ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2000
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория многомерных дифференциальных уравнений

ЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВЕЩЕСТВЕННОЙ АВТОНОМНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

В. Н. Горбузов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: gorbuzov@grsu.unibel.by

Автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx \;=\; P(x)\, dt\,, \tag{CD}$$

где $dx = \operatorname{colon}(dx_1\,, \ldots\,, dx_n)\,,$ $dt = \operatorname{colon}(dt_1\,, \ldots\,, dt_m)\,,$ когда элементами $(n\times m)$-матрицы $P(x) = \|P_{ij}(x)\|\,,$ $\forall\, x\in\mathbb{R}^n\,,$ являются полиномы $P_{ij}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\,,$ $i=\overline{1,n}\,,$ $j=\overline{1,m}\,,$ будем называть **полиномиальной**.

Если система (CD) вполне разрешимая [1], то её обозначим (ICD). Условия Фробениуса [1, с. 20 – 26; 2, с. 491 – 493, 527 – 530] полной разрешимости системы (CD) состоят в перестановочности автономных линейных дифференциальных операторов первого порядка, индуцированных этой дифференциальной системой,

$$\mathfrak{p}_j(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(x)\,\partial_i\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \quad j=\overline{1,m}\,,$$

что с помощью скобок Пуассона выражается коммутаторной системой тождеств

$$[\,\mathfrak{p}_j(x), \mathfrak{p}_\zeta(x)\,] \;=\; \mathfrak{o}\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \quad j=\overline{1,m}\,, \quad \zeta=\overline{1,m}\,. \tag{1}$$

Постановка задачи. Построение первых интегралов и последних множителей по частным интегралам нами рассматривалось в [3], когда система (CD) была задана в арифметическом, вообще говоря, комплексном пространстве $\mathbb{C}^{m+n}$. А в вещественном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ по частным интегралам, например, были построены [4] области выпрямляемости динамических систем (ICD) и установлены [5] достаточные условия устойчивости и неустойчивости орбит системы (ICD), определяемых её слоениями коразмерности один. При этом методы построения первых интегралов и последних множителей на областях из пространств $\mathbb{C}^{m+n}$ и $\mathbb{R}^{m+n}$ были формально общими. Наша задача состоит в отражении специфики построения первых интегралов и последних множителей по частным интегралам в областях из вещественного фазового пространства $\mathbb{R}^n$ и расширенного пространства $\mathbb{R}^{m+n}$. Для этого будем использовать то, что рассматриваемая система уравнений в полных дифференциалах является полиномиальной, а первые интегралы и последние множители строятся по частным интегралам, которые либо являются полиномами, либо построены на полиномиальной основе. Это ограничивает класс рассматриваемых систем (CD), но в то же время предоставляет возможность определить виды первых интегралов и последних множителей, которые строятся по таким частным интегралам.

Исходные положения. Ввиду того, что поставленную задачу будем решать для систем (CD), которые необязательно должны быть вполне разрешимыми, понятия первого интеграла и последнего множителя введём на основании следующих определений.

Определение 1. *Семейство $F(t,x) = C$, где C — произвольная вещественная постоянная, построенное на основании голоморфной на области G из расширенного пространства $\mathbb{R}^{m+n}$ функции $F\colon G \to \mathbb{R}$, назовём* первым интегралом *на области G системы (CD), если производные Ли в силу системы (CD) функции F тождественно равны нулю на области G:*

$$\mathfrak{P}_j F(t,x) \ = \ 0\,, \quad \forall\,(t,x) \in G\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \tag{2}$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{P}_j(t,x) \ = \ \partial_{t_j} \ + \ \mathfrak{p}_j(x)\,, \quad \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^{m+n}\,, \quad j = \overline{1,m}\,.$$

Определение 2. *Голоморфную на области G из расширенного пространства $\mathbb{R}^{m+n}$ функцию $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ назовём* последним множителем *на области G системы (CD), если для производных Ли функции μ в силу системы (CD) выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{P}_j \mu(t,x) \;=\; -\,\mu(t,x)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{p}_j(x)\,, \quad \forall\,(t,x)\in G\,, \quad j=\overline{1,m}\,. \tag{3}$$

Если система (CD) является вполне разрешимой, то её базис первых интегралов состоит из n функционально независимых на области G, $G\subset\mathbb{R}^{m+n}$, первых интегралов [1, с. 131; 2, с. 523 – 525]. При этом [6] количество функционально независимых на области V фазового пространства $\mathbb{R}^n$ автономных первых интегралов системы (ICD) равно $n-r$, где $r=\operatorname{rank}P(x)$ почти везде на $\mathbb{R}^n$.

В случае неполной разрешимости системы (CD) её базис первых интегралов может быть построен [7] на основании интегральных связей между системой (CD) и ассоциированной к ней нормальной линейной однородной дифференциальной системой уравнений в частных производных

$$\mathfrak{P}_j(t,x)\,u \;=\; 0\,, \quad j=\overline{1,m}\,.$$

Непосредственно вычислением производных Ли в силу системы (CD) устанавливаем свойство Якоби последних множителей системы уравнений в полных дифференциалах (аналог на случай обыкновенных дифференциальных систем см., например, в [8, с. 117 – 121]), а также связи между последними множителями и первыми интегралами системы (CD).

Предложение 1. *Если голоморфные на области G из расширенного пространства $\mathbb{R}^{m+n}$ функции $\mu_1\colon G\to\mathbb{R}$ и $\mu_2\colon G\to\mathbb{R}$ суть последние множители на области G системы (CD), то семейство*

$$\frac{\mu_1(t,x)}{\mu_2(t,x)} \;=\; C$$

будет первым интегралом на подобласти области G этой системы.

Предложение 2. *Пусть $\mu_1\colon G\to\mathbb{R}$ есть последний множитель системы (CD), а семейства*

$$F_\tau(t,x) \;=\; C_\tau\,, \quad \tau=\overline{1,k}\,,$$

образуют базис первых интегралов на области G этой системы. Тогда функция $\mu_2\colon G\to\mathbb{R}$ будет последним множителем системы (CD), если и только если она представима в виде

$$\mu_2(t,x) \;=\; \mu_2(t,x)\,\Phi\left(F_1(t,x),\,\ldots\,,F_k(t,x)\right)\,, \quad \forall\,(t,x)\in G\,,$$

где Φ *— некоторая голоморфная функция.*

При этом в части необходимости требование о том, что семейства $F_\tau(t,x) = C_\tau$, $\tau=\overline{1,k}$, образуют базис первых интегралов системы (CD) излишне, а функция Φ — произвольная голоморфная.

На случай полной разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах предложение 2 выражает следующую закономерность (аналог на случай обыкновенных дифференциальных систем см., например, в [9, с. 91]): *если система* (ICD) *имеет последний множитель* $\mu_1 \colon G \to \mathbb{R}$, *то функция* $\mu_2 \colon G \to \mathbb{R}$ *будет последним множителем системы* (ICD) *тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$\mu_2(t,x) \ = \ \mu_1(t,x)\,\Phi\,(F_1(t,x), \ldots , F_n(t,x)) \ , \quad \forall\,(t,x)\in G\,,$$

где $F_i(t,x)=C_i$, $i=\overline{1,n}$, *есть функционально независимые на области* G *первые интегралы системы* (ICD), Φ *— голоморфная функция.*

Частные интегралы. Для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ введём объединяющее обозначение $\mathbb{K}$. Основываясь на алгебраичности системы (CD), введём следующее понятие частного интеграла, которое терминологически закрепим композиционным термином "полиномиальный частный интеграл".

Определение 3. *Полином* $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *назовём* полиномиальным частным интегралом *системы* (CD), *если для прозводных Ли в силу системы* (CD) *полинома* u *выполняются тождества*

$$\mathfrak{p}_j u(x) \ = \ u(x)\,U_j(x)\,, \quad \forall\,x\in\mathbb{R}^n, \quad j=\overline{1,m}\,,$$

где полиномы $U_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, $j=\overline{1,m}$.

Если комплекснозначный полином $\mathfrak{w} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ при $\dfrac{\operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)} \not\equiv \text{const}$ является полиномиальным частным интегралом системы (CD), то выполняется система тождеств

$$\mathfrak{p}_j\mathfrak{w}(x) \ = \ \mathfrak{w}(x)\,\mathfrak{W}_j(x)\,, \quad \forall\,x\in\mathbb{R}^n\,, \quad j=\overline{1,m}\,,$$

где полиномы $\mathfrak{W}_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $j=\overline{1,m}$. Эта система тождеств распадается на вещественную систему тождеств

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x) = \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j(x) - \operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j(x)\,, \ \ \forall\,x\in\mathbb{R}^n\,, \ j=\overline{1,m}\,,$$

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Im}\mathfrak{w}(x) = \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j(x) + \operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j(x)\,, \ \ \forall\,x\in\mathbb{R}^n\,, \ j=\overline{1,m}\,.$$

Поэтому имеют место следующие закономерности.

Предложение 3. *Пусть система* (CD) *имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл*

$$\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \quad \textit{при} \quad \frac{\operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)} \not\equiv \text{ const}\,.$$

Тогда: 1) *комплекснозначный сопряжённый полином*

$$\overline{\mathfrak{w}}\colon x \to \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x) - i\operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,$$

является полиномиальным частным интегралом системы (CD);

2) *вещественный полином*

$$\operatorname{Re}^2\mathfrak{w} + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}\colon x \to \operatorname{Re}^2\mathfrak{w}(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,$$

является полиномиальным частным интегралом системы (CD) *и выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{p}_j\left[\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}(x)\right] = 2\left[\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}(x)\right]\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j(x)\,,$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \quad j = \overline{1,m}\,;$$

3) *для функции*

$$\varphi\colon x \to \exp A(x)\,, \quad \forall\, x \in V_0\,,$$

где

$$A(x) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)}\,, \quad \forall\, x \in V_0\,,$$

выполняется система тождеств

$$\mathfrak{p}_j \exp A(x) = \exp A(x)\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j(x)\,, \quad \forall\, x \in V_0\,, \quad j = \overline{1,m}\,.$$

Основываясь на определении 3, непосредственно вычислениями производных Ли в силу системы (CD) устанавливаем [10].

