ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2000
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Управление в нелинейных системах

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТЕЙШЕМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А.Х.ГЕЛИГ

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2,
НИИ математики и механики имени академика В.И.Смирнова
Санкт-Петербургского государственного университета,
e-mail:ark@gelig.usr.pu.ru

Аннотация.

С помощью анализа функций Ляпунова в виде форм четвертого порядка и метода усреднения получен новый частотный критерий абсолютной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, описывающих динамику нелинейных импульсных систем в случае одного нулевого корня характеристического уравнения.

1. Постановка задачи

Рассматривается система функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Az + bf, \qquad \sigma = c'z, \tag{1}$$

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 99–01–00871).

$$f = N\sigma, \tag{2}$$

где A — постоянная $m \times m$-матрица, все собственные значения которой, кроме одного нулевого, лежат в левой полуплоскости, b и c — постоянные m-мерные столбцы, N — нелинейный оператор, который каждой непрерывной на $[0, +\infty)$ функции $\sigma(t)$ ставит в соответствие функцию $f(t)$ и последовательность $\{t_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots ; \quad t_0 = 0)$, обладающие следующими свойствами:

а) функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на каждом промежутке $[t_n, t_{n+1})$ и не меняет знака на нем;

б) при $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\delta_0 T \leq t_{n+1} - t_n \leq T, \tag{3}$$

где $T > 0, \quad 0 < \delta_0 < 1$.

в) $f(t)$ зависит только от $\sigma(\tau)$ при $\tau \leq t$,

t_n зависит только от $\sigma(\tau)$ при $\tau \leq t_n$;

г) для каждого n существует такое $\widetilde{t}_n \in [t_n, t_{n+1})$, что величина

$$v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\, dt$$

удовлетворяет соотношению

$$v_n = \varphi(\sigma(\widetilde{t}_n)), \tag{4}$$

где $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция, $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi(\sigma)\sigma > 0 \text{ при } \sigma \neq 0, \quad |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_+ = \mathrm{const} \text{ при } -\infty < \sigma < +\infty. \tag{5}$$

Уравнения (1), (2) описывают широкий класс нелинейных импульсных систем [1, 2, 3, 4] с различными видами импульсной модуляции (амплитудной, широтной, частотной и др.). При этом $\sigma(t)$ является сигналом на входе модулятора, $f(t)$ — сигнал на его выходе, $\varphi(\sigma)$ — статическая характеристика модулятора. Свойствами а) - г) обладает большинство из известных законов модуляции.

В настоящей работе с помощью развитого в [4, 5] метода усреднения и анализа функций Ляпунова в виде формы четвертого порядка [6] получен новый частотный критерий устойчивости системы (1), (2).

2. Формулировка результата

Рассмотрим передаточную (от $-f$ к σ) функцию $G(p) = c'(A - pI_m)^{-1}b$ (I_m — единичная $m \times m$ матрица) и предположим выполнение следующих условий:

$$\rho = \lim_{p\to 0} pG(p) > 0, \tag{6}$$

$$\lim_{p\to\infty} pG(p) = \lim_{p\to\infty} p^2 G(p) = 0. \tag{7}$$

Введем обозначения: $W(p) = G(p) - \frac{\rho}{p}$, $w(t)$ — оригинал (по Лапласу) функции $W(p)$,

$$\mu = \int\limits_0^\infty (|w(t)| + T|\dot{w}(t)|)\,dt, \quad \sigma_+ = (2\mu + \rho T)\varphi_+.$$

Потребуем, чтобы функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяла условию

$$\frac{1}{\sigma_*} > \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} > \delta \text{ при } 0 < |\sigma| \le \sigma_+, \tag{8}$$

где σ_* и δ — положительные постоянные.

Введя функции $v(t) = v_n$ при $t_n \le t < t_{n+1}$ и $u(t) = \int\limits_0^t [f(s) - v(s)]\,ds$ и сделав в системе (1) замену $z = x + bu$, преобразуем ее к виду

$$\dot{x} = A_\delta x + b\psi + Abu, \quad \sigma = c'x, \tag{9}$$

где $\psi(t) = v(t) - \delta\sigma(t)$, $A_\delta = A + \delta bc'$. (При этом мы воспользовались свойством $c'b = 0$, вытекающим из (7)).

