, 2, \qquad \forall x \in P_s, \tag{52}$$

где $p_j = (\lambda_j^k - z_0^2)^{1/2}$. Используя (16) и исключив несингулярные члены, получим:

$$\langle u_1^*, u_2 \rangle_{x_{s-1}}^y = \frac{1}{2} A_1^* A_2 Z(p_1, p_2) \frac{\sin[(p_1 - p_2)(y - x_{s-1}) + \varphi_1 - \varphi_2]}{p_1 - p_2},$$

где

$$Z(p_1, p_2) = 1 + (z_0^2 + p_1 p_2) \sum_{l=0}^{k-2} (z_0^2 + p_1^2)^{-\frac{l+1}{k}} (z_0^2 + p_2^2)^{\frac{l-k+1}{k}}.$$

Так как $\varphi_1 - \varphi_2 \to 0$ при $p_1 - p_2 \to 0$, то

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\sin[(p_1 - p_2)y + \varphi_1 - \varphi_2]}{p_1 - p_2} = \pi\delta(p_1 - p_2) = \pi\delta(\lambda_1 - \lambda_2)|f'(ip_1)|^{-1},$$

а $Z(p,p) = k/2$, поэтому для того, чтобы получить нормировку на дельта-функцию от $\lambda_1 - \lambda_2$, надо, чтобы в (52)

$$A_j = \sqrt{\frac{2}{k\pi}|f'(ip_j)|}, \qquad j = 1, 2,$$

а чтобы получить нормировку на дельта-функцию от $p_1 - p_2$ —

$$A_j = \sqrt{\frac{2}{k\pi}}, \qquad j = 1, 2.$$

Используя условия (20), можно продолжить решение (с пока еще неизвесной фазой $\varphi(p)$) на всю полуось, после чего, используя условие (48), можно найти $\varphi(p)$. Так для любого значения $p \geqslant 0$ ($\lambda \geqslant f(0)$) можно построить решение задачи $B$, нормированное на дельта-функцию либо от $\lambda_1 - \lambda_2$, либо от $p_1 - p_2$ (для $p = 0$ ($\lambda = f(0)$) решение получается предельным переходом). Теорема доказана.

Пусть $\psi^n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, q$ — собственные функции точечного, а $\psi_p(x)$ ($p = (\lambda^k - z_0^2)^{1/2} \in [0, \infty)$) — непрерывного спектра задачи (7), (48), причем

$$(\psi^i, \psi^j)_f = \delta_j^i, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, q, \tag{53}$$

$$(\psi_p, \psi_{p'})_f = \delta(p - p'), \qquad \forall p,\, p' \in (0\infty). \tag{54}$$

Пространство $W(B)$, соответствующее задаче $B$, включает функции $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, обладающие следующими свойствами:

1) $h(\partial_x)$-отображаемые на любом промежутке $P_n$ ($n \in N$),

2) удовлетворяющие условиям (20) и (48),

3) для любой $u \in W(B)$ существует неограниченно возрастающая последовательность $\{\xi_n^u\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что $\vartheta_n^u = \big(h(\partial_x)u\big)(\xi_n^u)/u(\xi_n^u) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) для любой $u \in W(B)$ существуют такие $\tau_u$, $C_u$, $\gamma_u \in \mathbb{R}_+$, что $|u(x)| \leqslant C_u \exp(-\gamma_u x)$ $\forall x > \tau_u$.

Лемма 2. *Если $u(x) \in W(A)$, то определены скалярные произведения $(\psi^n, u)_f$, $n = 1, 2, \ldots, q$, и $(\psi_p, u)_f$, причем $(\psi_p, u)_f = O(p^{-2}$, и поэтому интеграл*

$$\int_0^\infty (\psi_p, u)_f \psi_p(x)\, dx$$

*сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Утверждение леммы легко следует из того, что сужения решений $\psi^n(x)$ и $\psi_p(x)$ на $P_s = [x_{s-1}, \infty)$ имеют вид (51) и (50) соответственно и свойства 4) функций из $W(A)$. Лемма доказана.

Поскольку для любых двух функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из $W(B)$ определено скалярное произведение (27) и для каждой из них определена соответствующая норма, $W(B)$ — предгильбертово пространство. Теореме о разложении функций из $W(B)$ предпошлем еще одну лемму.

Лемма 3. *Пусть $\lambda_n \to \lambda^0$ при $n \to \infty$, а $\{y(\lambda_n, x)\}$ — последовательность решений уравнения (7) с $\lambda = \lambda_n$, определенных на некотором конечном промежутке $Q \subset P$. Тогда $y(\lambda_n, x) \to y(\lambda^0, x)$, $\big(g_l(\partial_x)y\big)(\lambda_n, x) \to \big(g_l(\partial_x)y\big)(\lambda^0, x)$, $\big(g_l(\partial_x)y'\big)(\lambda_n, x) \to \big(g_l(\partial_x)y'\big)(\lambda^0, x)$ при всех $l \in \{l \in \mathbb{Z}$ равномерно на $Q$.*

Доказательство. Сужение решения задачи Коши на $Q_i = P_i \cap Q$ имеет вид:

$$y(\lambda, x) = A_i(\lambda) \exp(z_i x) + B_i(\lambda) \exp(-z_i x), \qquad \forall x \in Q_i,$$

