ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория нелинейных колебаний

УДК 517. 938

А. В. Егоров[1]

ЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПАРЫ СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ХЕНОНА В СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Введение

Проблема синхронизации связанных осцилляторов занимает важное место в теории дискретных динамических систем. Системы связанных отображений изучались при различных предположениях и интерпретациях (см., например, [2–4]). Предметом анализа настоящей статьи выбрана структура, которая разбиралась в работе [4]:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (1-k)h_1(z_n) + kh_2(w_n)\ , \\ w_{n+1} &= kh_1(z_n) + (1-k)h_2(w_n)\ , \end{aligned} \qquad 0 < k < 1/2,$$

при этом изучается симметричный случай, т. е. $h_1 = h_2 = h$.

В предлагаемом исследовании описываются свойства пары связанных осцилляторов хеноновского типа, т. е. рассматривается отображение вида:

$$H\colon \begin{cases} z_1 = (1-k)h(z) + kh(w), \\ w_1 = kh(z) + (1-k)h(w), \end{cases} \tag{1}$$

где $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $0 < k < 1/2$, h — отображение Хенона:

$$h\colon \begin{cases} x_1 = a - by - x^2, \\ y_1 = x, \end{cases} \tag{2}$$

[1] **Санкт-Петербургский государственный университет:** 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2. СПбГУ. Математико-механический факультет. Кафедра дифференциальных уравнений.

с произвольными действительными коэффициентами a, b.

З а м е ч а н и е. Далее в тексте пару связанных отображений H вида (1) будем называть полным отображением, а под классическим или стандартным будем понимать отображение Хенона h, записанное в виде (2) (см., [5]).

Система уравнений (1) описывает преобразование четырехмерного пространства, однако при $b=0$ классическое отображение Хенона эквивалентно одномерному логистическому отображению (это утверждение, а также некоторые свойства логистического отображения, можно найти в работе [5]), а исходная задача синхронизации двух связанных отображений Хенона сводится к изучению эндоморфизмов двумерной плоскости. Кроме того, свойства полного отображения для $0 < |b| < 1$ и для $|b| > 1$ имеют существенные различия.

В связи с вышесказанным возникают три возможных случая поведения системы (1) при различных значениях параметра b.

Пара связанных логистических отображений, которая соответствует полному отображению H при условии, что значение параметра b равно нулю, рассматривалась, например, в работах [2–4].

Локальный анализ, проведенный в данной работе, относится к ситуации, когда $0<|b|<1$. Далее это условие предполагается выполненным.

1. Некоторые свойства отображения h

В этом разделе даются простые свойства классического отображения, описанные в работе [5], которые будем использовать в дальнейшем.

1.1. При $a<-s^2$, $s=(b+1)/2$, $h(z)$ не имеет неподвижных точек.

1.2. При $a>-s^2$ у $h(z)$ существуют две неподвижные точки M_1 и M_2, с координатами (m_1, m_1) и (m_2, m_2), соответственно, где $m_1 = -s - \sqrt{a+s^2}$, $m_2 = -s + \sqrt{a+s^2}$.

1.3. При $a > 3s^2$ существуют две неподвижные точки M_1 и M_2 и две двупериодические точки $N_1 = (n_1, n_2)$ и $N_2 = (n_2, n_1)$, где $n_1 = s - \sqrt{a-3s^2}$, $n_2 = s + \sqrt{a-3s^2}$.

1.4. При $a = -s^2$ происходит бифуркация ”складка”.

1.5. При $a = 3s^2$ происходит бифуркация ”удвоение периода”.

1.6. Собственные числа в точках M_1 и M_2 будут равны

$$\lambda_{1i} = -m_i + \sqrt{m_i^2 - b}\,,\ \lambda_{2i} = -m_i - \sqrt{m_i^2 - b}\,,\ i = 1,\, 2.$$

При этом для собственных чисел в неподвижных точках выполняются следующие условия: λ_{11} больше 1, а λ_{12} по абсолютной величине меньше 1, $|\lambda_{12}| < 1$, а λ_{22} находится в пределах от -1 до 1 при $a < 3s^2$ и λ_{22} меньше -1 при $a > a_2$.

2. Некоторые свойства полного отображения H

В этой части работы описываются простейшие свойства полного отображения H, связанные с его структурой.