Предложение 4. *Произведение* u_1u_2 *полиномов* $u_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *и* $u_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *является полиномиальным частным интегралом системы* (CD) *тогда и только тогда, когда его сомножители* u_1 *и* u_2 *являются полиномиальными частными интегралами системы* (CD).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \bigl\{2x_2(x_1^2+x_2^2)^2 - (1+x_1^2+x_2^2)\bigl[2x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2)\bigr]\bigr\}(dt_1-dt_2),\\
dx_2 &= \bigl\{(1+x_1^2+x_2^2)\bigl[2x_1 + x_2(x_1^2+x_2^2)\bigr] - 2x_1(x_1^2+x_2^2)^2\bigr\}(dt_1-dt_2), \qquad (4)\\
dx_3 &= \bigl[x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_1^2+x_2^2-x_3^2)^2\bigr]dt_1 + \bigl[x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_1^2+x_2^2-x_3^2)^2\bigr]dt_2
\end{aligned}$$

такова, что дифференциал в силу системы (CD)

$$d(c+x_1^2+x_2^2)\Big|_{(4)} = 2\,(1+x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2)\,(dt_1-dt_2)\,, \quad \forall\,(t,x)\in\mathbb{R}^5\,.$$

Поэтому полиномы

$$w\colon x\to\ 1\ +\ x_1^2\ +\ x_2^2\,, \quad \forall\,x\in\mathbb{R}^2\,,$$

$$\mathfrak{w}_1\colon x\to\ x_1\ +\ ix_2\,,\ \ \forall\,x\in\mathbb{R}^2\,, \quad \mathfrak{w}_2\colon x\to\ x_1\ -\ ix_2\,,\ \ \forall\,x\in\mathbb{R}^2\,,$$

и их произведения $w^n\mathfrak{w}_1^{n_1}\mathfrak{w}_2^{n_2}$, где $n,\ n_1,\ n_2$ — целые неотрицательные числа, будут полиномиальными частными интегралами системы (4). При этом вещественный полиномиальный частный интеграл w не определяет интегрального многообразия $w(x)=0$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а каждый из комплекснозначных полиномиальных частных интегралов $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ определяет интегральное многообразие системы (4) в виде прямой $x_1=x_2=0$ на фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Определение 4. *Пусть полиномиальный частный интеграл $u\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ системы (CD) такой, что существуют полиномы*

$$Q_{h_\xi g_\xi}\colon\mathbb{R}^n\to\ \mathbb{K} \quad \text{и} \quad R_{h_\xi g_\xi j}\colon\mathbb{R}^n\to\ \mathbb{K}\,,$$

удовлетворяющие системе тождеств

$$\mathfrak{p}_j K_{h_\xi g_\xi}(x) = R_{h_\xi g_\xi j}(x)\,, \quad \forall\,x\in V\,, \ \ \xi=\overline{1,\varepsilon}\,, \ \ h_\xi\in\mathbb{N}\,, \ \ g_\xi=\overline{1,f_\xi}\,, \ \ j=\overline{1,m}\,,$$

где

$$K_{h_\xi g_\xi}(x) = Q_{h_\xi g_\xi}(x)\,u^{-h_\xi}(x)\,, \quad \forall\,x\in V\,,$$

множество V из $\mathbb{R}^n$ таково, что $u(x)\neq 0$, $\forall\,x\in V$, причём:

1) *каждый полином $Q_{h_\xi g_\xi}$, $\xi=\overline{1,\varepsilon}$, $h_\xi\in\mathbb{N}$, $g_\xi=\overline{1,f_\xi}$, взаимно прост с полиномиальным частным интегралом u;*

2) *у полиномов $R_{h_\xi g_\xi j}$, $\xi=\overline{1,\varepsilon}$, $h_\xi\in\mathbb{N}$, $g_\xi=\overline{1,f_\xi}$, $j=\overline{1,m}$, степени таковы, что*

$$\max\bigl\{\deg R_{h_\xi g_\xi j}\colon \xi=\overline{1,\varepsilon}\,,\ h_\xi\in\mathbb{N}\,,\ g_\xi=\overline{1,f_\xi}\bigr\} \ \leqslant\ p_j-1\,,$$

$$p_j = \max\left\{\deg P_{ij} \colon i = \overline{1,n}\,\right\},\ \ j = \overline{1,m}\,.$$

Тогда число

$$\varkappa \ = \ 1 \ + \ \sum_{\xi=1}^{\varepsilon} f_\xi$$

назовём кратностью *полиномиального частного интеграла* u .

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 \ &= \ x_1(1+x_1+x_2)\,dt_1 \ + \ 2x_1(1+x_1+x_2)\,dt_2\,,\\ dx_2 \ &= \ (2x_2+x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\,dt_1 \ + \ (4x_2+x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2)\,dt_2 \end{aligned} \tag{5}$$

имеет двукратный полиномиальный частный интеграл

$$w\colon x \to \ x_1\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

ибо

$$d\frac{2x_2+2x_1x_2+x_2^2}{x_1^2}\bigg|_{(5)} = \ 2(1+x_1+x_2)\,(dt_1+dt_2)\,, \ \ \forall\,(t,x)\in\mathbb{R}^4 \ \text{ при } \ x_1\neq 0\,.$$

На случай комплекснозначного полиномиального частного интеграла системы (CD) на основании определения 4 относительно его кратности устанавливаем следующую закономерность.

Предложение 5. *Если система* (CD) *имеет комплекснозначный кратный полиномиальный частный интеграл, то у ему комплексно сопряжённого полиномиального частного интеграла такая же кратность.*

Определение 5. *Функцию*

$$\omega\colon x \to \ \exp v(x)\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,,$$

где $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— полином, назовём* условным частным интегралом *системы* (CD), *если*

$$\mathfrak{p}_j v(x) \ = \ S_j(x)\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \quad j = \overline{1,m}\,,$$

где полиномы $S_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, *степеней* $\deg S_j \leqslant p_j - 1$ *соответственно.*

Условный полиномиальный частный интеграл характеризуется прежде всего тем, что он не определяет интегрального многообразия системы (CD) на фазовом пространстве, а также тем, что он построен на полиномиальной основе и определён на всём фазовом пространстве.

Системы типа Дарбу. Пусть система (CD) имеет $s+r$ вещественных полиномиальных частных интегралов

$$w_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad k=\overline{1,s+r}\,, \tag{6}$$

среди которых содержится $s \geqslant 0$ соответственно с кратностями $\varkappa_l$, $l=\overline{1,s}$, и $\mathfrak{s}+\mathfrak{r}$ комплекснозначных полиномиальных частных интегралов

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \quad \text{при} \quad \frac{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)} \not\equiv \text{const}\,, \quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,, \tag{7}$$

среди которых содержится $\mathfrak{s} \geqslant 0$ соответственно с кратностями $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{l}=\overline{1,\mathfrak{s}}$. Кроме того, известно $q \geqslant 0$ условных частных интегралов

$$\omega_\nu\colon x \to \exp v_\nu(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \quad \nu=\overline{1,q}\,, \tag{8}$$

где $v_\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nu=\overline{1,q}$, суть полиномы.

Введём в рассмотрение число

$$\mathfrak{a} \;=\; r \;+\; \mathfrak{r} \;+\; \sum_{l=1}^{s} \varkappa_l \;+\; \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}} \;+\; q\,.$$

Если для системы (CD) *число* $\mathfrak{a} \geqslant 1$, *то будем считать, что система* (CD) *является системой класса* $\mathcal{A}$ *и обозначать её* $(CD\mathcal{A})$. В соответствии с определениями 3 – 5 и предложениями 3 – 5 получаем следующий критерий принадлежности системы (CD) классу $\mathcal{A}$.

Предложение 6. *Система* (CD) *принадлежит классу* $\mathcal{A}$, *если и только если выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{p}_j w_k(x) \;=\; w_k(x)\, W_{kj}(x)\,, \quad j=\overline{1,m}\,,\; k=\overline{1,s+r}\,,$$

$$\mathfrak{p}_j K_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}(x) \;=\; R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}(x)\,,$$

$$j=\overline{1,m}\,, \quad l=\overline{1,s}\,, \quad \xi_l=\overline{1,\varepsilon_l}\,, \quad h_{\xi_l}\in\mathbb{N}\,, \quad g_{\xi_l}=\overline{1,f_{\xi_l}}\,,$$

$$\mathfrak{p}_j \left[\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)\right] \;=\; 2\left[\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)\right]\operatorname{Re}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x)\,,$$

$$j=\overline{1,m}\,, \quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,$$

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)} \;=\; \operatorname{Im}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x)\,, \quad j=\overline{1,m}\,,\; \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,, \tag{9}$$

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) \;=\; \operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}j}(x)\,,$$

$$j=\overline{1,m}\,,\quad \mathfrak{l}=\overline{1,\mathfrak{s}}\,,\quad \zeta_{\mathfrak{l}}=\overline{1,\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}}\,,\quad \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\in\mathbb{N}\,,\quad \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=\overline{1,\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\,,$$

$$\mathfrak{p}_j \mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) \;=\; \mathrm{Im}\,\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}j}(x)\,,$$

$$j=\overline{1,m}\,,\quad \mathfrak{l}=\overline{1,\mathfrak{s}}\,,\quad \zeta_{\mathfrak{l}}=\overline{1,\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}}\,,\quad \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\in\mathbb{N}\,,\quad \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=\overline{1,\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\,,$$

$$\mathfrak{p}_j v_\nu(x) \;=\; S_{\nu j}(x)\,,\quad j=\overline{1,m}\,,\ \nu=\overline{1,q}\,,\ \forall\, x\in V\,,$$

где $W_{kj}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $k=\overline{1,s+r}$, $j=\overline{1,m}$, *и* $\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, $\mathfrak{k}= =\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}$, $j=\overline{1,m}$, *суть полиномы;*

$$K_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}(x) \;=\; Q_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}(x)\, w^{-h_{\xi_l}}(x)\,,\quad \forall\, x\in V\,,$$

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) \;=\; \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x)\,\mathfrak{w}^{-\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x)\,,\quad \forall\, x\in V\,,$$

полиномы $Q_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $l=\overline{1,s}$, $\xi_l=\overline{1,\varepsilon_l}$, $h_{\xi_l}\in \in\mathbb{N}$, $g_{\xi_l}=\overline{1,f_{\xi_l}}$, $j=\overline{1,m}$, $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}j}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, $\mathfrak{l}= =\overline{1,\mathfrak{s}}$, $\zeta_{\mathfrak{l}}=\overline{1,\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}}$, $\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=\overline{1,\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}$, $j=\overline{1,m}$, $S_{\nu j}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\nu= =\overline{1,q}$, $j=\overline{1,m}$, *определяются в соответствии с понятиями кратности полиномиального частного интеграла и условного частного интеграла, когда*

$$\varkappa_l \;=\; 1\;+\;\sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} f_{\xi_l}\,,\quad l=\overline{1,s}\,,\qquad \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}} \;=\; 1\;+\;\sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\,,\quad \mathfrak{l}=\overline{1,\mathfrak{s}}\,.$$

На основании полиномиальных частных интегралов (6) и (7) с учётом их кратностей и условных частных интегралов (8) системы $(CD\mathcal{A})$ построим функции

$$X\colon x\to\prod_{k=1}^{s+r} w_k^{\gamma_k}(x)\prod_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\bigl[\,\mathrm{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)+\,\mathrm{Im}^2\mathfrak{w}^{\mathfrak{k}}(x)\bigr]^{\eta_{\mathfrak{k}}},\quad \forall\, x\in\Omega\,,$$

и

$$Y\colon x\to\;\sum_{l=1}^{s}\sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l}\sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}}\alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}\,K_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}(x)\;+\;\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\tau_{\mathfrak{k}}\;\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}\;+$$

$$+\;\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}}\sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}}\sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x)\;+\;\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}}\sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}}\sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x)\;+$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu \, v_\nu(x), \quad \forall\, x \in \Omega\,, \quad \Omega \subset V\,,$$

где γ_k, $k = \overline{1, s+r}$, $\eta_{\mathfrak{k}}$, $\tau_{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s}+\mathfrak{r}}$, $\alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}$, $l = \overline{1,s}$, $\xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}$, $h_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}$, $\varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}$, $\zeta_\mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{e}_\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, β_ν, $\nu = \overline{1,q}$, есть числа из поля $\mathbb{R}$.