где $z_i = [z_0^2 - (\lambda - U_i)^k]^{1/2}$, поэтому

$$\begin{aligned} \big(g_l(\partial_x)y\big)(\lambda, x) &= g_l(z_i)[A_i(\lambda) \exp(z_i x) + B_i(\lambda) \exp(-z_i x)], \qquad &\forall x \in Q_i, \\ \big(g_l(\partial_x)y'\big)(\lambda, x) &= z_i g_l(z_i)[A_i(\lambda) \exp(z_i x) - B_i(\lambda) \exp(-z_i x)], \qquad &\forall x \in Q_i. \end{aligned}$$

Поскольку $z_i$ и $g_l(z_i)$ — голоморфные функции $\lambda$ по их определению, а $A_i(\lambda)$ и $A_i(\lambda)$ — по теореме 1, то последовательности функций, о которых говорится в лемме, сходятся поточечно на $Q_i$. Но эти функции непрерывны справа (слева) на левом (правом) конце $Q_i$ ($y(\lambda, x)$ и $\big(g_{1-k}(\partial_x)y\big)(\lambda, x)$ непрерывны на обоих концах), поэтому на самом деле сходимость равномерная на каждом $Q_i$, а значит, и на их объединении $Q$. Лемма доказана.

Теорема 10. *Любая функция $u \in W(B)$ может быть представлена в виде:*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{q} u_n \psi^n(x) + \int_0^\infty \hat{u}(p)\psi(p,x)\,dp, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \tag{55}$$

*где $q$ — количество собственных чисел задачи, меньших $f(0)$, $u_n = (\psi^n, u)_f$, $n = 1, 2, \ldots, q$, $(q < \infty)$, $\hat{u}(p) = (\psi_p, u)_f$, причем интеграл сходится абсолютно и равномерно по $x$ на $\mathbb{R}_+$ к функции*

$$u(x) - \sum_{n=1}^{q} u_n \psi^n(x),$$

*и справедливо равенство Парсеваля:*

$$\|u\|_f^2 = \sum_{n=1}^{q} |u_n|^2 + \int_0^\infty |\hat{u}(p)|^2\,dp. \tag{56}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{q} u_n \psi^n(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

$$I(r,x) = \int_0^r \hat{u}(p)\psi(p,x)\,dp, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

где $r \in (0,\infty)$, $A_m$ — краевая задача (7), (31) с $P = P^m = [0, \xi_m^u]$, $\beta = \beta_m = -\operatorname{arcctg}(\vartheta_m^u)$. Скалярное произведение, соответствующее задаче $A_m$, обозначим через $(\cdot,\cdot)_f^m$, а соответствующую норму — через $\|\cdot\|_f^m$. Рассмотрим сначала нормированные собственные функции задачи $A_m$ $y_n^m(x)$, соответствующие собственным числам $\lambda_{nm} < f(0)$. Сужение $y_n^m(x)$ на $P_s^m = [x_{s-1}, \xi_m^u]$ имеет вид:

$$y_n^m(x) = C_n^m \exp(\varkappa_n^m x) + D_n^m \exp(-\varkappa_n^m x), \qquad \forall x \in P_s^m,$$

где

$$C_n^m = D_n^m \frac{h(\varkappa_n^m)\vartheta_m^u - 1}{h(\varkappa_n^m)\vartheta_m^u + 1} \exp(-\varkappa_n^m \xi_m^u),$$

$\varkappa_n^m = (z_0^2 - \lambda_{nm}^k)^{1/2}$, $n = 1, 2, \ldots, q$. Поскольку при $m \to \infty$ $C_n^m / D_n^m \to 0$, определитель, нулями которого являются $\lambda_{nm}$, при $m \to \infty$ стремится к определителю, нулями которого являются собственные числа задачи (7), (48) $\lambda_n$. Так как нули последнего, по теореме 9, простые, его производная в этих нулях не равна нулю, и из теоремы о неявной функции следует, что при $m \to \infty$ $\lambda_{nm} \to \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots, q$. Используя лемму 3, получаем, что для любого $varepsilon_1 > 0$ найдется такое $m_1$, что при всех $m > m_1$ и всех $x \in [0, \xi_m^u]$ справедливо неравенство:

$$\left| S(x) - \sum_{n=1}^{q} (y_n^m, u)_f^m y_n^m(x) \right| \leqslant \varepsilon_1. \tag{57}$$

Рассмотрим теперь интеграл $I(r, x)$. Из лемм 2 и 3 и следует, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ можно найти такое $m_2$, что при всех $m \geqslant m_2$, $x \in [0, \xi_m^u]$ и $r \in (0, \infty)$ справедливо неравенство:

$$\left| I(r, x) - \frac{r}{m} \sum_{n=q+1}^{m} \hat{u}(p_n) \psi(p_n, x) \right| \leqslant \varepsilon_2, \tag{58}$$

где $(n-1)r/m \leqslant p_n \leqslant nr/m$. Выберем такое $m$, чтобы $\xi_m^u = m\pi/r > x$. По теореме 5, в каждом промежутке $[(n-1)\pi/\xi_m^u, n\pi/\xi_m^u] = [(n-1)r/m, nr/m]$ содержится $t_n = (\lambda_n^k - z_0^2)^{1/2}$, где $\lambda_{nm} \geqslant f(0)$ — собственное число задачи $A_m$. Будем считать, что в (58) $p_n = t_n$. Из леммы 3 следует, что $\psi(p_n, x)$ — собственные функции задачи $A_m$, $y_n^m(x) = \psi(p_n, x)/\|\psi(p_n, x)\|_f^m$ — нормированные собственные функции задачи $A_m$. Нетрудно проверить, что при $m \to \infty$ $|r\hat{u}(p_n) - m(y_n^m, u)_f^m| \to 0$. Отсюда и из (58) следует, что для любого $\varepsilon_3 > 0$ можно найти такое $m_3$, что при всех $m \geqslant m_3$, $x \in [0, \xi_m^u]$ и $r \in (0, \infty)$ справедливо неравенство:

$$\left| I(r, x) - \sum_{n=q+1}^{m} (y_n^m, u)_f^m \psi(p_n, x) \right| \leqslant \varepsilon_3. \tag{59}$$