Рассмотрим вектор

$$y = \mathrm{col}(x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_n, x_2^2, x_2x_3, \dots, x_2x_n, \dots, x_n^2),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — составляющие вектора x. Продифференцировав y по t в силу системы (9), придем к уравнению

$$\dot{y} = Py + q_1\eta_1 + q_2\eta_2, \tag{10}$$

где $y \in \mathbf{R}^l$, $l = \frac{m(m+1)}{2}$, $\eta_1 = \psi x$, $\eta_2 = xu$, P — постоянная $l \times l$-матрица, q_1 и q_2 —постоянные $l \times m$-матрицы.

Пусть Q — вещественная, вообще говоря, несимметричная $m\times m$-матрица, удовлетворяющая при $x \neq 0$ условию

$$x'Qx > 0. \tag{11}$$

Определим матрицы $M_1 = M_1' \in \mathbf{R}^{l\times l}$, $M_2 \in \mathbf{R}^{l\times l}$, $M_3 \in \mathbf{R}^{l\times l}$, $C \in \mathbf{R}^{m\times l}$ из тождеств

$$(x'Qx)^2 \equiv y'M_1y, \quad (c'x)^2(c'Ax)^2 \equiv y'M_2y,$$
$$|x|^2(c'x)^2 \equiv y'M_3y, \quad xc'x \equiv Cy$$

и рассмотрим квадратичную форму

$$G(y,\eta_1,\eta_2) = \eta_1'Q(\sigma_1\eta_1 - Cy) - y'My - \frac{8T^2}{\varepsilon\pi^2}(1+2\delta\sigma_1^2)(c'A\eta_1)^2 +$$
$$+\tau|\eta_2|^2 - 2\tau T^2|\eta_1|^2, \tag{12}$$

где $M = \frac{\varepsilon}{2}M_1 + \frac{8T^2\delta^2}{\varepsilon\pi^2}M_2 + 2\delta^2T^2\tau M_3$, $\quad \sigma_1 = \frac{\sigma_*}{1-\delta\sigma_*}$, ε и τ — скалярные параметры. Распространим эту форму до эрмитовой и рассмотрим в $\mathbf{C}^{2m}$ эрмитову форму

$$\Phi(\xi_1,\xi_2) = G[(i\omega I_l - P)^{-1}(q_1\xi_1 + q_2\xi_2), \xi_1, \xi_2].$$

Теорема. Пусть выполнены условия (3)–(8), матрица A_δ — гурвицева и существует такая удовлетворяющая (11) матрица Q и такие $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\omega \geq 0$ и $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{C}^m$ справедливо неравенство

$$\Phi(\xi_1,\xi_2) \geq \varepsilon_0(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2). \tag{13}$$

Тогда решение $z \equiv 0$ системы (1)-(2) устойчиво в целом.

3. Доказательство теоремы

Убедимся сначала в справедливости соотношения

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|\sigma(t)| \leq \varphi_+(2\mu + \rho T). \tag{14}$$

Система (1) известным способом сводится к интегро-функциональному уравнению

$$\sigma(t) = \alpha(t) + \sigma_0 - \int\limits_0^t [w(t-\lambda) + \rho] f(\lambda)\, d\lambda,$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, σ_0 — постоянная. Проинтегрировав по частям и воспользовавшись условиями (7), представим это уравнение в виде системы

$$\sigma(t) = k(t) - \rho\xi(t), \tag{15}$$

$$\dot{\xi} = v, \quad \xi(0) = -\sigma_0/\rho, \tag{16}$$

где $k(t) = \alpha(t) - \int\limits_0^t [w(t-\lambda)v(\lambda) + \dot{w}(t-\lambda)u(\lambda)]\,d\lambda$. Ввиду (4), (5) справедлива оценка

$$|v(t)| \le \varphi_+. \tag{17}$$

Известно [4, 5] соотношение

$$|u(t)| \le T|v(t)|. \tag{18}$$

Поэтому очевидно неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|k(t)| \le \mu\varphi_+$$

