Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.938

Н. Б. Ампилова¹**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ
ИНВАРИАНТНЫХ КРИВЫХ В ОКРЕСТНОСТИ
НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОТОБРАЖЕНИЯ ГАРДИНИ**

Пусть $T = T_{\lambda, \mu}$ отображение расширенной плоскости $\tilde{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$ в себя:

$$T : \begin{cases} x_1 = (1 - \lambda)x + \lambda f_\mu(y), \\ y_1 = (1 - \lambda)y + \lambda f_\mu(x), \end{cases} \quad (1)$$

где λ, μ — вещественные параметры, f_μ — логистическая функция имеет вид

$$f(t) = f_\mu(t) = \mu t(1 - t). \quad (2)$$

Топология на $\tilde{\mathbb{R}}^2$ предполагается индуцированной топологией сферы Римана, т. е. окрестностями бесконечно удаленной точки являются дополнения всевозможных компактов. Мы предполагаем, что ∞ является неподвижной точкой, тогда T непрерывно.

Отображение $T_{\lambda, \mu}$ для $\mu = 4, \lambda \in [0, 1]$ исследовалось в [1]. В качестве фазового пространства было выбрано множество $D = I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$. При указанных ограничениях на λ, μ оно является инвариантным: $T(D) \subset D$.

В работе [2] были описаны простейшие свойства и исследованы особые точки отображения Гардини $T_{\lambda, \mu}$ без ограничения на параметры. Также

¹ Санкт-Петербургский государственный университет: 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2. СПбГУ. Математико-механический факультет. Кафедра дифференциальных уравнений.

были построены диаграммы локальных бифуркаций на плоскости параметров λ, μ . Целью настоящей работы является подробное исследование условий появления и разрушения инвариантных кривых в окрестности внедиагональных неподвижных точек указанного отображения.

1. Инвариантное множество

Обозначим O_∞ бесконечно удаленную точку. Как было показано в [2], замена переменных

$$\lambda\mu(x+y) = 2v, \quad \lambda\mu(x-y) = 2z. \quad (3)$$

приводит $T_{\lambda,\mu}$ к виду

$$v_1 = R^2 - (v-R)^2 - z^2, \quad z_1 = z(\tau + 2v), \quad (4)$$

где

$$R = \frac{1 - \lambda + \lambda\mu}{2} \quad \tau = 1 - \lambda - \lambda\mu. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что дополнение к кругу $(v-R)^2 + z^2 \leq R^2$ принадлежит к области притяжения O_∞ . Более того, с течением времени почти все точки из D притягиваются к O_∞ .

2. Неподвижные точки

Пусть в уравнении (1) $x_1 = x, y_1 = y$. Тогда

$$x = f_\mu(y), \quad y = f_\mu(x). \quad (6)$$

Для $x = y$ получаем

$$x(-\lambda + \lambda\mu - \lambda\mu x) = 0. \quad (7)$$

Следовательно, на диагонали есть две неподвижные точки — $O_0(0,0)$ и $O_1(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu})$. Если $x \neq y$, то $x = f_\mu^2(x)$. Таким образом, мы находим внедиагональные неподвижные точки T как точки 2-цикла $f(x)$. Обозначим их $O_2(p, q)$ и $O_3(q, p)$, где

$$p = \frac{1 + \mu - \sqrt{(\mu - 1)^2 - 4}}{2\mu}, \quad q = \frac{1 + \mu + \sqrt{(\mu - 1)^2 - 4}}{2\mu}. \quad (8)$$

Тип неподвижных точек определяется при анализе якобиана отображения $T_{\lambda,\mu}$. В точке (x^*, y^*) матрица Якоби имеет вид

$$\mathbf{J} = \mathbf{DT}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \lambda f'_\mu(y^*) \\ \lambda f'_\mu(x^*) & 1 - \lambda \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Характеристический многочлен J может быть записан как

$$P(z) = z^2 - 2(1 - \lambda)z + (1 - \lambda)^2 - \lambda^2 f'_\mu(x^*) f'_\mu(y^*).$$

Обозначим $\varkappa = f'_\mu(x^*) f'_\mu(y^*)$. Если $\varkappa \geq 0$, то корни характеристического уравнения вещественны и равны $1 - \lambda \pm \lambda\sqrt{\varkappa}$. В противном случае собственные значения комплексны: $1 - \lambda \pm \lambda i\sqrt{|\varkappa|}$. Собственные значения в точке O_0 :

$$\sigma = 1 - \lambda + \lambda\mu, \quad \tau = 1 - \lambda - \lambda\mu. \quad (10)$$

Соответствующие собственные векторы суть $r_1 = (1, 1)$ и $r_2 = (1, -1)$.