Складывая (57) и (59), получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m_0$, что при всех $m \geqslant m_0$, $x \in [0, \xi_m^u]$ и $r \in (0, \infty)$ справедливо неравенство:

$$\left| I(r, x) + S(x) - \sum_{n=1}^{m} (y_n^m, u)_f^m \psi(p_n, x) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{60}$$

Но по теореме 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n^m, u)_f^m \psi(p_n, x) = u(x), \qquad \forall x \in [0, \xi_m^u],$$

и этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0, \xi_m^u]$, поэтому из (60) следует: $I(\infty, x) + S(x) = u(x)$, $\forall x \in [0, \infty)$. Отсюда и из (53) и (54) следует равенство Парсеваля (56). Теорема доказана.

Конечно, пространство $W(B)$ — неполное. Для его пополнения используем ту же стандартную процедуру, которая была использована для краевой задачи на отрезке. Пусть $\{u^m\}$ — последовательность Коши в смысле $\|\cdot\|_f$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при любых $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ справедливо неравенство: $\|u^n - u^m\|_f^2 \leqslant \varepsilon$. В силу (56) это дает:

$$\sum_{i=1}^{q} |u_i^n - u_i^m|^2 + \int_0^\infty |\hat{u}^n(p) - \hat{u}^m(p)|^2\, dp.$$

Отсюда следует, что каждая из последовательностей $\{u_i^m\}_{m=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots, q$ является последовательностью Коши в $\mathbb{C}$, а последовательность $\{\hat{u}^m\}_{m=1}^\infty$ — последовательностью Коши в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Так как и $\mathbb{C}$, и $L^2(\mathbb{R}_+)$ — полные пространства, то эти последовательности имеют пределы в соответствующих пространствах, которые обозначим через $v_n$, $n = 1, 2, \ldots, q$ и $\hat{v}(p)$, $\forall p \in \mathbb{R}_+$.. Собрав в один класс эквивалентности те последовательности Коши $\{u^m\}$, которые имеют общие $v_n$ и $\hat{v}(p)$, каждому из этих классов можно сопоставить функцию $v(x)$ таким образом, что

$$\left\| v(x) - \sum_{n=1}^{q} v_n \psi^n(x) - \int_0^\infty \hat{v}(p)\psi(p,x)\, dp \right\|_f = 0. \tag{61}$$

Линейное пространство таких функций есть $W_f(X_2)$. Итак, справедлива

Теорема 11. *Пространство $W_f(X_2)$ — гильбертово, $W(B)$ плотно в $W_f(X_2)$, система (53), (54) собственных функций задачи $B$ полна в $W_f(X_2)$ в том смысле, что для любой функции $v \in W_f(X_2)$ справедливо* (61).

Подчеркнем, что собственные функции непрерывного спектра задачи $B$ *не принадлежат* к $W_f(X_2)$ (вполне аналогично соответствующему случаю обычной теории Штурма-Лиувилля).

Теперь мы можем определить оператор $F\colon D(F) \to W_f(X_2)$:

$$D(F) = \left\{ u \in W_f(X_2) : \int_0^\infty \left|(p^2 + z_0^2)^{1/k}(\psi_p, u)_f\right|^2 dp < \infty \right\},$$

$$(Fu)(x) = \sum_{n=1}^{q} \lambda_n (\psi^n, u)_f \psi^n(x) + \\ + \int_0^\infty [f(ip) + U(x)](\psi_p, u)_f \psi_p(x)\, dp, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Можно показать, что $F$ — самосопряженный оператор. Конечно, он *не определен* на функциях $\psi_p(x)$ — они не принадлежат $W_f(X_2)$. Тут тоже полная аналогия с обычной теорией. Как писал Дж. фон Нейман, "функция $\exp(ikx)$ — очень хорошая функция, непрерывная, но она для нас не существует, так как не является квадратично интегрируемой" [9]. Было бы очень обидно, если бы мы действительно не могли работать с такими функциями, так как они играют главную роль в релятивистской квантовой механике, для которой, в основном, и строится предлагаемый здесь формализм. Но для нас эти функции существуют, мы можем определить результат действия на них локального оператора $f(\partial_x)+U(x)$, этот последний и самосопряженный оператор $F$ — два различных оператора, которые, впрочем, одинаково действуют на пересечении своих областей определения.

Очевидно, невозможно определить оператор $f(\partial_x)+U(x)$ на $\mathbb{R}_+$, пользуясь определением Дж. фон Неймана, как функцию самосопряженного оператора $i\partial_x$, поскольку последний не может быть определен на $\mathbb{R}_+$.