Семейство

$$X(x)\ \exp\,[\,I\,t \;+\; Y(x)\,] \;=\; C\,, \tag{10}$$

где $I = (I_1, \ldots, I_m)$, $I_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, C — произвольная вещественная постоянная, с учётом системы тождеств (9) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(CD\mathcal{A})$, если и только если

$$I_j \;+\; \Xi_j(x) \;=\; 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,m}\,, \tag{11}$$

где

$$\Xi_j(x) \;=\; \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k\, W_{kj}(x) \;+\; \sum_{l=1}^{s} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}\, R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}(x) \;+$$

$$+\; 2\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \mathrm{Re}\, \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x) \;+\; \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \tau_{\mathfrak{k}} \mathrm{Im}\, \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x) \;+\; \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{e}_\mathfrak{l}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}} \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}} \mathrm{Re}\, \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}j}(x) \;+$$

$$+\; \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{e}_\mathfrak{l}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}} \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}\, \mathrm{Im}\, \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}j}(x) \;+\; \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu\, S_{\nu j}(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \quad j = \overline{1,m}\,.$$

Тем самым, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы система* $(CD\mathcal{A})$ *имела первый интеграл* (10), *необходимо и достаточно существования постоянных* $\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \tau_{\mathfrak{k}}$, $\alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}, \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, β_ν, I_j *таких, что выполняется система тождеств* (11).

С учётом системы тождеств (9) на основании определения 2 заключаем, что функция

$$\mu\colon (t,x) \to X(x)\ \exp\,[\,It + Y(x)]\,, \quad \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^m \times \Omega\,, \tag{12}$$

будет последним множителем на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(CD\mathcal{A})$, если и только если

$$I_j \ + \ \Xi_j(x) \ = \ -\operatorname{div}\mathfrak{p}_j(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \ \ j = \overline{1,m}\,, \tag{13}$$

и можем утверждать.

Теорема 2. *Для того чтобы система* $(CD\mathcal{A})$ *имела последний множитель* (12), *необходимо и достаточно существования постоянных* γ_k, $\eta_{\mathfrak{k}}$, $\tau_{\mathfrak{k}}$, $\alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}$, $\varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, β_ν, I_j *таких, что выполняется система тождеств* (13).

Виды первого интеграла и последнего множителя системы (CD) класса $\mathcal{A}$ определяются в соответствии с такими закономерностями.

Теорема 3. *Если система* $(CD\mathcal{A})$ *имеет первый интеграл*

$$\begin{gathered} F\Big(w_1(x)\,,\ \ldots\,,\ w_{s+r}(x)\,,\ K_{1h_11}(x)\,,\ \ldots\,,\ K_{sh_{\varepsilon_s}f_{\varepsilon_s}}(x)\,, \\[2ex] \operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_1(x)\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)\,, \\ \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)}\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}\,,\ \ \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_11}(x)\,,\ \ldots\,, \\ \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x)\,,\ \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_11}(x)\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x)\,, \\[2ex] v_1(x)\,,\ \ldots\,,\ v_q(x)\Big)\, Z(t) \ = \ C\,, \end{gathered} \tag{14}$$

где F *и* Z — *некоторые голоморфные функции, построенный на основании автономных полиномиальных частных интегралов* (6) *и* (7) *с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов* (8)[1], *то его можно представить в виде* (10).

Доказательство. Без нарушения общности рассуждений семейство (14) запишем в следующем виде

$$\begin{gathered} \widetilde{F}\Big(\ln w_1(x)\,,\ \ldots\,,\ \ln w_{s+r}(x)\,,\ K_{1h_11}(x)\,,\ \ldots\,,\ K_{sh_{\varepsilon_s}f_{\varepsilon_s}}(x)\,, \\[2ex] \ln\big[\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_1(x)\big]\,,\ \ldots\,,\ \ln\big[\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)\big]\,, \end{gathered}$$

[1]Априори считая, что система $(CD\mathcal{A})$ не имеет первых интегралов вида (14), построенных на основании меньшего числа функций w_k, $k = \overline{1, s+r}$, $K_{1h_11}, \ldots, K_{sh_{\varepsilon_s}f_{\varepsilon_s}}$, $\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}} + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}}$, $\mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s}+\mathfrak{k}}$, $\operatorname{Re}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_11}, \ldots, \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}$, $\operatorname{Im}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_11}, \ldots, \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}$, v_ν, $\nu = \overline{1,q}$.

$$\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)}\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}\,,\quad \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x)\,,\ \ldots\,, \tag{15}$$

$$\operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x)\,,\ \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x)\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x)\,,$$

$$v_1(x)\,,\ \ldots\,,\ v_q(x)\Big)\ \ln Z(t)\ =\ C\,,$$

где $\widetilde{F}$ — некоторая голоморфная функция. С учётом системы тождеств (9) семейство (15) будет первым интегралом системы $(CD\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда имеет место система тождеств

$$\sum_{k=1}^{s+r} W_{kj}\,\partial_{\ln w_k}\ln\widetilde{F}\ +\ \sum_{l=1}^{s}\sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l}\sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}\,\partial_{K_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}}\ln\widetilde{F}\ +$$

$$+\ 2\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\operatorname{Re}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}\,\partial_{\ln\left(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_\mathfrak{k}+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_\mathfrak{k}\right)}\ln\widetilde{F}\ +\ \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\operatorname{Im}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}\,\partial_{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}}\ln\widetilde{F}\ +$$

$$(16)$$

$$+\ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}}\sum_{\zeta_\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{e}_\mathfrak{l}}\sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}}\operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}j}\,\partial_{\operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}}\ln\widetilde{F}\ +\ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}}\sum_{\zeta_\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}}\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}j}\,\partial_{\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}}\ln\widetilde{F}\ +$$

$$+\ \sum_{\nu=1}^{q} S_{\nu j}\,\partial_{v_\nu}\ln\widetilde{F}\ +\ \partial_{t_j}\ln Z\ =\ 0\,,\ \ \forall\,(t,x)\in G\,,\ G\subset\mathbb{R}^{m+n}\,,\ j=\overline{1,m}\,.$$

Введём новые переменные

$$y_k\ =\ \ln w_k\,,\ \ k=\overline{1,s+r}\,,\quad y_{s+r+1}\ =\ K_{1h_1 1}\,,\ \ldots\,,\ y_{s+r+\lambda}\ =\ K_{sh_{\varepsilon_s}f_{\varepsilon_s}}\,,$$
$$y_{s+r+\lambda+\mathfrak{k}}\ =\ \ln\left(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_\mathfrak{k}+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_\mathfrak{k}\right)\,,\quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,$$
$$y_{s+r+\lambda+\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mathfrak{k}}\ =\ \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}\,,\quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,$$
$$y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+1}\ =\ \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}\,,\ \ldots\,,\ y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\mu}\ =\ \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}\,,$$
$$y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\mu+1}\ =\ \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}\,,\ \ldots\,,\ y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)}\ =\ \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}\,,$$
$$y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)+\nu}\ =\ v_\nu\,,\quad \nu=\overline{1,q}\,,$$

$$(17)$$

где $\lambda = \sum\limits_{l=1}^{s} \sum\limits_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} f_{\xi_l}$, $\mu = \sum\limits_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum\limits_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}$. В соответствии с системой тождеств (16) дифференциальная система $(CD\mathcal{A})$ имеет первый интеграл (15), если и только если система уравнений в полных дифференциалах

$$
\begin{aligned}
&dx = P(x)\,dt, \quad dy_k = \sum_{j=1}^{m} W_{kj}(x)\,dt_j, \quad k=\overline{1,s+r},\\
&dy_{s+r+1} = \sum_{j=1}^{m} R_{1h_1 1j}(x)\,dt_j, \ \dots, \ dy_{s+r+\lambda} = \sum_{j=1}^{m} R_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s} j}(x)\,dt_j,\\
&dy_{s+r+\lambda+\mathfrak{k}} = 2\sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x)\,dt_j, \quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}},\\
&dy_{s+r+\lambda+\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mathfrak{k}} = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Im}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x)\,dt_j, \quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}},\\
&dy_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+1} = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\mathfrak{R}_{1\mathfrak{h}_1 1j}(x)\,dt_j, \ \dots,\\
&dy_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\mu} = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}} j}(x)\,dt_j,\\
&dy_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\mu+1} = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Im}\mathfrak{R}_{1\mathfrak{h}_1 1j}(x)\,dt_j, \ \dots,\\
&dy_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)} = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}} j}(x)\,dt_j,\\
&dy_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)+\nu} = \sum_{j=1}^{m} S_{\nu j}(x)\,dt_j, \quad \nu=\overline{1,q},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

имеет первый интеграл

$$\widetilde{F}(y)\,Z(t) = C,$$

где $y=(y_1,\dots,y_\rho)$, $\rho = s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)+q$. При этом тождества (16) для системы (18) будут иметь вид

$$
\sum_{k=1}^{s+r} W_{kj}(x)\,\partial_{y_k}\ln\widetilde{F}(y) + R_{1h_1 1j}(x)\,\partial_{y_{s+r+1}}\ln\widetilde{F} + \dots +
$$

$$
+ R_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s} j}(x)\,\partial_{y_{s+r+\lambda}}\ln\widetilde{F}(y) + 2\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \operatorname{Re}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x)\,\partial_{y_{s+r+\lambda+\mathfrak{k}}}\ln\widetilde{F}(y) +
$$

$$
\begin{gathered}
+\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \operatorname{Im}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x)\,\partial_{ys+r+\lambda+\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mathfrak{k}} \ln \widetilde{F}(y)\;+ \\
+\operatorname{Re}\mathfrak{R}_{1\mathfrak{h}_1 1j}(x)\,\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+1}} \ln \widetilde{F}(y)\;+\;\ldots\;+ \\
+\operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}j}(x)\,\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\mu}} \ln \widetilde{F}(y)\;+ \\
+\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{1\mathfrak{h}_1 1j}(x)\,\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\mu+1}} \ln \widetilde{F}(y)\;+\;\ldots\;+ \\
+\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}j}(x)\,\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)}} \ln \widetilde{F}(y)\;+\;\sum_{\nu=1}^{q} S_{\nu j}(x)\,\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)+\nu}} \ln \widetilde{F}(y)\;+ \\
+\,\partial_{t_j}\ln Z(t)\;=\;0\,,\quad \forall\,(t,x,y)\in G\times \overset{*}{G}\,,\quad j=\overline{1,m}\,,
\end{gathered}
\tag{19}
$$