Тогда точка O_0 является седловой для $\lambda \in \left(0, \frac{2}{\mu + 1}\right)$ и неустойчивым узлом при $\lambda \geq \frac{2}{\mu + 1}$.

Аналогично, O_1 — седловая точка при $\lambda \in \left(0, \frac{2}{\mu - 1}\right)$ и неустойчивый узел при $\lambda \geq \frac{2}{\mu - 1}$.

Собственные значения J в точках O_2 и O_3 равны $1 - \lambda \pm \sqrt{5 - (\mu - 1)^2}$, следовательно эти точки являются фокусами при $\mu \geq 1 + \sqrt{5}$ или $\mu \leq 1 - \sqrt{5}$ и узлами в противном случае.

3. Бифуркация Хопфа

Исследуем устойчивость точек O_2, O_3 , когда они являются фокусами. Справедливо следующее

Предложение 1. Пусть $\lambda > 0$ и $\mu \geq 1 + \sqrt{5}$. Существует $\mu^* = \mu^*(\lambda)$ такое, что для $\mu \leq \mu^*$ точки O_2, O_3 являются устойчивыми фокусами. Пусть $\lambda^* = \lambda(\mu^*)$. Тогда $\forall \varepsilon \geq 0$ существует $\delta \geq 0$ такое, что при $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \delta)$ в ε -окрестностях точек O_2, O_3 существуют замкнутые инвариантные кривые.

Доказательство. Пусть s_1, s_2 собственные значения J в точках O_2, O_3 . Тогда $s_{1,2} = 1 - \lambda \pm \lambda i\sqrt{|\varkappa|}$, где $|\varkappa| = f'_\mu(p)f'_\mu(q) = 5 - (\mu - 1)^2$. Следовательно $|s_1| = (1 - \lambda)^2 + \lambda^2(\mu^2 - 2\mu - 4)$. Тогда

$$|s_1| = 1 \iff \lambda(\lambda(\mu^2 - 2\mu - 3) - 2) = 0.$$

Поскольку $\lambda > 0$, получаем следующее соотношение

$$(\mu - 1)^2 = 4 + \frac{2}{\lambda}. \quad (11)$$

Последнее уравнение определяет линию бифуркации Хопфа на плоскости параметров (λ, μ) , т.е. для (λ_0, μ_0) , удовлетворяющих неравенству $1 +$

$\sqrt{5} \leq \mu_0 \leq 1 + \sqrt{4 + \frac{2}{\lambda}}$, фокусы O_2, O_3 устойчивы. Тогда μ^* , определяемое соотношением (11), является искомым. Запишем (11) в виде $\lambda = \lambda^*(\mu) = \frac{2}{(\mu - 1)^2 - 4}$. Так как при $\lambda = \lambda^*$ фокусы устойчивы и $\frac{\partial \operatorname{Re}(s_1)}{\partial \lambda} \geq 0$, то, согласно [4], найдется δ такое, что при $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \delta)$ в окрестностях O_2, O_3 существуют замкнутые инвариантные кривые. Предложение доказано.

С помощью численного моделирования были определены значения параметра λ , соответствующие возникновению и разрушению этих кривых. Возьмем точку (λ_0, μ_0) , принадлежащую линии бифуркации Хопфа. Изменяя λ от λ_0 с некоторым шагом ε , мы можем определить значения параметра λ , соответствующие появлению инвариантной кривой (обозначим его λ_b) и ее разрушению (λ_e). Следует отметить, что λ_e соответствует тому значению параметра, после которого появление инвариантной кривой невозможно. Заметим также, что одновременное выполнение условий $\mu > 1 + \sqrt{5}$ и $(\mu - 1)^2 > 4 + \frac{2}{\lambda}$ (т. е. условий существования фокуса и появления в его окрестности инвариантных кривых) возможно лишь при $\lambda \leq 2$. Численные результаты для наиболее интересных значений параметра μ приведены в таблице 1. Полученные данные проиллюстрированы на рис. 1.

Таблица 1.

Интервалы существования предельных циклов		
μ	$\lambda = \frac{2}{(\mu-1)^2-4}$	$(\lambda_b(\mu), \lambda_e(\mu))$
3.41	1.10613	1.11 - 1.2
3.42	1.07735	1.078 - 1.193
3.43	1.04992	1.061 - 1.15
3.44	1.02375	1.036 - 1.139
3.45	0.99875	1.011 - 1.13
3.46	0.9748	0.986 - 1.12

П р о д о л ж е н и е т а б л и ц ы 1.