Положим теперь в (7) $P = \mathbb{R}$, $X = X_3 = \{-\infty, x_1, \ldots, x_{s-1}, \infty\}$, попрежнему будем считать все координаты точек $x_n$, где $U(x)$ имеет скачки, конечными. По-прежнему скалярное произведение будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_f$, норму через $\|\cdot\|_f$, а соответствующее пространство функций (гильбертовость которого утверждается в сформулированной ниже теореме 14) через $W_f(X_3)$. Рассмотрим следующую задачу $C$: найти все решения уравнения (7), ограниченные на $P$. Заметим, что если функция $U(x)$ симметрична относительно точки $x = 0$, задачу $C$ можно свести к задаче $B$, ища решение лишь для $x > 0$, поскольку задача $C$ в этом случае имеет лишь симметричные $u(-x) = u(x)$ и антисимметричные $u(-x) = -u(x)$ решения, первые удовлетворяют условию $u'(0) = 0$, а вторые — условию $u(0) = 0$. Не будем теперь предполагать симметрии функции $U(x)$. Пусть $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > U_n, \forall n \in N\}$. Справедлива

Теорема 12. *Спектр задачи $C$ состоит из трех подмножеств: $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$. $\sigma_1$ — это точечный спектр, состоит из конечного числа $q$ изолированных точек вещественной оси, которые являются простыми нулями голоморфной функции, каждому $\lambda_n \in \sigma_1$ соответствует одна собственная функция $\chi^n(x)$;*

$\sigma_2 = \{\lambda\Lambda : \min(U_1 + f(0), U_s + f(0)) \leqslant \lambda < \max(U_1 + f(0), U_s + f(0))\}$ *— это та часть непрерывного спектра, каждому значению которой соответствует одна линейно независимая собственная функция* $\zeta_\lambda(x)$*;* $\sigma_3 = \{\lambda\Lambda : \lambda \geqslant \max(U_1 + f(0), U_s + f(0))\}$ *— это та часть непрерывного спектра, каждому значению которой соответствуют две линейно независимых собственных функции* $\psi^i_\lambda(x)$*, $i = 1$, 2. Могут быть выбраны такие нормировки, что будут справедливы следующие соотношения ортогональности:* $(\chi^n, \chi^m)_f = \delta^m_n$, $(\chi^n, \zeta_\lambda)_f = 0, \forall\lambda \in \sigma_2$, $(\chi^n, \psi^i_\lambda)_f = 0, \forall\lambda \in \sigma_3$, $(\zeta_\lambda, \zeta_{\lambda'})_f = \delta(\lambda - \lambda'), \forall\lambda\,\lambda' \in \sigma_2$, $(\zeta_lambda, \psi^i_{\lambda'})_f = 0$, $\forall\lambda \in \sigma_2$, $\lambda' \in \sigma_3$, $i = 1, 2$, $(\psi^i_\lambda, \psi^j_{\lambda'})_f = \delta(\lambda - \lambda')\delta^j_i$, $\forall\lambda, \lambda' \in \sigma_3$, $i, j = 1, 2$.

Эта теорема доказывается вполне аналогично теореме 9. Введем линейное пространство $W(C)$ функций $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, обладающих следующми свойствами:

1) $h(\partial_x)$-отображаемых на любом промежутке $P_n$ $(n \in N)$,

2) удовлетворяющих условиям (20),

3) для любой $u \in W(C)$ существуют две неограниченно возрастающих последовательности $\{\mu^u_n\}^\infty_{n=1}$ и $\{\nu^u_n\}^\infty_{n=1}$, такие, что

$$\alpha^u_n = -\operatorname{arcctg}\big[\big(h(\partial_x)u\big)(-\mu^u_n)/u(-\mu^u_n)\big] \in \mathbb{R},$$
$$\beta^u_n = -\operatorname{arcctg}\big[\big(h(\partial_x)u\big)(\nu^u_n)/u(\nu^u_n)\big] \in \mathbb{R}.$$

4) для любой $u \in W(C)$ существуют такие $\tau_u$, $C_u$, $\gamma_u \in \mathbb{R}_+$, что $|u(x)| \leqslant C_u \exp(-\gamma_u|x|)\ \forall|x| > \tau_u$.

Тогда справедлива лемма, аналогичная лемме 2:

Лемма 4. *Если $u(x) \in W(C)$, то определены скалярные произведения* $(\chi^n, u)_f$*, $n = 1$, 2, ..., $q$;* $(\zeta_\lambda, u)_f$*,* $\forall\lambda \in \sigma_2$*;* $(\psi_\lambda, u)_f$ *и* $(\varphi_\lambda, u)_f$*,* $\forall\lambda \in \sigma_3$*, причем* $(\psi_\lambda, u)_f = O(p^{-2}$ *и* $(\varphi_\lambda, u)_f = O(p^{-2}$*, и поэтому интеграл*

$$\int_{\lambda^m}^{\infty} [(\psi_\lambda, u)_f \psi_\lambda(x) + (\varphi_\lambda, u)_f \varphi_\lambda(x)\, dx,$$

*где* $\lambda^m = f(0) + \max(U_1, U_s)$*, сходится абсолютно и равномерно на* $\mathbb{R}_+$.