где область $\overset{*}{G}$ есть образ области G при отображении (17). Система тождеств (19) выполняется тогда и только тогда, когда

$$
\partial_{y_k}\widetilde{F}(y)\;=\;\gamma_k\,a\,,\quad k=\overline{1,s+r}\,,\qquad \partial_{y_{s+r+\theta}}\widetilde{F}(y)\;=\;\alpha_\theta\,a\,,\quad \theta=\overline{1,\lambda}\,,
$$

$$
\partial_{y_{s+r+\lambda+\mathfrak{k}}}\widetilde{F}(y)\;=\;\eta_{\mathfrak{k}}\,a\,,\quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,\qquad \partial_{y_{s+r+\lambda+\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mathfrak{k}}}\widetilde{F}(y)\;=\;\tau_{\mathfrak{k}}\,a\,,\quad \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,
$$

$$
\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\theta}}\widetilde{F}(y)\;=\;\varphi_\theta\,a\,,\quad \theta=\overline{1,\mu}\,,
$$

$$
\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r})+\mu+\theta}}\;\widetilde{F}\;(y)\;=\;\psi_\theta\,a\,,\quad \theta=\overline{1,\mu}\,,
$$

$$
\partial_{y_{s+r+\lambda+2(\mathfrak{s}+\mathfrak{r}+\mu)+\nu}}\widetilde{F}(y)\;=\;\beta_\nu\,a\,,\quad \nu=\overline{1,q}\,,\quad \forall\,y\in\overset{*}{G}\,,
$$

$$
\ln Z(t)\;=\;I\,t\,,\quad \forall\,t\in\mathbb{R}^m\,,
$$

где $I=(I_1,\ldots,I_m)$, а γ_k, α_θ, $\eta_{\mathfrak{k}}$, $\tau_{\mathfrak{k}}$, φ_θ, ψ_θ, β_ν, I_j и a — постоянные. Полученные условия означают, что первый интеграл (14) системы $(CD\mathcal{A})$ имеет вид (10). ■

Задача о модификации последнего множителя

$$\mu\colon (t,x) \to F\Biggl(w_1(x)\,,\ \ldots\,,\ w_{s+r}(x)\,,\ \ K_{1h_1 1}(x)\,,\ \ldots\,,\ K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(x)\,,$$

$$\mathrm{Re}^2\mathfrak{w}_1(x) + \mathrm{Im}^2\mathfrak{w}_1(x)\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x) + \mathrm{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)\,,$$

$$\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}_1(x)}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}_1(x)}\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}\,,\ \ \mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x)\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x)\,, \tag{20}$$

$$\mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x)\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x)\,,\ \ v_1(x)\,,\ \ldots\,,\ v_q(x)\Biggr)\,Z(t)\,,\ \ \forall\,(t,x)\in G\,,$$

системы $(CD\mathcal{A})$ такого, что система $(CD\mathcal{A})$ не имеет первых интегралов вида (14) и последнего множителя вида (20), построенных на основании меньшего числа функций $w_k\,,\ k=\overline{1,s+r}\,,\ K_{1h_1 1}\,,\ \ldots\,,\ K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}\,,$ $\mathrm{Re}^2\mathfrak{w}_\mathfrak{k} + \mathrm{Im}^2\mathfrak{w}_\mathfrak{k}\,,\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}\,,\ \mathfrak{k} = \overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,\ \mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}\,,$ $\mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}\,,\ v_\nu\,,\ \nu=\overline{1,q}\,,$ решается подобным образом. При этом соответствующие (16) тождества отличаются лишь тем, что в правой части будет $-\mathrm{div}\,\mathfrak{p}_j(x)$. И справедлива

Теорема 4. *Если система* $(CD\mathcal{A})$ *имеет последний множитель* (20), *где* F *и* Z — *некоторые голоморфные функции, построенный на основании автономных полиномиальных частных интегралов* (6) *и* (7) *с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов* (8), *то его можно представить в виде* (12).

Теоремы 3 и 4 позволяют отнести системы (CD) класса $\mathcal{A}$ к дифференциальным системам типа Дарбу.

Построение первых интегралов и последних множителей системы $(CD\mathcal{A})$. Основываясь непосредственно на определениях 1, 3, 4 и 5, доказываем утверждения следующей теоремы, когда на основании автономных полиномиальных частных интегралов (вещественных и комплекснозначных), их кратностей и автономных условных частных интегралов непосредственно строятся первые интегралы системы $(CD\mathcal{A})$.

Теорема 5. *Пусть у системы* $(CD\mathcal{A})$:

1) *для полиномиального частного интеграла* $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_j w(x) \ = \ w(x)\,W_j(x)\,,\quad \forall\,x\in\mathbb{R}^n\,,\quad j=\overline{1,m}\,,$$

полиномы W_j, $j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными;*

2) *для полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_j\mathfrak{w}(x) \;=\; \mathfrak{w}(x)\,\mathfrak{W}_j(x)\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \quad j=\overline{1,m}\,, \tag{21}$$

полиномы $\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j$, $j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными;*

3) *для полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *в тождествах* (21) *полиномы* $\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j$, $j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными;*

4) *для полиномиального частного интеграла* $w\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *с кратностью* $\varkappa$ *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_jK_{h_\xi g_\xi}(x) \;=\; R_{h_\xi g_\xi j}(x)\,, \quad \forall\, x\in V\,, \quad V\subset\mathbb{R}^n\,,$$

$$j=\overline{1,m}\,, \quad \xi=\overline{1,\varepsilon}\,, \quad h_\xi\in\mathbb{N}\,, \quad g_\xi=\overline{1,f_\xi}\,,$$

при фиксированных h_ξ *и* g_ξ *полиномы* $R_{h_\xi g_\xi j}$, $j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными;*

5) *для полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *с кратностью* $\mathfrak{z}$ *в тождествах*

$$\begin{gathered}\mathfrak{p}_j\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta}(x) \;=\; \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta j}(x)\,, \quad \forall\, x\in V\,, \quad V\subset\mathbb{R}^n\,,\\ j=\overline{1,m}\,, \quad \zeta=\overline{1,\mathfrak{e}}\,, \quad \mathfrak{h}_\zeta\in\mathbb{N}\,, \quad \mathfrak{g}_\zeta=\overline{1,\mathfrak{f}_\zeta}\,,\end{gathered} \tag{22}$$

при фиксированных $\mathfrak{h}_\zeta$ *и* $\mathfrak{g}_\zeta$ *полиномы* $\operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta j}$, $j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными;*

6) *для полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *с кратностью* $\mathfrak{z}$ *в тождествах* (22) *при фиксированных* $\mathfrak{h}_\zeta$ *и* $\mathfrak{g}_\zeta$ *полиномы* $\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta j}$, $j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными;*

7) *для условного частного интеграла* $\omega\colon x\to\exp v(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$, *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_jv(x) \;=\; S_j(x)\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \quad j=\overline{1,m}\,,$$

полиномы S_j, $j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными.*

Тогда существует постоянный вектор $I=(I_1,\ldots,I_m)$, $I_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,m}$, *такой, что семейство:*

1) $w(x)\,\exp It \;=\; C\,;$

2) $[\,\mathrm{Re}^2\mathfrak{w}(x) \;+\; \mathrm{Im}^2\mathfrak{w}(x)]\,\exp It \;=\; C\,;$

3) $\operatorname{arctg}\dfrac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}(x)}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}(x)} \;+\; It \;=\; C\,;$

4) $K_{h_\xi g_\xi}(x) \;+\; It \;=\; C\,;$

5) $\mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta}(x) \;+\; It \;=\; C\,;$

6) $\mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta}(x) \;+\; It \;=\; C\,;$

7) $v(x) \;+\; It \;=\; C$

будет первым интегралом системы $(CD\mathcal{A})$ *соответственно.*

Система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_1 \;=\; x_1(dt_1 \;+\; 3\,dt_2)\,, \quad dx_2 \;=\; (1+x_1+2x_2)\,dt_1 \;+\; (x_1+3x_2)\,dt_2 \tag{23}$$

имеет автономный полиномиальный частный интеграл

$$w\colon x \to\; x_1\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^2\,,$$

такой, что

$$dx_1\big|_{(23)} \;=\; x_1(dt_1+3\,dt_2)\,, \quad \forall\,(t,x)\in\mathbb{R}^4\,.$$

Поэтому в соответствии с утверждением 1) теоремы 5 система (23) имеет на пространстве $\mathbb{R}^4$ первый интеграл

$$x_1\,\exp\left[-\,(t_1+3\,t_2)\right] \;=\; C\,. \tag{24}$$

Заметим, что у системы (23) нет решений. Действительно, выражая из (24) x_1 через t_1 и t_2 и подставляя в (23), убеждаемся, что первое уравнение системы (23) обращается в тождество на $\mathbb{R}^2$, а второе уравнение этой системы примет вид

$$dx_2 \;=\; [1+2x_2+C\,\exp(t_1+3t_2)]\;dt_1 \;+\; [3x_2+C\,\exp(t_1+3t_2)]\;dt_2$$

Это уравнение не имеет решений ни при каком C из поля $\mathbb{R}$, ибо на $\mathbb{R}^3$

$$\{\partial_{t_1}[3x_2+C\,\exp(t_1+3t_2)] \;+\; 3\,[1+2x_2+C\,\exp(t_1+3t_2)]\} \;-$$

$$-\;\{\partial_{t_2}[1+2x_2+C\,\exp(t_1+3t_2)] \;+\; 2\,[3x_2+C\,\exp(t_1+3t_2)]\} \;\not\equiv\; 0.$$

Стало быть, система (23) не является вполне разрешимой, а тогда в соответствии с теоремой 6 из [7], если она имеет первые интегралы, то их не более одного (с точностью до функциональной независимости). Поэтому семейство (24) составляет базис первых интегралов на пространстве $\mathbb{R}^4$ системы (23).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 - x_2^3)\, dt_1 \ + \ x_1(2 + x_2^2)\, dt_2\,, \\ dx_2 &= x_2(1 + x_1x_2)\, dt_1 \ + \ x_2(2 - x_1^2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{25}$$

имеет автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл

$$\mathfrak{w}\colon x \to \ x_1 \ + \ ix_2\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,, \tag{26}$$

такой, что полный дифференциал в силу системы (25)

$$d(x_1 + ix_2)\big|_{(25)} \ = \ (x_1 + ix_2)\left[(1 + ix_2^2\,)\, dt_1 \ + \ (2 - ix_1x_2)\, dt_2\right]\,, \quad \forall\,(t, x) \in \mathbb{R}^4\,.$$

Поэтому в соответствии с утверждением 2) теоремы 5 система (25) имеет на пространстве $\mathbb{R}^4$ первый интеграл

$$(x_1^2 + x_2^2\,)\ \exp\left[-\,2(t_1 + 2t_2)\right] \ = \ C\,.$$

Если учесть, что коммутатор

$$[\,\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] \ = \ x_2(2x_1 + 4x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3)(x_2\,\partial_1 - x_1\,\partial_2)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

и, следовательно, для системы (25) не выполняются условия Фробениуса, то в соответствии с теоремой 6 из [7] построенный первый интеграл образует базис первых интегралов на пространстве $\mathbb{R}^4$ системы (25).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2(x_1 - 1)\, dt_1 \ + \ x_2(x_1 - 2)\, dt_2\,, \\ dx_2 &= (x_1 + x_2^2)\, dt_1 \ + \ (2x_1 + x_2^2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{27}$$

имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (26) с $\mathfrak{W}_1(x) = x_2 + i$ и $\mathfrak{W}_2(x) = x_2 + 2i$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$. В соответствии с утверждением 3) теоремы 5 семейство

$$t_1 \ + \ 2t_2 \ - \ \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} \ = \ C$$

является первым интегралом системы (27) на области $\mathbb{R}^4 \setminus \{(t, x)\colon x_1 = 0\}$.