и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_1, что при $t > t_{N_1}$ имеет место соотношение

$$|k(t)| \le \mu\varphi_+ + \varepsilon. \tag{19}$$

Рассмотрим $n > N_1$ и пусть $\rho\xi(\widetilde{t_n}) \ge \mu\varphi_+ + 2\varepsilon$. Тогда из (15), (19) следует неравенство $\sigma(\widetilde{t_n}) \le -\varepsilon$. Отсюда в силу (4), (8) вытекает оценка $v_n \le -\delta\varepsilon$. Поэтому согласно (16) справедливо $\dot{\xi}(t) \le -\delta\varepsilon$ при $t \in [t_n, t_{n+1})$. Аналогично доказывается, что если $\rho\xi(\widetilde{t_n}) \le -(\mu\varphi_+ + 2\varepsilon)$, то $\dot{\xi}(t) \ge \delta\varepsilon$ при $t \in [t_n, t_n + 1)$. Поэтому найдется такое $N_2 > N_1$, что $|\rho\xi(\widetilde{t_n})| \le \mu\varphi_+ + 2\varepsilon$ при $n > N_2$. Поскольку $|\rho\xi(t) - \rho\xi(\widetilde{t_n})| \le \rho T\varphi_+$ ввиду (5), (16), то $|\rho\xi(t)| \le (\mu + \rho T)\varphi_+ + 2\varepsilon$ при $t \in [t_n, t_{n+1})$ и $n > N_2$. И, следовательно, согласно (15), (19) справедлива оценка

$$|\sigma(t)| \le (2\mu + \rho T)\varphi_+ + 3\varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε вытекает свойство (14). Из (14), (8) следует существование такого N_*, что при $t > t_{N_*}$ справедливо неравенство

$$(\sigma_1\overline{\psi} - \overline{\sigma})\overline{\psi} \le 0, \tag{20}$$

где $\overline{\sigma}(t) = \sigma(\widetilde{t_n})$, $\overline{\psi}(t) = \psi(\widetilde{t_n})$ при $t \in [t_n, t_{n+1})$.

Убедимся теперь, что на решениях системы (10) при $n > N_*$ справедлива оценка

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} G(y, \eta_1, \eta_2)\, dt \le 0. \tag{21}$$

Действительно,

$$\eta_1' Q(\sigma_1 \eta_1 - Cy) = x'Qx(\sigma_1 \psi^2 - \psi\sigma) =$$

$$= x'Qx(\sigma_1 \overline{\psi}^2 - \overline{\psi}\,\overline{\sigma}) + x'Qx[(\overline{\psi}\,\overline{\sigma} - \psi\sigma) + \sigma_1(\psi^2 - \overline{\psi}^2)].$$

В силу (20) очевидным образом получаем оценку

$$\eta_1' Q(\sigma_1 \eta_1 - Cy) \le \frac{\varepsilon}{2}(x'Qx)^2 + \frac{1}{\varepsilon}(S_1 + \sigma_1^2 S_2), \tag{22}$$

где$S_1 = (\overline{\psi}\,\overline{\sigma} - \psi\sigma)^2$, $S_2 = (\overline{\psi}^2 - \psi^2)^2$.

Согласно неравенству Виртингера [4, 5] и свойству (3) имеем неравенства

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} S_1 dt \le \frac{4T^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} [\frac{d(\psi\sigma)}{dt}]^2 dt, \quad \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} S_2 dt \le \frac{4T^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} [\frac{d(\psi^2)}{dt}]^2 dt.$$

Поскольку

$$\frac{d(\psi\sigma)}{dt} = \psi\dot{\sigma} - \delta\dot{\sigma}\sigma, \quad \frac{d(\psi^2)}{dt} = -2\delta\psi\dot{\sigma},$$

то

$$[\frac{d(\psi\sigma)}{dt}]^2 \le 2\psi^2\dot{\sigma}^2 + 2\delta^2\sigma^2\dot{\sigma}^2, \quad [\frac{d(\psi^2)}{dt}]^2 = 4\delta^2\psi^2\dot{\sigma}^2.$$

Условия (7) равносильны равенствам $c'b = c'Ab = 0$. Поэтому $\dot{\sigma} = c'Ax$ и

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} (S_1 + \sigma_1^2 S_2)\, dt \le \frac{4T^2}{\pi^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \{2\delta^2 (c'x)^2 (c'Ax)^2 +$$

$$+(2 + 4\delta\sigma_1^2)\psi^2 (c'Ax)^2\}\, dt. \tag{23}$$

В силу (18) справедливы соотношения

$$|\eta_2|^2 \le T^2 |x|^2 v^2 \le 2T^2 |x|^2 (\psi^2 + \delta^2\sigma^2).$$

Отсюда получаем оценку

$$|\eta_2|^2 \leq 2T^2|\eta_1|^2 + 2\delta^2 T^2 |x|^2 (c'x)^2. \tag{24}$$

Неравенство (21) вытекает из соотношений (22)–(24).
Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(y) = y'Hy, \tag{25}$$