С помощью лемм 3 и 4, аналогично теореме 10, доказывается

Теорема 13. *Любая функция $u \in W(C)$ может быть представлена в* *виде:*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{q} (\chi^n, u)_f \chi^n(x) + \int_{\lambda^0}^{\lambda^m} (\zeta_\lambda, u)_f \zeta(\lambda, x)\, d\lambda + \\ + \sum_{i=1,2} \int_{\lambda^m}^{\infty} (\psi^i_\lambda, u)_f \psi(\lambda, x)\, d\lambda, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

*где* $q$ *— количество собственных чисел задачи, меньших* $\lambda^0 = f(0) + \min(U_1, U_s)$, $\lambda^m = f(0) + \max(U_1, U_s)$, *причем второй интеграл сходится абсолютно и равномерно по* $x$ *на* $\mathbb{R}$ *к функции*

$$u(x) - \sum_{n=1}^{q} (\chi^n, u)_f \chi^n(x) - \int_{\lambda^0}^{\lambda^m} (\zeta_\lambda, u)_f \zeta(\lambda, x)\, d\lambda,$$

*и справедливо равенство Парсеваля:*

$$\|u\|_f^2 = \sum_{n=1}^{q} |(\chi^n, u)_f|^2 + \int_{\lambda^0}^{\lambda^m} |(\zeta_\lambda, u)_f|^2\, d\lambda + \sum_{i=1,2} \int_{\lambda^m}^{\infty} |(\psi^i_\lambda, u)_f|^2 d\lambda.$$

Аналогичная теореме 11, справедлива

Теорема 14. *Пространство* $W_f(X_3)$ *— гильбертово,* $W(C)$ *плотно в* $W_f(X_3)$, *система собственных функций задачи* $C$ *полна в* $W_f(X_3)$ *в том смысле, что для любой функции* $v \in W_f(X_2)$ *справедливо равенство*

$$\Big\| u(x) - \sum_{n=1}^{q} (\chi^n, u)_f \chi^n(x) + \int_{\lambda^0}^{\lambda^m} (\zeta_\lambda, u)_f \zeta(\lambda, x)\, d\lambda + \\ + \sum_{i=1,2} \int_{\lambda^m}^{\infty} (\psi^i_\lambda, u)_f \psi(\lambda, x)\, d\lambda \Big\|_f = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Теперь можно определить и самосопряженный оператор в $W_f(X_3)$, соответствующий задаче $C$:

$$D(F) = \Big\{ u \in W_f(X_3) : \int_{\lambda^m}^{\infty} |\lambda(\psi^i_\lambda, u)_f|^2 d\lambda < \infty \Big\},$$

$$(Fu)(x) = \sum_{n=1}^{q} \lambda_n (\chi^n, u)_f \chi^n(x) + \int_{\lambda^0}^{\lambda^m} \lambda(\zeta_\lambda, u)_f \zeta(\lambda, x)\, d\lambda + \\ + \sum_{i=1,2} \int_{\lambda^m}^{\infty} \lambda(\psi^i_\lambda, u)_f \psi^i_\lambda(x)\, d\lambda, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

Конечно, и этот оператор не определен на функциях $\zeta_\lambda(x)$ и $\psi^i_\lambda(x)$, несмотря на то, что результат действия на эти функции оператора $f(\partial_x) + U(x)$ известен — это решения уравнения (7). Иногда [12,13] для подобных задач на оси или полуоси операторы определяют в “оснащенном” гильбертовом пространстве [14]. По-видимому, целесообразнее различать локальный оператор $f(\partial_x) + U(x)$, входящий в уравнение (7) и не зависящий от краевых условий, и оператор $F$ в гильбертовом пространстве, соответствующий определенной краевой задаче.

Пример 3. Снова полагаем в (7) символ $f(z)$ тот же, что и в примерах 1 и 2, но теперь $P = \mathbb{R}$, $U(x) = 0$, $\forall x \leqslant 0$; $U(x) = U_0 > 0$, $\forall x > 0$. Это задача об отражении частицы единичной массы и энергии $\lambda$ от прямоугольного потенциального порога.

По теореме 1, нетривиальное решение существует только при $\lambda > U_0$, будем считать это выполненным. Сужения уравнения (7) на $(-\infty, 0]$ и $(0, \infty)$ имеют вид:

$$\left(\sqrt{1-\partial_x^2} - \lambda\right) u(x) = 0, \qquad \forall x \leqslant 0, \tag{62}$$

$$\left(\sqrt{1-\partial_x^2} + U_0 - \lambda\right) u(x) = 0, \qquad \forall x > 0. \tag{63}$$

Общее решение уравнения (62) запишем в виде:

$$u(x) = A\exp(ipx) + B\exp(-ipx), \qquad \forall x \leqslant 0, \tag{64}$$

где $p = (\lambda^2 - 1)^{1/2}$, общее решение уравнения (63) при $\lambda < 1 + U_0$ — в виде:

$$u(x) = C\exp(\varkappa x) + D\exp(-\varkappa x), \qquad \forall x > 0, \tag{65}$$

где $\varkappa = [1 - (\lambda - U_0)^2]^{1/2}$, а при $\lambda \geqslant 1 + U_0$ — в виде:

$$u(x) = E\exp(iqx) + F\exp(-iqx), \qquad \forall x > 0, \tag{66}$$

где $q = [(\lambda - U_0)^2 - 1]^{1/2}$.