μ	$\lambda = \frac{2}{(\mu-1)^2-4}$	$(\lambda_b(\mu), \lambda_e(\mu))$
3.47	0.9519	0.966 - 1.08
3.48	0.93	0.945 - 1.05
3.49	0.909	0.92 - 0.98
3.50	0.888	0.9 - 0.97
3.51	0.869	0.88 - 0.96
3.52	0.85	0.86 - 0.95
3.53	0.83	0.846 - 0.95
3.54	0.815	0.829 - 0.94
3.55	0.799	0.812 - 0.92
3.56	0.783	0.797 - 0.905
3.57	0.767	0.781 - 0.87
3.58	0.75	0.79 - 0.86
3.59	0.738	0.752 - 0.85
3.6	0.724	0.739 - 0.85
3.7	0.607	0.624 - 0.7
3.8	0.52	0.536 - 0.667
3.9	0.4535	0.47 - 0.61
4.0	0.4	0.41-0.55
4.1	0.356	0.38 - 0.5
4.2	0.32	0.34 - 0.47
4.5	0.242	0.263 - 0.4
4.6	0.223	0.24 - 0.32
4.7	0.2	0.22 - 0.3
4.8	0.191	0.21 - 0.29
4.9	0.178	0.2 - 0.28
5.0	0.166	0.187 - 0.27

4. Существование хаотического режима на диагонали

Положим $x = y$. Тогда отображение $T_{\lambda,\mu}$ примет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - \lambda)x + \lambda\mu x(1 - x) = \frac{\lambda\mu x}{\lambda\mu}(1 - \lambda + \lambda\mu - \lambda\mu x) = \\ &= \frac{\lambda\mu x}{\lambda\mu} \left(1 - \frac{\lambda\mu x}{1 - \lambda + \lambda\mu} \right) (1 - \lambda + \lambda\mu). \end{aligned}$$

Обозначим $M = 1 - \lambda + \lambda\mu$. Тогда $\lambda\mu x_1 = \lambda\mu x M \left(1 - \frac{\lambda\mu x}{M} \right)$. Полагая $\frac{\lambda\mu x}{M} = t$, получим следующее выражение

$$t_1 = Mt(1 - t). \tag{12}$$

Динамика такого отображения довольно полно изучена. Известно ([3]), что бифуркационные значения M лежат в интервале $[M_1, M_2]$, где $M_1 \simeq 3.537$, $M_2 \simeq 3.7$. Как следует из определения M , параметры λ, μ связаны соотношением $\mu = 1 + \frac{M - 1}{\lambda}$. Тогда область между гиперболами $\mu = 1 + \frac{M_1 - 1}{\lambda}$ и $\mu = 1 + \frac{M_2 - 1}{\lambda}$ на плоскости (λ, μ) соответствует появлению хаотических режимов в окрестности диагонали. Существование указанных режимов проверялось с помощью численного моделирования. Величина ε -окрестности диагонали варьировалась от 10^{-8} до 10^{-11} . Число итераций выбиралось в диапазоне от 500 до 1000.