где H — положительно-определенная $l \times l$-матрица, которая будет выбрана ниже. Продифференцировав $V(y(t))$ по t в силу системы (10), приходим к представлению

$$\dot{V} = W(y, \eta_1, \eta_2) + G(y, \eta_1, \eta_2), \tag{26}$$

где

$$W(y, \eta_1, \eta_2) = 2y'H(Py + q_1\eta_1 + q_2\eta_2) - G(y, \eta_1, \eta_2).$$

Из гурвицевости матрицы A_δ вытекает [6] гурвицевость матрицы P. По частотной теореме В.А.Якубовича для невырожденного случая [7] в силу условия (13) теоремы существует такая положительно-определенная $l \times l$-матрица H и такое $\mu_0 > 0$, что выполнено неравенство

$$W(y, \eta_1, \eta_2) \leq -\mu_0(|y|^2 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2). \tag{27}$$

Из (26), (27) вытекает оценка

$$\dot{V} \leq G(y, \eta_1, \eta_2) - \mu_0(|y|^2 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2). \tag{28}$$

Введя обозначение $V_n = V(y(t_n))$, из (28) в силу (21) получим следующее соотношение

$$\mu_0 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)\, dt + V_{n+1} - V_n \leq -\mu_0 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} |y(t)|^2\, dt.$$

Отсюда

$$V_{n+1} \leq V_n \leq V_{N_*} \tag{29}$$

и

$$\mu_0 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)\, dt \leq V_n - V_{n+1}. \tag{30}$$

Просуммировав эти неравенства по n от N_* до произвольного целого N, получим соотношение

$$\mu_0 \int\limits_{t_{N_*}}^{t_{N+1}} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)\, dt \le V_{N_*} - V_{N+1} \le V_{N_*}.$$

Поскольку в силу (3) $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, то из полученного неравенства вытекает свойство

$$|\eta_1|, |\eta_2| \in L_2[0, +\infty).$$

Отсюда ввиду гурвицевости матрицы P в системе (10) следует, что $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. А тогда этим же свойством обладает $x(t)$. Из (8) вытекает асимптотика $v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, откуда в силу (18) следует, что $u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Осталось доказать устойчивость решения $z(t) \equiv 0$ по Ляпунову. Если $|z(0)|$ достаточно мала, то этим же свойством будет обладать и $|x(0)|$, поскольку $u(0) = 0$. Возьмем $x(0)$ столь малым, чтобы из оценки $V(y) < V_0 = V(y(0))$ вытекало неравенство $|\sigma| < \sigma_+$. Тогда справедлива оценка $V_{n+1} \le N_n \le V_0$ и, следовательно, $|y(t_n)|$ сколь угодно мала. Из (29), (30) вытекает соотношение

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)\, dt \le \frac{1}{\mu_0} V_0. \qquad (31)$$

Проинтегрировав систему (10) от t_n и до $t \in (t_n, t_{n+1})$, получим представление

$$y(t) = e^{P(t-t_n)} y(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t} e^{P(t-\lambda)} [q_1 \eta_1(\lambda) + q_2 \eta_2(\lambda)]\, d\lambda.$$

Отсюда легко получить оценку

$$|y(t)| \le \alpha_1 |y(t_n)| + \alpha_2 \left\{ \sqrt{\int\limits_{t_n}^{t} |\eta_1|^2\, dt} + \sqrt{\int\limits_{t_n}^{t} |\eta_2|^2\, dt} \right\}, \qquad (32)$$

где α_1, α_2 — абсолютные постоянные. Из (31), (32) следует, что $|y(t)|$ сколь угодно мала, если достаточно мала V_0. Очевидно, что тогда этим же свойством обладает и $|x(t)|$, а, следовательно, и $|\sigma(t)|$, $|v(t)|$, $|u(t)|$, $|z(t)|$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973, 414 с. Фамилия И.О. Название монографии. М.: Мир, 1975, 683с.

[2] Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев: Наукова думка, 1970, 340 с.

[3] Гелиг А.Х. Динамика импульсных систем и нейронных сетей. Л.: ЛГУ, 1982, 192 с.

[4] Gelig A.Kh., Churilov A.N. Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Birkhäuser, Boston, 1998, 362 p.

[5] Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. Л.: ЛГУ, 1992, 265 с.

[6] Баркин А.И., Зеленцовский А.Л., Пакшин П.В. Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992, 303 с.

[7] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978, 400с.