Очевидно, эта задача не имеет точечного спектра, первая часть непрерывного спектра $\sigma_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} : 1 \leqslant \lambda < 1 + U_0\}$. Соответствующие решения задачи получаем из (64) и (65), используя условия (20) и условие ограниченности при $x \to \infty$, которые приводят к системе уравнений:

$$A + B = C, \qquad \frac{ip}{\sqrt{p^2+1}}(A - B) = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\varkappa^2}}C.$$

Отсюда $B = (1 + i\gamma)A/(1 - i\gamma)$, $C = 2A/(1 - i\gamma)$, где

$$\gamma = \frac{\varkappa\sqrt{p^2 + 1}}{p\sqrt{1 - \varkappa^2}}.$$

Легко видеть, что $|B| = |A|$. Это можно интерпретировать как полное отражение частицы от порога — вполне аналогично нерелятивистской квантовой механике. Пусть теперь $\lambda \geqslant 1 + U_0$, Тогда существует два линейно независимых решения. Используя (64) и (66), одно из них выберем в виде:

$$u(x) = Ae^{ipx} + Be^{-ipx}, \quad \forall x \leqslant 0; \quad u(x) = Ee^{iqx}, \quad \forall x > 0, \tag{67}$$

а другое — в виде:

$$u(x) = Be^{-ipx}, \quad \forall x \leqslant 0; \quad u(x) = Ee^{iqx} + Fe^{-iqx}, \quad \forall x > 0, \tag{68}$$

Используя условия (20), получим две системы уравнений:

$$\begin{aligned} &1) A + B = E, && \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(A - B) = \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}E; \\ &2) E + F = B, && \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(E - F) = \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}B. \end{aligned}$$

Решения этих систем:

$$1) B = \frac{v(p) - v(q)}{v(p) + v(q)}A, \qquad E = \frac{2v(p)v(q)}{v(p) + v(q)}A; \tag{69}$$

$$2) E = \frac{v(p) - v(q)}{v(p) + v(q)}F, \qquad B = \frac{2v(p)v(q)}{v(p) + v(q)}F, \tag{70}$$

где $v(p) = p(p^2+1)^{-1/2}$ (скорость релятивистской частицы единичной массы с импульсом $p$).

Нетрудно непосредственно проверить соотношения ортогональности, доказанные в общем виде в теореме 12.

По аналогии с нерелятивистской квантовой механикой можно считать, что решение (67) описывает движение частицы, налетающей слева, а решение (68) — справа. Согласно общепринятой интерпретации квантовой механики коэффициент отражения потока частиц от порога $R = |B/A|^2$ в первом случае и $R = |E/F|^2$ во втором, а коэффициент прохождения —

$D = |E/A|^2 v(q)/v(p)$ в первом случае и $D = |B/F|^2 v(p)/v(q)$. Используя (69) и (70), в обоих случаях получаем:

$$R = \left|\frac{v(p) - v(q)}{v(p) + v(q)}\right|^2, \qquad D = \frac{4v(p)v(q)}{[v(p) + v(q)]^2}.$$

Таким образом, эти коэффициенты не зависят от направления движения частицы и $R + D = 1$. Аналогия с нерелятивистской квантовой механикой — полная. Рассмотрим и противоположный предел, ультрарелятивистский, при $p \gg 1$. В этом пределе, как не трудно видеть, $v(q) \approx v(p) \approx 1$, поэтому $R \approx 0$, $D \approx 1$, что вполне согласуется с представлением о классичности ультрарелятивистской частицы — она не отражается, пролетая над порогом.

Но в общепринятом варианте релятивистской квантовой механики движение бесспиновой частицы описывается уравнением Клейна-Гордона, сужения которого на $(-\infty, 0]$ и $(0, \infty)$ в нашем случае имеют вид:

$$u(x) - u''(x) - \lambda^2 u(x) = 0, \qquad \forall x \leqslant 0, \tag{71}$$

$$u(x) - u''(x) - (\lambda - U_0)^2 u(x) = 0, \qquad \forall x > 0, \tag{72}$$

при этом требуется выполнение условий непрерывности в точке $x = 0$ решения и его первой производной. Легко видеть, что (72) имеет, в отличие от (63), решения вида (66) с вещественным $q$ не только при $\lambda \geqslant 1 + U_0$, но и при $\lambda \leqslant U_0 - 1$ (“нижний континуум”). При $U_0 \geqslant 2$ это неравенство совместимо с неравенством $\lambda \geqslant 1$, то есть на отрицательной полуоси эти $\lambda$ входят в “верхний континуум”. Так как решения верхнего континуума считают относящимися к частице, а нижнего — к античастице, то есть приходится допустить, что в точке $x = 0$ частица превращается в античастицу и наоборот (так называемый парадокс Клейна). Но это противоречит закону сохранения заряда.

Условия в точке $x = 0$, накладываемые на решения уравнение Клейна-Гордона, также приводят к серьезным трудностям. Из них вместо, например, (69), получаем:

$$B = \frac{p - q}{p + q} A, \qquad E = \frac{2pq}{p + q} A$$

и, следовательно,

$$R = \left|\frac{p - q}{p + q}\right|^2, \qquad D = \frac{4v(q)pq}{v(p)(p + q)^2}.$$

Но теперь $R+D \neq 1$! Более того, коэффициент прохождения зависит теперь от направления движения частицы. Конечно, обе эти трудности можно снять, если коэффициент прохождения определить (для налетающей слева частицы) формулой $D = |C/A|^2 q/p$, но это противоречит смыслу этого коэффициента, который должен быть отношением потоков, то есть скоростей, а не импульсов. Не все хорошо получается и с ультрарелятивистским пределом. Действительно, поскольку $q = [(\lambda - U_0)^2 - 1]^{1/2} = [p^2 - 2U_0 p + U_0^2]^{1/2}$, и коэффициент отражения в этом пределе оказывается пропорциональным высоте порога.