Если учесть, что для системы (27) не выполняются условия Фробениуса (коммутатор

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] \ = \ -\ x_1^2\,\partial_1 \ - \ x_1x_2\,\partial_2\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

и не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$), то построенный первый интеграл составляет базис первых интегралов на области $\mathbb{R}^4 \setminus \{(t,x)\colon x_1 = 0\}$ системы (27) (по теореме 6 из [7]).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 - x_2 + x_1^2)\, dt_1 \ + \ (x_1 - 2x_2 + 2x_1^2)\, dt_2\,, \\ dx_2 &= x_2(1 + x_1)\, dt_1 \ + \ x_2(1 + 2x_1)\, dt_2 \end{aligned} \tag{28}$$

имеет автономный полиномиальный частный интеграл

$$w\colon x \to \ x_2\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

кратности $\varkappa = 2$ такой, что

$$dx_2\Big|_{(28)} = \ x_2\ [(1 + x_1)\, dt_1 \ + \ (1 + 2x_1)\, dt_2]\ , \quad \forall\, (t,x) \in \mathbb{R}^4\,,$$

$$d\,\frac{x_1}{x_2}\bigg|_{(28)} = \ -\ (dt_1 + 2dt_2)\,, \quad \forall\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \Omega\,,$$

где $\Omega = \{(x_1, x_2)\colon x_2 \neq 0\}$. Поэтому в соответствии с утверждением 4) теоремы 5 система (28) имеет первый интеграл

$$\frac{x_1}{x_2} \ + \ t_1 \ + \ 2t_2 \ = \ C\,,$$

который составляет её базис первых интегралов на области $\mathbb{R}^2 \times \Omega$ (по теореме 6 из [7] ввиду того, что коммутатор

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = x_1(4 - 3x_2)\partial_1 + x_1x_2\partial_2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2,$$

не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= \ x_2(2x_1 + x_1^2 - x_2^2\,)\, dt_1 \ + \ x_1(4x_2 + x_1^2 - x_2^2\,)\, dt_2\,, \\ dx_2 &= \ (-\,x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2^2\,)\, dt_1 \ + \ 2(-\,x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{29}$$

имеет автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (26) с $\mathfrak{W}_1(x) = x_2(1 + x_1) - i\,(x_1 - x_2^2\,)$ и $\mathfrak{W}_2(x) = 2x_2 + x_1^2 - i\,x_1(2 - - x_2)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$, кратности $\mathfrak{z} = 2$ такой, что

$$d\,\frac{x_1 - i(1 - x_2)}{x_1 + ix_2}\bigg|_{(29)} = \ (1 + ix_2)\, dt_1 \ + \ (2 + ix_1)\, dt_2\,, \ \ \forall\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \Omega\,,$$

где $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Поэтому в соответствии с утверждением 5) теоремы 5 система (29) имеет первый интеграл

$$\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \ + \ t_1 \ + \ 2t_2 \ = \ C\,,$$

который образует её базис первых интегралов на области $\mathbb{R}^2 \times \Omega$ (по теореме 6 из [7] ввиду того, что коммутатор

$$[\,\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = (2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 + 2x_2^4 - 3x_1^4x_2 - 2x_1^2x_2^3 + x_2^5 +$$

$$+ 2x_1^4x_2^3 - 2x_1^2x_2^5)\partial_1 + 2x_1x_2(4x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2 - 3x_1^2x_2 + x_2^3)\partial_2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 \ &= \ x_2(-x_1^2 + x_2^2\,)\,dt_1 \ + \ x_1(2x_2 + x_1^2 - x_2^2\,)\,dt_2\,, \\ dx_2 \ &= \ -\,2x_1x_2^2\,dt_1 \ + \ (-\,x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2x_2)\,dt_2 \end{aligned} \tag{30}$$

имеет автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (26) с $\mathfrak{W}_1(x) = -\,x_2(x_1 + ix_2)$ и $\mathfrak{W}_2(x) = x_2 + x_1^2 - i\,x_1(1 - x_2)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, кратности $\mathfrak{z} = 2$ такой, что

$$d\,\frac{1 + x_1 + ix_2}{x_1 + ix_2}\bigg|_{(30)} \ = \ x_2\,dt_1 \ + \ (-\,x_1 + i)\,dt_2\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \times \Omega\,,$$

где $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Поэтому в соответствии с утверждением 6) теоремы 5 система (30) имеет первый интеграл

$$\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \ + \ t_2 \ = \ C\,,$$

который образует её базис первых интегралов на области $\mathbb{R}^2 \times \Omega$ (по теореме 6 из [7] ввиду того, что коммутатор

$$[\,\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] \ = \ (-\,x_1^4 \ + \ 2x_1^2x_2^2 \ + \ x_1^4x_2 \ - \ x_2^5\,)\,\partial_1 \ +$$

$$+ \ 2x_1x_2(2x_2 \ - \ x_1^2 \ + \ x_2^2 \ + \ 3x_1^2x_2 \ - \ 2x_2^3\,)\,\partial_2\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 \ &= \ (1 + x_1 + x_2^2)\,dt_1 \ + \ (2 + x_2 + x_1x_2 + x_2^2\,)\,dt_2\,, \\ dx_2 \ &= \ (x_1 + x_2^2)\,dt_1 \ + \ x_2(1 + x_1 + x_2)\,dt_2 \end{aligned} \tag{31}$$

имеет автономный условный частный интеграл

$$\omega\colon x \to \exp(x_1 - x_2)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

такой, что

$$d(x_1 - x_2)\big|_{(31)} \;=\; dt_1 \;-\; 2\,dt_2\,, \quad \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^4\,.$$

Поэтому в соответствии с утверждением 7) теоремы 5 система (31) имеет первый интеграл на пространстве $\mathbb{R}^4$

$$x_1 \;-\; x_2 \;-\; t_1 \;+\; 2t_2 \;=\; C\,,$$

который образует её базис первых интегралов на пространстве $\mathbb{R}^4$ (по теореме 6 из [7] ввиду того, что коммутатор

$$[\,\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] \;=\; (-\,2 \;+\; 2x_1 \;-\; x_2 \;+\; 2x_1^2 \;+\; x_1x_2 \;-\; 2x_2^2\,)\,\partial_1 \;+$$

$$+\;\;(-\,2 \;+\; x_1 \;+\; x_1^2 \;+\; 2x_1x_2 \;-\; 2x_2^2 \;-\; x_1x_2^2 \;+\; x_2^3\,)\,\partial_2\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

При наличии некоторого числа автономных полиномиальных частных интегралов (6) и (7) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов (8) на их основании можно построить первый интеграл и последний множитель системы $(CD\mathcal{A})$. Это число прежде всего зависит от чисел n, m, p_j, $j = \overline{1,m}$, по которым строим число

$$\mathfrak{c} \;=\; \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{c}_j\,, \quad \mathfrak{c}_j \;=\; \binom{n}{n + p_j - 1}, \quad j = \overline{1,m}\,.$$

Теорема 6. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - m$ *имеет либо первый интеграл* (10) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$, *либо последний множитель* (12).

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 семейство (10) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(CD\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (11). А в соответствии с теоремой 2 функция (12) будет последним множителем системы $(CD\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (13).

Система тождеств (13) при $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - m$ распадается на систему, которая состоит из $\mathfrak{c}$ линейных, вообще говоря, неоднородных, уравнений с $\mathfrak{c}$ неизвестными γ_k, $\eta_{\mathfrak{k}}$, $\tau_{\mathfrak{k}}$, $\alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}$, $\varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, β_ν, I_j; а система тождеств (11) при $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - m$ распадается на однородную систему $\mathfrak{c}$ линейных уравнений с теми же $\mathfrak{c}$ неизвестными. Определители этих систем совпадают. Обозначим его Δ.

Пусть определитель $\Delta \neq 0$. Тогда система, соответствующая тождеству (13), имеет единственное решение, и функция (12), составленная на его основании, является последним множителем системы $(CD\mathcal{A})$.

Пусть теперь определитель $\Delta = 0$. Тогда система, соответствующая тождеству (11), имеет нетривиальное решение; и семейство (10), составленное на его основании, будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(CD\mathcal{A})$. ■

В процессе доказательства теоремы 6, по сути дела, были доказаны следующие два утверждения.

Следствие 1. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - m$, *когда определитель* $\Delta = 0$, *имеет первый интеграл* (10) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$.

Следствие 2. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - m$, *когда определитель* $\Delta \neq 0$, *имеет последний множитель* (12).

На случай автономного первого интеграла и автономного последнего множителя системы $(CD\mathcal{A})$ аналогично теореме 6 доказываем следующую теорему.

Теорема 7. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ *имеет либо автономный первый интеграл*

$$X(x)\,\exp Y(x) \;=\; C \tag{32}$$

на области Ω, *либо автономный последний множитель*

$$\mu\colon x \to \; X(x)\,\exp Y(x)\,, \quad \forall\, x \in \Omega\,, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{33}$$

Если через Λ обозначить определитель Δ на случай автономного первого интеграла (32) и автономного последнего множителя (33), то аналогами следствий 1 и 2 будут следующие утверждения.

Следствие 3. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, *когда определитель* $\Lambda = 0$, *имеет автономный первый интеграл* (32) *на области* Ω.

Следствие 4. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, *когда определитель* $\Lambda \neq 0$, *имеет автономный последний множитель* (33).

На основании теорем 6 и 7 с учётом свойства Якоби последних множителей (предложение 1) получаем и такие закономерности.

Следствие 5. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - m + 1$ *имеет первый интеграл* (10) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$, *который при* $\Lambda = 0$ *будет автономным* (32) *на области* Ω.

Следствие 6. *Система* $(CD\mathcal{A})$ *при* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} + 1$ *имеет автономный первый интеграл* (32) *на области* Ω.

Построение первых интегралов последних множителей системы $(ICD\mathcal{A})$. Если система $(CD\mathcal{A})$ является вполне разрешимой, то условия, достаточные для построения первого интеграла и последнего множителя, в подавляющем числе случаев могут быть ослаблены.

Система (CD) индуцирует m автономных дифференциальных систем n-го порядка

$$dx = P^j(x)\, dt_j\,, \qquad (Dj)$$

где вектор-полином $P^j(x) = (P_{1j}(x), \ldots, P_{nj}(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, есть j-ый столбец $(n \times m)$-матрицы P, $j = \overline{1, m}$.

Вполне очевидны, если основываться на соответствующих определениях, такие закономерности относительно интегральных связей системы (CD) и систем (Dj), $j = \overline{1, m}$.

Предложение 7. *Если система* (CD) *имеет:*

а) автономный первый интеграл $F(x) = C$ *на области* Ω *из пространства* $\mathbb{R}^n$;

б) автономный полиномиальный частный интеграл $w\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *с кратностью* $\varkappa$;

в) автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *с кратностью* $\mathfrak{z}$;

г) автномный условный частный интеграл ω,
то и каждая автономная обыкновенная дифференциальная система (Dj), $j = \overline{1, m}$, *имеет:*

а) автономный первый интеграл $F(x) = C$ *на области* Ω;

б) автономный полиномиальный частный интеграл $w\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *с кратностью* $\varkappa$;

в) автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *с кратностью* $\mathfrak{z}$;

г) автономный условный частный интеграл ω.