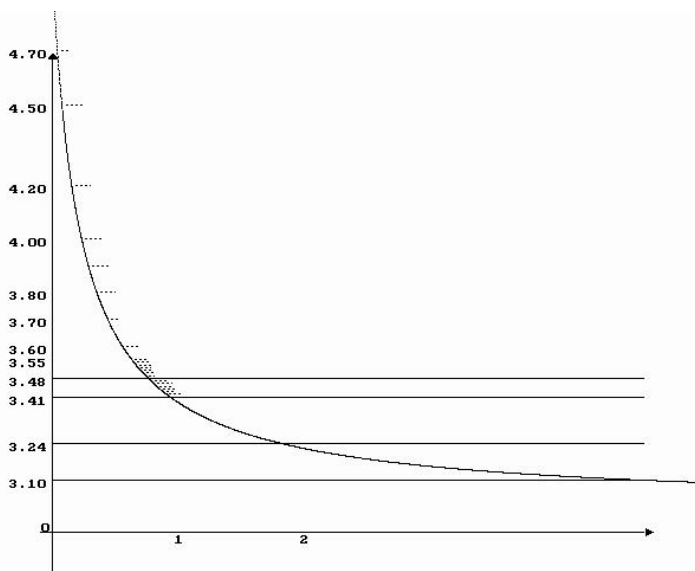


Рис. 1. Границы существования инвариантных кривых

Полученные результаты численных исследований позволяют определить в плоскости параметров (λ, μ) область, где одновременно существуют предельные циклы и возникают хаотические режимы на диагонали. Для этого найдем точки пересечения парабол с линией бифуркации Хопфа: $1 + \frac{M-1}{\lambda} = 1 + \sqrt{4 + \frac{2}{\lambda}}$. Тогда $\lambda = 0.5 \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4(M-1)^2} \right)$. При $M = M_1$ и $M = M_2$ получаем соответственно $\lambda \simeq 1.03$ и $\lambda \simeq 1.18$. Существует такое значение $\bar{\mu}$, что для $\mu > \bar{\mu}$ промежуток $(\lambda_b(\mu), \lambda_e(\mu))$ не имеет общих точек с гиперболой $\mu = 1 + \frac{M_1 - 1}{\lambda}$. Результаты нахождения точек пересечения прямых $\mu = c$ с гиперболами для значений μ , приведенных в таблице 1, даны в таблице 2. Экспериментально установленное значение $\bar{\mu}$ равно 3.48. Таким образом, искомая область ограничена гиперболами $\mu = 1 + \frac{M_1 - 1}{\lambda}$, $\mu = 1 + \frac{M_2 - 1}{\lambda}$, прямой $\mu = \bar{\mu}$ и линией бифуркации Хопфа $\mu = 1 + \sqrt{4 + \frac{2}{\lambda}}$. Область показана на рис. 2.

Таблица 2.

Интервал существования инвариантных кривых и хаотического режима на диагонали			
μ	$\lambda_1 = \frac{M_1 - 1}{\mu - 1}$	$\lambda_2 = \frac{M_2 - 1}{\mu - 1}$	$(\lambda_1, \lambda_2) \cap (\lambda_b(\mu), \lambda_e(\mu))$
3.41	1.057	1.125	(1.11,1.2)
3.42	1.053	1.120	(1.078,1.12)
3.43	1.048	1.115	(1.061,1.115)
3.44	1.044	1.111	(1.041,1.111)
3.45	1.039	1.106	(1.039,1.106)
3.46	1.035	1.102	(1.035,1.102)
3.47	1.031	1.097	(1.031,1.08)
3.48	1.027	1.093	(1.027,1.05)
3.49	1.023	1.088	\emptyset
3.5	1.018	1.084	\emptyset

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 96-01-00421). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2.1-326.53).

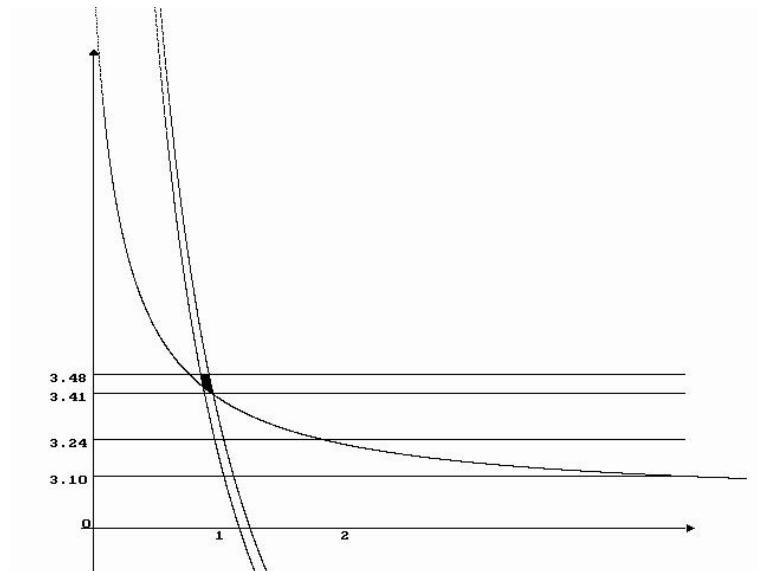


Рис. 2. Область существования инвариантных кривых и хаоса на диагонали

Список литературы

1. *Gardini L., Abraham R., Record R. J., Fournier-Prunaret D.* A double logistic map // *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1994. V. 4. P. 145–176.
2. *Ампилова Н. Б., Осипов А. В.* Локальные бифуркации для полного отображения Гардини. Деп. в ВИНТИ 14.06.96. N 1969–В96.
3. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
4. *Whitley D.* Discrete dynamical systems in dimensions one and two // *Bull. London Math. Soc.*, 1983. **15**. P. 177–217.