Таким образом, общепринятое уравнение Клейна-Гордона приводит к существенным трудностям в физической интерпретации решений, хотя математически оно очень простое. И причина этого не в рождении частиц из вакуума, как считают физики, а в том, что простые математические свойства уравнения Клейна-Гордона не адекватны тому физическому смыслу, который этому уравнению придают физики.

Наконец, заметим, что использовать определение функции от оператора, данное Дж. фон Нейманом, для этой задачи, по-видимому, невозможно, поскольку, во-первых, решения не являются квадратично интегрируемыми функциями, во-вторых, при таком определении просто нет места для условий (20) в точке $x = 0$.

И еще одно замечание: минимальная энергия, с которой частица может существовать слева от нуля, зависит от $U_0$. Это, конечно, нелокальность, но нелокальнность нашей задачи, а не оператора $\sqrt{1 - \partial_x^2}$, она возникает из-за условий (20).

Пример 4. Внесем по сравнению с примером 3 лишь одно изменение — пусть теперь $U(x)$ соответствует потенциальной яме или потенциальному барьеру:

$$U(x) = \begin{cases} U_0, x \in [a, b], \\ 0, \ \ x \notin [-a, a] \end{cases}$$

(яме соответствует случай $U_0 < 0$, барьеру — $U_0 > 0$).

Теперь функция $U(x)$ симметрична, и задачу можно свести к задаче типа $B$, ища симметричные решения, подчиняющиеся условию $u'(0) = 0$ и антисимметричные решения, подчиняющиеся условию $u(0) = 0$. Пусть сначала $U_0 < 0$. Тогда $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\}$. Если $0 < \lambda \leqslant 1$, то, учитывая условия ограниченности решения, запишем симметричное решение в виде:

$$\psi_s(x) = Ae^{-\mu(|x|-a)}, \ |x| > a; \quad \psi(x) = B_s \operatorname{ch}(\nu x), \ |x| \leqslant a, \tag{73}$$

а антисимметричное — в виде:

$$\psi(x) = \operatorname{sign} x A e^{-\mu(|x|-a)},\ |x| \geqslant a; \quad \psi_a(x) = B_a \operatorname{sh}(\nu x),\ |x| \leqslant a, \tag{74}$$

где $\mu = (1-\lambda^2)^{1/2} \in \mathbb{R}$, $\nu = [1-(\lambda-U_0)^2]^{1/2}$. Используя условия (20), получим две системы:

$$1) A - B_s \operatorname{ch}(\nu a) = -h(\mu)A - h(\nu)B_s \operatorname{sh}(\nu a) = 0,$$
$$2) A - B_a \operatorname{sh}(\nu a) = -h(\mu)A - h(\nu)B_a \operatorname{ch}(\nu a) = 0.$$

Их определители

$$\Delta_s = -[h(\nu)\operatorname{sh}(\nu a) + h(\mu)\operatorname{ch}(\nu a)],$$
$$\Delta_a = -[h(\nu)\operatorname{ch}(\nu a) + h(\mu)\operatorname{sh}(\nu a)]$$

строго отрицательны при вещественных $\nu$, поэтому $\lambda \in \Lambda$ может быть собственным числом нашей задачи, только если $\lambda > 1 + U_0$. Тогда $\nu = ip$, где $p = [(\lambda-U_0)^2 - 1]^{1/2} \in \mathbb{R}$, и собственные числа точечного спектра — это те корни уравнений

$$\operatorname{tg}\left[a\sqrt{(\lambda-U_0)^2-1}\right] = -\frac{\lambda-U_0}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-(\lambda-U_0)^2}}$$

и

$$\operatorname{tg}\left[a\sqrt{(\lambda-U_0)^2-1}\right] = \frac{\lambda}{\lambda-U_0}\sqrt{\frac{1-(\lambda-U_0)^2}{1-\lambda^2}},$$

которые не превышают единицы (“разрешенные” значения энергии частицы в яме). Они составляют точечный спектр $\sigma_1$ нашей задачи, причем корням первого из этих уравнений $\lambda_{2n-1}$ соответствуют симметричные собственные функции:

$$\psi^{2n-1}(x) = Ae^{-\mu(|x|-a)},\ |x| \geqslant a; \quad \psi^{2n-1}(x) = A\frac{\cos p_{2n-1}x}{\cos p_{2n-1}a},\ |x| \leqslant a, \tag{75}$$

а корням второго — антисимметричные:

$$\psi^{2n}(x) = \operatorname{sign} x A e^{-\mu(|x|-a)},\ |x| \geqslant a; \quad \psi^{2n}(x) = A\frac{\sin p_{2n}x}{\sin p_{2n}a},\ |x| \leqslant a, \tag{76}$$

где $p_i = [(\lambda_i - U_0)^2 - 1]^{1/2}$.

Пусть теперь $\lambda \geqslant 1$, тогда и $\mu$, так же как и $\nu$, в (73) и (74) — чисто мнимое: $\mu = iq$, $q = (\lambda^2-1)^{1/2}$. Вместо (73) и (74) имеем соответственно:

$$\psi_s(x) = A_s \cos(qx + \operatorname{sign} x\varphi_1),\ |x| \geqslant a; \quad \psi_s(x) = C_s \cos px,\ |x| \leqslant a, \tag{77}$$

и

$$\psi_a(x) = A_a \sin(qx + \operatorname{sign} x\varphi_2),\ |x| \geqslant a; \quad \psi_a(x) = C_a \sin px,\ |x| \leqslant a, \qquad (78)$$

Теперь для любого $\lambda = (p^2+1)^{1/2} + U_0 = (q^2+1)^{1/2} \geqslant 1$, используя условия (20), получаем:

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg}(w \operatorname{tg} pa) - qa, \qquad A_1/C_1 = \sqrt{\cos^2 pa + w^2 \sin^2 pa},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arcctg}(w \operatorname{ctg} pa) - qa, \qquad A_2/C_2 = \sqrt{w^2 \cos^2 pa + \sin^2 pa},$$

где $w = v(p)/v(q)$.