Для системы (ICD) имеют место следующие возможности построения первого интеграла по её частным интегралам (6) — (8).

Теорема 8. *Пусть у системы* $(ICD\mathcal{A})$ *число* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_k\,,$ $k \in \{1, \ldots, m\}\,,$ *а система* (Dk) *не имеет автономных первых интегралов*

$$\Xi_j(x) \ = \ C_j\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \ \ j \neq k\,, \tag{34}$$

на пространстве $\mathbb{R}^n$. *Тогда семейство* (10) *является первым интегралом на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$ *системы* $(ICD\mathcal{A})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_k\,,$ то на основании следствия 5 при $m = 1$ устанавливаем, что семейство

$$X(x)\,\exp\left[I_k t_k \ + \ Y(x)\right] \ = \ C \tag{35}$$

является первым интегралом системы (Dk) на области $\mathbb{R} \times \Omega$ и

$$\mathfrak{P}_k(t_k, x)\ \{X(x)\,\exp\left[I_k t_k \ + \ Y(x)\right]\} \ = \ 0\,, \quad \forall\,(t_k, x) \in \mathbb{R} \times \Omega\,. \tag{36}$$

Действия

$$\begin{gathered}\mathfrak{P}_j(t_j, x)\,\{X(x)\,\exp\left[I_k t_k \ + \ Y(x)\right]\} \ = \ X(x)\,\exp\left[I_k t_k \ + \ Y(x)\right]\,\Xi_j(x)\,,\\ \forall\,(t, x) \in \mathbb{R}^m \times \Omega\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \quad j \neq k\,.\end{gathered} \tag{37}$$

Основываясь на полной разрешимости системы $(ICD\mathcal{A})$, непосредственным вычислением действий оператора $\mathfrak{P}_k\,,$ $k \neq j\,,$ на обе части каждого из тождеств (37) с учётом условий Фробениуса и тождества (36), получаем, что

$$\mathfrak{p}_k\,\Xi_j(x) \ = \ 0\,, \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n\,, \ \ j = \overline{1,m}\,, \ \ j \neq k\,. \tag{38}$$

Однако, система (Dk) не имеет первых интегралов (34), поэтому из тождеств (38) следует, что

$$\Xi_j(x) \ = \ -\,I_j\,, \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n\,, \ \ j = \overline{1,m}\,, \ \ j \neq k\,. \tag{39}$$

Стало быть, при (39) имеет место система тождеств

$$\mathfrak{P}_j(t_j, x)\ \{X(x)\,\exp\left[It \ + \ Y(x)\right]\} \ = \ 0\,, \quad \forall\,(t, x) \in \mathbb{R}^m \times \Omega\,, \ \ j = \overline{1,m}\,,$$

которая означает, что семейство (10) является первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(ICD\mathcal{A})$. ■

Теорема 9. *Пусть у системы* $(ICD\mathcal{A})$ *число* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_k - 1$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, *а система* (Dk) *не имеет на пространстве* $\mathbb{R}^n$ *автономных первых интегралов* (34) *и*

$$\Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x) = \widetilde{C}_j, \quad j = \overline{1,m}, \quad j \neq k, \tag{40}$$

где $\widetilde{C}_j$ *— произвольные вещественные постоянные. Тогда система* $(ICD\mathcal{A})$ *имеет либо первый интеграл* (10) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$, *либо последний множитель* (12).

Доказательство. Предварительно заметим, что на арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет место импликация

$$[\mathfrak{p}_j(x), \mathfrak{p}_k(x)] = 0 \;\Rightarrow\; \mathfrak{p}_j(x) \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x) = \mathfrak{p}_k(x) \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x), \tag{41}$$

которая непосредственно следует из того, что

$$\operatorname{div} \big[\mathfrak{p}_j(x) P^k(x)\big] = \mathfrak{p}_j(x) \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\xi=1}^{n} \partial_{x_\xi} P_{ik}(x)\, \partial_{x_i} P_{\xi j}(x),$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Пусть автономная обыкновенная дифференциальная система (Dk) такова, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - 1$. В силу предложения 6 при $m = 1$ задача по построению первого интеграла (35) и последнего множителя

$$\mu\colon (t_k, x) \to X(x) \exp[I_k t_k + Y(x)], \quad \forall\, (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \tag{42}$$

системы (Dk) сводится к разрешению систем линейных уравнений, построенных на основании тождеств (36) и

$$\begin{gathered} \mathfrak{P}_k(t_k, x)\, \{X(x) \exp[I_k t_k + Y(x)]\} = \\ = \{X(x) \exp[I_k t_k + Y(x)]\} \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x), \quad \forall\, (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \end{gathered} \tag{43}$$

соответственно. При этом определители этих систем будут одинаковыми порядка $\mathfrak{c}_k$. Обозначим его Δ_k.

Пусть определитель $\Delta_k \neq 0$. Тогда в соответствии со следствием 2 при $m = 1$ система (Dk) имеет последний множитель (42), а значит, выполняется система тождеств (43). Предположим, что система (Dk) не имеет первых интегралов (40). Основываясь на полной разрешимости системы $(ICD\mathcal{A})$, непосредственным вычислением действий оператора

$\mathfrak{P}_k$, $k \neq j$, на обе части каждого из тождеств (37) с учётом условий Фробениуса, условия (43) и импликации (41) получаем, что

$$\mathfrak{p}_k \left[\Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x)\right] = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ \ j = \overline{1,m}, \ \ j \neq k.$$

Отсюда следуют тождества

$$\Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x) = -\, I_j, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ \ j = \overline{1,m}, \ \ j \neq k, \ \ I_j = \text{const},$$

ибо система (Dk) не имеет первых интегралов (40). Поэтому выполняется система тождеств

$$\mathfrak{P}_j(t,x) \left\{X(x) \exp\left[I_k t_k + Y(x)\right]\right\} =$$

$$= -\left[I_j + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x)\right] X(x) \exp\left[I_k t_k + Y(x)\right],$$
$$\forall\, (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \Omega, \quad j = \overline{1,m}, \quad j \neq k.$$

Значит, функция (12) является последним множителем системы $(ICD\mathcal{A})$.

При $\Delta_k = 0$ подобным образом доказываем, что семейство (10) является первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(ICD\mathcal{A})$. ■

Следствие 7. *Если выполняются условия теоремы* 9 *и определитель* $\Delta_k \neq 0$, *то функция* (12) *является последним множителем системы* $(ICD\mathcal{A})$.

Следствие 8. *Если выполняются условия теоремы* 9 *и определитель* $\Delta_k = 0$, *то семейство* (10) *является первым интегралом на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$ *системы* $(ICD\mathcal{A})$.

Вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= 2x_1x_2\, dt_1 + (-x_1^2 + x_2^2)\, dt_2, \\ dx_2 &= (-x_1^2 + x_2^2)\, dt_1 - 2x_1x_2\, dt_2 \end{aligned} \qquad (44)$$

имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1 \colon x \to x_1 + ix_2 \quad \text{и} \quad \mathfrak{w}_2 \colon x \to x_1 - ix_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2,$$

с $\mathfrak{W}_{11}(x) = x_2 - ix_1$, $\mathfrak{W}_{12}(x) = -\, x_1 - ix_2$
mboxи $\mathfrak{W}_{21}(x) = x_2 +$
$+\, ix_1$, $\mathfrak{W}_{22}(x) = -\, x_1 + ix_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$. Число $\mathfrak{a} = 2$.

Для обыкновенной дифференциальной системы $(D1)$

$$\frac{dx_1}{dt_1} = 2x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = -\, x_1^2 + x_2^2$$

число $\mathfrak{c}_1 = \binom{2}{2+2-1} = 3$, а значит, $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_1 - 1$. Эта обыкновенная дифференциальная система не имеет первым интегралом семейство (40)

$$-2\eta_1 x_1 + \alpha_1 x_2 - 4x_1 = \widetilde{C},$$

определитель $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$. В соответствии со следствием 7 рациональная функция

$$\mu\colon x \to (x_1^2 + x_2^2)^{-2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\},$$

является последним множителем системы (44).

Интегральные точки. **Определение 6.** *Для системы* $(CD\mathcal{A})$ *точку* $A_\lambda(x^\lambda)$ *фазового пространства* $\mathbb{C}^n$ *назовём* интегральной точкой *веса* ρ_λ *по базе* $\theta_\lambda = \{\theta_{\lambda 1}, \ldots, \theta_{\lambda\rho_\lambda}\}$, *если при* $1 \leqslant \rho_\lambda \leqslant m$ *выполняются условия*

$$\begin{gathered} W_{k\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \quad k = \overline{1, s+r}, \quad j = \overline{1,\rho_\lambda}, \\ R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \ \ l = \overline{1,s}, \ \ \xi_l = \overline{1,\varepsilon_l}, \ \ h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \ \ g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}, \ \ j = \overline{1,\rho_\lambda}, \\ \operatorname{Re}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \quad \mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s}+\mathfrak{r}}, \quad j = \overline{1,\rho_\lambda}, \\ \operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \quad \mathfrak{l} = \overline{1,\mathfrak{s}}, \\ \zeta_\mathfrak{l} = \overline{1,\mathfrak{e}_\mathfrak{l}}, \quad \mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}}, \quad j = \overline{1,\rho_\lambda}, \\ S_{\nu\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \quad \nu = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,\rho_\lambda}. \end{gathered} \tag{45}$$

Пусть система $(CD\mathcal{A})$ имеет N интегральных точек $A_\lambda(x^\lambda)$ с весами $\rho_\lambda \geqslant 1$ по базам $\theta_\lambda = \{\theta_{\lambda 1}, \ldots, \theta_{\lambda\rho_\lambda}\}$, $\lambda = \overline{1,N}$, соответственно. Поставим в соответствие каждой интегральной точке $A_\lambda(x^\lambda)$ столбцы $P^{\theta_\lambda}(x) = (P_{1\theta_\lambda}, \ldots, P_{n\theta_\lambda}(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, матрицы P. Обозначим через U множество индексов тех столбцов матрицы P, каждому из которых соответствует хотя бы одна интегральная точка $A_\lambda(x^\lambda)$ с весом $\rho_\lambda \geqslant 1$; через $\mathfrak{u}$ — количество элементов множества U; через $I_{(U)} = (I_1, \ldots, I_m)$, где $I_j \in \mathbb{C}$, причём, если $j \in U$, то $I_j = 0$. Для каждого столбца P^j, $j \in U$, составим матрицу из единиц и координат $x^\lambda = (x_{1\lambda}, \ldots, x_{n\lambda})$ интегральных точек $A_\lambda(x^\lambda)$, соответствующих этому столбцу, следующим образом: каждая строка этой матрицы имеет вид

$$\Bigl(1,\ x_{1\lambda},\ x_{2\lambda},\ \ldots,\ x_{n\lambda},\ x_{1\lambda}^2,\ x_{1\lambda}x_{2\lambda},\ \ldots,\ x_{n\lambda}^2,\ x_{1\lambda}^3,\ \ldots,\ x_{n\lambda}^{p_j-1}\Bigr),$$

состоит из $\mathfrak{c}_j$ элементов, и всего в матрице s_j строк, где s_j — количество точек A_λ, соответствующих столбцу P^j. Обозначим эту матрицу a_j.