Таким образом, $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geqslant 1\}$ — это непрерывный спектр нашей задачи, причем каждому значению этого множества соответствуют два решения, то есть это $\sigma_3$. Множество $\sigma_2$ для нашей задачи пусто. Физический смысл решений, соответствующих непрерывному спектру, состоит в том, что они описывают рассеяние частиц. Матрица рассеяния в данном случае (когда функция $U(x)$ симметрична) диагональна: $S_{ll'} = \exp(2i\varphi_l)\delta_l^{l'}$. Легко видеть, что при $q \to \infty$ $S_{ll'} \to \delta_l^{l'}$. Коэффициенты отражения и прохождения выражаются через $S_{ll'}$:

$$R = \Big|\sum_{l=1,2} (-1)^{l-1} e^{i\varphi_l} \sin\varphi_l\Big|^2, \qquad D = \Big|1 + i \sum_{l=1,2} e^{i\varphi_l} \sin\varphi_l\Big|^2.$$

Как и должно быть, $R + D = 1$. Если $U_0 > 0$, то отсутствует и точечный спектр $\sigma_1$, но все выводы относительно непрерывного спектра остаются в силе, кроме того, что теперь непрерывный спектр начинается с $\lambda = \max(1, U_0)$.

Непосредственно проверяются соотношения ортогональности, доказанные в общем виде в теореме 12.

Кратко рассмотрим, что получится, если к этой задаче применить уравнение Клейна-Гордона, причем учтем, что у частицы есть античастица. Если для частицы потенциальная функция $U(x)$, то для античастицы она имеет вид $-U(x)$, там, где для частицы — яма, для античастицы — барьер, и наоборот. Пусть $U_0 > 1$, а энергия частицы $\lambda_+ \in (0, U_0 - 1)$, тогда из уравнения Клейна-Гордона следует, что состоянию частицы с этой энергией соответствуют решения вида (75) и (76), то есть частица захватывается, локализуется отталкивающим потенциалом!. Но это еще не все, ведь для античастицы отрезок $[-a, a]$ — яма, и если у нее энергия $\lambda_- \in (-U_0 + 1, 0)$, ей тоже соответсвуют решения вида (75) и (76), то есть в этом отрезке одновременно могут захватываться и частица, и античастица, причем для суммы их энергий получаем неравенство $-U_0+1 < \lambda_+ + \lambda_- < U_0 - 1$, то есть при $U_0 > 1$ эта сумма может быть меньше нуля и, значит, их совместное рождение оказывается энергетически выгодным. Отсюда делают выводы о неустойчивости вакуума [13]. Нетрудно видеть, что это одна из разновидностей парадокса Клейна, который возникает из-за того, что в уравнение Клейна-Гордона разность $\lambda - U(x)$ входит только в квадрате. Если же использовать уравнение (7) с $f(\partial_x) = (1 - \partial_x^2)^{1/2}$, этого парадокса нет, поскольку энергия частицы обязательно больше $U_0$, а энергия античастицы обязательно больше $-U_0$.

# 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, показано, что для некоторого класса однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка может быть построена спектральная теория краевых задач, аналогичная теории Штурма-Лиувилля для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Применение этой теории к некоторым модельным задачам релятивистской квантовой механики показывает, что в этом случае не появляются некоторые трудности и парадоксы, характерные для общепринятого подхода. Таким образом, оказывается, что эти трудности и парадоксы связаны не со сложностью физической реальности, а с тем, что для изучения этой реальности используются не всегда адекватные математические методы. Автор предполагает в дальнейшем распространить предлагаемую здесь теорию на уравнения с потенциальными функциями, не являющимися кусочно постоянными, а также начать изучение дифференциальных уравнений в частных производных бесконечного порядка.

Автор выражает глубокую благодарность В. Д. Будаеву и В. Ф. Зайцеву за интерес к работе, ценные обсуждения и замечания.

# Список литературы

[1] V. M. Lagodinsky. International Congress on Computer Sistems and Applied Mathematics CSAM'93. St. Petersburg 1993. Abbstacts.

[2] В. М. Лагодинский. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1998, v 4.

$$http://www.neva.ru/journal/rus/ref/1998/vol4/r_lagodin.htm.$$

[3] В. М. Лагодинский. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1999, v 4.

$$http://www.neva.ru/journal/rus/ref/1998/vol4/r_lagodin.htm.$$

[4] Р. Рихтмаер. Принципы современной математической физики. М., Мир. 1982.

[5] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. М., Наука, 1970.

[6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Квантовая механика.

[7] Ю. Н. Бибиков. Курс теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Высшая школа, 1991.

[8] Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. М., Наука, 1967.

[9] И. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. М., Мир, Наука, 1964.

[10] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. Квантовая теория поля. Т.1. М., Мир, 1984.

[11] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., Наука, 1969.

[12] Ю. А. Дубинский. УМН. 1982, т. 37, **5**.

[13] И. М. Гельфанд, А. Г. Костюченко. ДАН СССР. **103**, с. 349.

[14] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ. 1971, т. 61, **6**(**12**).