Она имеет размер $s_j \times \mathfrak{c}_j$ и ранг $\operatorname{rank} a_j = r_j$. На основании матрицы a_j построим матрицу b_j размера $r_j \times \mathfrak{c}_j$ и ранга $\operatorname{rank} b_j = r_j$. Для интегральных точек A_λ, $\lambda = \overline{1,N}$, введём число

$$\mathfrak{b} \;=\; \sum_{j\in U} r_j\,.$$

Если у системы $(CD\mathcal{A})$ *существуют интегральные точки* $A_\lambda(x^\lambda)$, $\lambda = \overline{1,N}$, *с весами* ρ_λ *и числом* $\mathfrak{b} \geqslant 0$, *то будем говорить, что система* $(CD\mathcal{A})$ *принадлежит классу* $\mathcal{B}$ *и обозначать* $(CD\mathcal{B})$.

Теорема 10. *Система* $(CD\mathcal{B})$ *при* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{u}=\mathfrak{c}-m$ *имеет первый интеграл*

$$X(x)\,\exp\bigl[I_{(U)}t \;+\; Y(x)\bigr] \;=\; C \tag{46}$$

на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$.

Доказательство. Семейство (46) в силу тождеств (9) будет первым интегралом системы $(CD\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда

$$\Xi(x) \;+\; I_{(U)} \;=\; 0\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{47}$$

Обозначим через c_j квадратную матрицу порядка r_j с определителем, отличным от нуля, полученную из $(r_j \times \mathfrak{c}_j)$-матрицы b_j вычёркиванием $\mathfrak{c}_j - r_j$ столбцов, $j \in U$. Через $\overset{*}{W}{}^{k}$, $\overset{*}{R}{}^{l}_{h_{\xi_l}g_{\xi_l}}$, $\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}}$, $\overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\overset{*}{S}{}^{\nu}$ обозначим векторы-полиномы, которые образованы соответственно из векторов-полиномов

$$W^k(x) \;=\; (W_{k1}(x),\ldots,W_{km}(x)),\;\; R^l_{h_{\xi_l}g_{\xi_l}}(x) \;=\; (R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}1}(x),\ldots,R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}m}(x)),$$

$$\mathfrak{W}^{\mathfrak{k}}(x) \;=\; (\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}1}(x),\ldots,\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}m}(x)),\;\; \mathfrak{R}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}(x) \;=\; (\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}1}(x),\ldots,\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}m}(x)),$$

$$S^\nu(x) \;=\; (S_{\nu1}(x),\ldots,S_{\nu m}(x))\,,\;\; k=\overline{1,s+r}\,,\;\; l=\overline{1,s}\,,\;\; \xi_l=\overline{1,\varepsilon_l}\,,\;\; h_{\xi_l}\in\mathbb{N}\,,$$

$$g_{\xi_l}=\overline{1,f_{\xi_l}}\,,\;\; \mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,\;\; \mathfrak{l}=\overline{1,\mathfrak{s}}\,,\;\; \zeta_\mathfrak{l}=\overline{1,\mathfrak{e}_\mathfrak{l}}\,,\;\; \mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\in\mathbb{N}\,,\;\; \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}=\overline{1,\mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}}\,,\;\; \nu=\overline{1,q}\,,$$

следующим образом.

Если $j \notin U$, то j-ая компонента исходного вектора-полинома остаётся без изменения, а если $j \in U$, то j-ая компонента исходного вектора-полинома изменяется так, что коэффициенты при степенях переменных x, соответствующих степеням x^λ в $(r_j \times r_j)$-матрице c_j, берутся равными нулю, а коэффициенты при остальных степенях x остаются без изменения.

Система

$$\overset{*}{\Xi}(x) + I_{(U)} = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{48}$$

где

$$\overset{*}{\Xi}(x) = \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k \overset{*}{W}{}^k(x) + \sum_{l=1}^{s} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}} \overset{*}{R}{}^l_{h_{\xi_l}g_{\xi_l}}(x) +$$

$$+ 2\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{Re}\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}}(x) + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \tau_{\mathfrak{k}} \operatorname{Im}\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}}(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Re}\overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Im}\overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) + \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu \overset{*}{S}{}^\nu(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

распадается на систему, которая при выполнении условия $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m + 1$ состоит из $\mathfrak{c} - \mathfrak{b}$ линейных уравнений с $\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + 1$ неизвестными. Такая система всегда имеет нетривиальное решение

$$\begin{gathered} I_j = \overset{*}{I}_j, \quad \gamma_k = \overset{*}{\gamma}_k, \quad \alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}} = \overset{*}{\alpha}_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}, \quad \eta_{\mathfrak{k}} = \overset{*}{\eta}_{\mathfrak{k}}, \\ \tau_{\mathfrak{k}} = \overset{*}{\tau}_{\mathfrak{k}}, \quad \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} = \overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}, \quad \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} = \overset{*}{\psi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}, \quad \beta_\nu = \overset{*}{\beta}_\nu. \end{gathered} \tag{49}$$

Пусть

$$\overset{**}{\Xi}(x) = \Xi(x) - \overset{*}{\Xi}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

при (49). Тогда, принимая во внимание (45) и (48), получаем, что

$$\overset{**}{\Xi}(x^\lambda) = 0, \quad \lambda = \overline{1, N}. \tag{50}$$

Система (50) является однородной системой $\mathfrak{b}$ линейных уравнений с $\mathfrak{b}$ неизвестными, которые суть коэффициенты при степенях x^λ

в $(r_j \times r_j)$-матрице c_j, $j \in U$. Определитель этой системы равен $\det\left(\operatorname*{diag}\limits_{j\in U} c_j\right)$ и отличен от нуля. Поэтому

$$\overset{**}{\Xi}(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{51}$$

Из (48) и (51) вытекает (47), а значит, семейство (46) при (49) является первым интегралом системы $(CD\mathcal{B})$. ■

На автономный случай аналогичным образом доказывается следующая закономерность.

Теорема 11. *Система* $(CD\mathcal{B})$ *при* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{c}+1$ *имеет автономный первый интеграл* (32) *на области* Ω.

Теорема 12. *Пусть система* $(CD\mathcal{B})$ *такова, что*

$$\operatorname{div} P^j(x^\lambda) = -\, I_j, \quad \lambda = \overline{1, N}, \quad j \in U. \tag{52}$$

Тогда при $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{u} = \mathfrak{c}-m$ *система* $(CD\mathcal{B})$ *имеет либо первый интеграл* (10) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$, *либо последний множитель* (12).

Доказательство. Функция (12) в силу тождества (9) будет последним множителем системы $(CD\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (13). Семейство (46) в силу тождеств (9) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(CD\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (47). Как и ранее введём в рассмотрение $(r_j \times r_j)$-матрицу c_j, векторы-полиномы $\overset{*}{W}{}^k$, $\overset{*}{R}{}^l_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, $\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}}$, $\overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\overset{*}{S}{}^\nu$, а также вектор-полином $\overset{*}{\operatorname{div}}\, P$, который получаем из вектора-полинома

$$\operatorname{div} P(x) = \left(\operatorname{div} P^1(x), \ \ldots, \ \operatorname{div} P^m(x)\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

по аналогичному правилу.

Система тождеств

$$\overset{*}{\Xi}(x) + I_{(U)} = -\, \overset{*}{\operatorname{div}}\, P(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{53}$$

распадается на систему, которая при выполнении условия $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{u} = \mathfrak{c}-m$ состоит из $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ линейных, вообще говоря, неоднородных, уравнений с $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ неизвестными; а система тождеств (48) распадается на однородную систему $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ линейных уравнений с теми же $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ неизвестными. Определители этих систем совпадают; обозначим его $\widetilde{\Delta}$.

Пусть определитель $\widetilde{\Delta} \neq 0$. Тогда система, соответствующая тождествам (53), имеет единственное решение

$$\begin{gathered} I_j = \overset{**}{I}_j, \ \gamma_k = \overset{**}{\gamma}_k, \ \alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}} = \overset{**}{\alpha}_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}, \ \eta_{\mathfrak{k}} = \overset{**}{\eta}_{\mathfrak{k}}, \ \tau_{\mathfrak{k}} = \overset{**}{\tau}_{\mathfrak{k}}, \\ \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}} = \overset{**}{\varphi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}, \ \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}} = \overset{**}{\psi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}, \ \beta_\nu = \overset{**}{\beta}_\nu . \end{gathered} \tag{54}$$

Пусть

$$\widetilde{\Xi}(x) = \Xi(x) - \overset{*}{\Xi}(x) + \operatorname{div} P(x) - \overset{*}{\operatorname{div}} P(x) + I - I_{(U)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

при (54). Принимая во внимание (45), (52) и (53), устанавливаем, что

$$\widetilde{\Xi}(x^\lambda) = 0, \quad \lambda = \overline{1, N}.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 10, получаем тождество

$$\widetilde{\Xi}(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{55}$$

Из (53) и (55) вытекает (54), а значит, функция μ при (54) является последним множителем системы $(CD\mathcal{B})$.

При $\widetilde{\Delta} = 0$ рассматриваем систему тождеств (48), на основании решений которой строим семейство (46). Оно и будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \Omega$ системы $(CD\mathcal{B})$, что доказываем также, как и в случае теоремы 10. ■

В процессе доказательства теоремы 12, по сути дела, были доказаны следующие два утверждения.

Следствие 9. *Пусть система* $(CD\mathcal{B})$ *такова, что выполняются условия* (52). *Тогда при* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m$, *когда определитель* $\widetilde{\Delta} \neq 0$, *система* $(CD\mathcal{B})$ *имеет последний множитель* (12).

Следствие 10. *Пусть система* $(CD\mathcal{B})$ *такова, что выполняются условия* (52). *Тогда при* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m$, *когда определитель* $\widetilde{\Delta} = 0$, *система* $(CD\mathcal{B})$ *имеет первый интеграл* (46) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$.

На случай автономного последнего множителя (33) и автономного первого интеграла (32) системы $(CD\mathcal{B})$ аналогами теоремы 12 и следствий 9 и 10 будут следующие теорема 13 и следствия 11 и 12 из неё. В следствиях 11 и 12 через $\widetilde{\Lambda}$ обозначаем определитель, соответствующий определителю $\widetilde{\Delta}$ на автономный случай.

Теорема 13. *Пусть система* $(CD\mathcal{B})$ *такова, что*

$$\operatorname{div} P^j(x^\lambda) = 0, \quad \lambda = \overline{1, N}, \quad j \in U. \tag{56}$$

Тогда при $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ *система* $(CD\mathcal{B})$ *имеет либо автономный последний множитель* (33), *либо автономный первый интеграл* (32) *на области* Ω.

Следствие 11. *Пусть система* $(CD\mathcal{B})$ *такова, что выполняются условия* (56). *Тогда при* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, *когда определитель* $\widetilde{\Lambda} \neq 0$, *система* $(CD\mathcal{B})$ *имеет автономный последний множитель* (33).

Следствие 12. *Пусть система* $(CD\mathcal{B})$ *такова, что выполняются условия* (56). *Тогда при* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, *когда определитель* $\widetilde{\Lambda} = 0$, *система* $(CD\mathcal{B})$ *имеет автономный первый интеграл* (32) *на области* Ω.

Адаптируя определение 6 на случай обыкновенных дифференциальных систем (полагая $m = 1$) и используя методы докательства теорем 8 и 9, а также теорем 10, 11 и 12, с учётом теоремы 2, получаем следующие утверждения для вполне разрешимых систем (CD) класса $\mathcal{B}$.

Теорема 14. *Пусть система* $(ICD\mathcal{B})$ *такова, что обыкновенная дифференциальная система* (Dk) *принадлежит классу* $\mathcal{B}$ *и не имеет на области* Ω *первых интегралов* (34). *Тогда система* $(ICD\mathcal{B})$ *при* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + 1$ *имеет первый интеграл* (46) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$.

Теорема 15. *Пусть система* $(ICD\mathcal{B})$ *такова, что существует* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *такое, что обыкновенная дифференциальная система* (Dk) *принадлежит классу* $\mathcal{B}$, *не имеет на области* Ω *первых интегралов* (34) *и* (40), *расходимость* $\operatorname{div} P^k(x^\lambda) = -I_k$, $\lambda = \overline{1, N}$, $I_k \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ *система* $(ICD\mathcal{B})$ *имеет либо последний множитель* (12), *либо первый интеграл* (46) *на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$.

Следствие 13. *Пусть система* $(ICD\mathcal{B})$ *такова, что существует* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *такое, что система* (Dk) *принадлежит классу* $\mathcal{B}$, *не имеет на области* Ω *первых интегралов* (34), *определитель* $\widetilde{\Delta}_k = 0$. *Тогда при* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ *семейство* (46) *является первым интегралом на области* $\mathbb{R}^m \times \Omega$ *системы* $(ICD\mathcal{B})$.

Следствие 14. *Пусть система* $(ICD\mathcal{B})$ *такова, что существует* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *такое, что система* (Dk) *принадлежит классу* $\mathcal{B}$, *не имеет на пространстве* $\mathbb{R}^n$ *первых интегралов* (40), *определитель* $\widetilde{\Delta}_k \neq 0$, *расходимость* $\operatorname{div} P^k(x^\lambda) = -I_k$, $\lambda = \overline{1, N}$, $I_k \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ *система* $(ICD\mathcal{B})$ *имеет последний множитель* (12).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,dt_1 - 2x_1x_2\,dt_2\,,\\ dx_2 &= -2x_1x_2\,dt_1 + (x_1^2-x_2^2+x_3^2)\,dt_2\,,\\ dx_3 &= -2x_3(x_1\,dt_1 + x_2\,dt_2) \end{aligned} \tag{57}$$

явлется вполне разрешимой и в соответствии с теоремой 2 из [6] имеет один автономный первый интеграл, ибо $n - \operatorname{rank} P(x) = 3-2 = 1$. Полиномы $w_1\colon x \to x_3$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, и $w_2\colon x \to x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, являются автономными полиномиальными частными интегралами системы (57), которым в тождествах (9) соответствуют полиномы $W_{11}(x) = -2x_1$, $W_{12}(x) = -2x_2$ и $W_{21}(x) = -2x_1$, $W_{22}(x) = -2x_2$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Числа $\mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{c} = 8$. У системы (57) выделим следующие интегральные точки (они регулярные): $A_1(0,1,0)$ и $A_2(0,2,0)$ с весами $\rho_1=\rho_2=1$ по общей базе $\theta_1=\theta_2=\{1\}$; $A_3(1,0,0)$ и $A_4(2,0,0)$ с весами $\rho_3=\rho_4=1$ по общей базе $\theta_3=\theta_4=\{2\}$; $A_5(0,0,1)$ с весом $\rho_5=2$ по базе $\theta_5=\{1;2\}$, для которых $U=\{1;2\}$, $\mathfrak{u}=2$. Матрицы $a_1=b_1$ и $a_2=b_2$ имеют размер 3×4 и ранг, равный 3. Поэтому для интегральных точек $A_1, \ldots, A_5$ число $\mathfrak{b}=6$. Если учесть, что $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 2+6 = 8 = \mathfrak{c}$, а определитель $\widetilde{\Lambda} = 0$, то в силу следствия 10 система (57) имеет автономный первый интеграл

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_3} = C$$

на области $\mathbb{R}^3 \setminus \{x\colon x_3 = 0\}$.

Вполне разрешимая автономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= [\,1+(x_1-x_2)(1+3x_1-x_2)]\,dt_1 + [\,1+(x_1-x_2)(1+2x_1)]\,dt_2\,,\\ dx_2 &= [\,1+(x_1-x_2)(1+2x_1)]\,dt_1 + [\,1+(x_1-x_2)(1+x_1+x_2)]\,dt_2 \end{aligned} \tag{58}$$

имеет автономный полиномиальный частный интеграл $w_1\colon x \to x_1 - x_2$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, кратности $\varkappa = 2$, у которого в тождествах (9) полиномы $W_{11}(x) = W_{12}(x) = x_1 - x_2$, $Q_{11}(x) = 1$, $R_{111}(x) = R_{112}(x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. В соответствии с утверждением 2 теоремы 5 семейство

$$\frac{1}{x_1-x_2} + t_1 + t_2 = C$$

является первым интегралом системы (58) на $\mathbb{R}^4 \setminus \{(t,x)\colon x_2 = x_1\}$.

Теперь автономный полиномиальный частный интеграл $w_1\colon x_1 - x_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, системы (58) будем рассматривать без учёта его кратности. Для него число $\mathfrak{a} = 1$ и существуют две интегральные точки (они сингулярные) $A_1(1,1)$ и $A_2(2,2)$ такие, что для системы $(D1)$ их веса $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Число $\mathfrak{c}_1 = 3$. Матрицы $a_1 = b_1$ имеют размер 2×3 и ранг, равный 2. Значит, для интегральных точек A_1 и A_2 число $\mathfrak{b} = 2$. Кроме того, расходимость $\operatorname{div} P^1(1,1) = \operatorname{div} P^1(2,2) = 0$, а определитель $\widetilde{\Delta}_1 \neq 0$. Следовательно, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 1 + 2 = 3 = \mathfrak{c}_1$. Система $(D1)$ не имеет первого интеграла $x_1 - x_2 = C$ вида (40). Всё это в соответствии со следствием 14 означает, что система (58) имеет последний множитель

$$\mu\colon x \to \frac{1}{x_1 - x_2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{x\colon\ x_1 = x_2\}.$$

Вполне разрешимая система [11, с. 49]

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2 + x_2^2)\, dt_1 - 2x_1x_2\, dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1x_2\, dt_1 + (x_1^2 - x_2^2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{59}$$

имеет автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1\colon x \to x_1 + {}$ ${} + ix_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, и $\mathfrak{w}_2\colon x \to x_1 - ix_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, которым в тождествах (9) соответствуют полиномы $\mathfrak{W}_{11}(x) = -x_1 - ix_2$, $\mathfrak{W}_{12}(x) = -x_2 + ix_1$ и $\mathfrak{W}_{21}(x) = -x_1 + ix_2$, $\mathfrak{W}_{22}(x) = -x_2 - ix_1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$. Число $\mathfrak{a} = 2$. Для системы $(D1)$ число $\mathfrak{c}_1 = 3$. Интегральная точка (она особая) $A_1(0,0)$ системы $(D1)$ имеет вес $\rho_1 = 1$. Матрицы $a_1 = b_1$ размера 1×3 имеют ранг, равный 1, а значит, для точки A_1 число $\mathfrak{b} = 1$. Расходимость $\operatorname{div} P^1(0,0) = 0$, определитель $\widetilde{\Delta}_1 \neq 0$. Отсюда следует, что $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 1 + 2 = 3 = \mathfrak{c}_1$, и, кроме того, система $(D1)$ не имеет первых интегралов $(\gamma_1 + \gamma_2 + 4)x_1 + i\,(\gamma_1 - \gamma_2)x_2 = C$ вида (40). Поэтому система (59) в силу следствия 14 имеет последний множитель

$$\mu\colon x \to \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)\, dt_1 + (-x_2 - x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)\, dt_2, \\ dx_2 &= (x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2)\, dt_1 + (x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{60}$$

имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1\colon x \to x_1 + ix_2$ и $\mathfrak{w}_2\colon x \to x_1 - ix_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, с $\mathfrak{W}_{11}(x) =$

$= x_1 - x_2 + i(1 + x_1 + x_2)\,,\ \mathfrak{W}_{12}(x) = -\,x_1 + x_2 + i(1 - x_1 - x_2)$ и $\mathfrak{W}_{21}(x) =$ $= x_1 - x_2 - i(1 + x_1 + x_2)\,,\ \mathfrak{W}_{22}(x) = -\,x_1 + x_2 - i(1 - x_1 - x_2)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$. У системы (60) выделим две интегральные точки: $A_1(-0,5\,,\ -0,5)$ с весом $\rho_1 = 1$ по базе $\theta_1 = \{1\}$ и $A_2(0,5\,, 0,5)$ с весом $\rho_2 = 1$ по базе $\theta_2 = \{2\}$. При этом $\mathfrak{b} = r_1 + r_2 = 2 + 2 = 4$. Кроме того $\mathfrak{a} = 2\,,\ \mathfrak{c} = \binom{2}{2+2-1} + \binom{2}{2+2-1} = 6\,,$ а значит, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 2 + 4 = 6 = \mathfrak{c}$. Поскольку $\operatorname{div} P^1(-0,5\,,\ -0,5) = \operatorname{div} P^2(0,5\,,\ 0,5) = 0\,,$ то выполняются условия теоремы 13, и функция

$$\mu\colon x \to \ \frac{2}{x_1^2 + x_2^2}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\,,$$

будет автономным последним множителем системы (60).

Список литературы

1. *Г а й ш у н И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983. – 272 с.

2. *Г у р с а Э.* Курс математического анализа. Т. 2. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 563 с.

3. *Г о р б у з о в В. Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, №4. – С. 562–564 .

4. *Г о р б у з о в В. Н.* К вопросу выпрямляемости многомерных динамических систем // Докл. Акад. наук Беларуси. – Т. 41, №3. – С. 36 – 38.

5. *Г о р б у з о в В. Н.* К вопросу устойчивости компактных регулярных орбит // Докл. Акад. наук Беларуси. – Т. 41, №4.– С. 40 – 43.

6. *Г о р б у з о в В. Н.* Автономность системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, №2. – С. 149 – 156.

7. *Г о р б у з о в В. Н.* Симметрии многомерных дифференциальных систем с неполной интегрируемостью // Вестник Гроднен. гос. ун-та. Сер. 2. – 1999. – №1. – С.26 – 37.

8. *К а р т а н Э.* Интегральные инварианты.– М.; Л.: ГТИ, 1940.–216 с.

9. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

10. *Горбузов В. Н.* О некоторых классах автономных систем с частным интегралом // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17 №9. – С. 1685 – 1687.

11. *Амелькин В. В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Университетское, 1985. – 142 с.