О п р е д е л е н и е 1. Для каждой точки $M = (z, w)$ точку $M^* = (w, z)$ будем называть *симметричной точке* M. Соответственно, оператор $M \to M^*$ будем называть симметрией. *Главной диагональю* будем называть множество точек, инвариантное относительно симметрии (т. е. множество точек, определяемых равенством $z = w$).

Рассмотрим отображение $H(z, w)$, записанное в координатной форме:

$$H\colon \begin{cases} x_1 = (1-k)(a - by - x^2) + k(a - bv - u^2), \\ y_1 = (1-k)x + ku, \\ u_1 = k(a - by - x^2) + (1-k)(a - bv - u^2), \\ v_1 = kx + (1-k)u, \end{cases} \qquad 0 < k < 1/2, \qquad (3)$$

и проведем линейную замену координат:

$$x \mapsto x + u, \quad y \mapsto y + rv, \quad u \mapsto x - u, \quad v \mapsto y - rv, \quad r = 1 - 2k.$$

Тогда $H(z, w)$ запишется в эквивалентной форме:

$$H\colon \begin{cases} x_1 = a - by - x^2 - u^2, \\ y_1 = x, \\ u_1 = -2rxu - br^2 v, \\ v_1 = u, \end{cases} \qquad 0 < r < 1. \qquad (4)$$

После замены координат плоскость $z = w$ переходит в плоскость, задаваемую равенствами $u = v = 0$. Следовательно, координаты точек главной диагонали примут вид $(p, 0)$, а симметричными будут являться точки $M = (p, q)$ и $M^* = (p, -q)$.

Первое свойство полного отображения непосредственно вытекает из формул (4): *главная диагональ является строго инвариантным множеством.*

Следующее утверждение подчеркивает свойство симметрии полного отображения H.

П р е д л о ж е н и е 1. *Точки $M = (p, q)$ и $M^* = (p, -q)$, симметричные относительно главной диагонали, имеют симметричные образы для любой итерации.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки $M = (p, q)$ и $M^* = (p, -q)$ симметричны, где $p = (x, y)$, $q = (u, v)$. Проведем индукцию по числу итераций. Для $n = 1$, используя формулы (4), имеем

$H(M) = H(p, q) = H(x, y, u, v) = (x_1, y_1, u_1, v_1) = K_1,$

$H(M^*) = H(p, -q) = H(x, y, -u, -v) = (x_1, y_1, -u_1, -v_1) = K_1^*.$

Следовательно, для $n = 1$ утверждение верно. В предположении, что утверждение верно для степеней отображения меньших или равных $n-1$, $n > 1$, обозначим $K_{n-1} = H^{n-1}(M) = H^{n-1}(p, q)$, $\quad K_{n-1}^* = H^{n-1}(M^*) = H^{n-1}(p, -q)$. Тогда

$$H(K_{n-1}) = K_n, \quad H(K_{n-1}^*) = K_n^*.$$

Таким образом, если $H^n(M) = K_n$, то $H^n(M^*) = K_n^*$ для любых точек M, M^*, $n = 1, 2, \ldots$.

В дополнение укажем еще некоторые очевидные свойства полного отображения $H(z, w)$ в симметричном случае.

Отображение $H(z, w)$:

2. 1. *сохраняет ориентацию*;

2. 2. *диссипативно*;

2. 3. *сужение полного отображения на главную диагональ совпадает с классическим*: $H^n(p, 0) = (h^n(p), 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2. 4. *точка p является периодической для единичного отображения Хенона $h(z)$, тогда и только тогда, когда точка $(p, 0)$ является периодической с тем же периодом для полного отображения $H(z, w)$.*

Свойства 2. 1 и 2. 2 являются простым следствием того факта, что якобиан системы (4)

$$\det \begin{vmatrix} -2x & -b & -2u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2ru & 0 & -2rx & -br^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = b^2 r^2$$

является положительной константой, меньшей единицы. Свойства, указанные в предложении, непосредственно вытекают из соответствующих определений (см., [6]).

Свойство 2. 3 означает, что свойства классического отображения Хенона естественным образом переносятся на свойства полного отображения для точек главной диагонали.

Непосредственным следствием данного утверждения является свойство 2. 4.

3. Неподвижные точки отображения H

В этом разделе для полного отображения находятся точные координаты и количество неподвижных точек в зависимости от значений параметров, входящих в выражение для $H(z,w)$.

Рассмотрим условие существования неподвижной точки отображения H:

$$\begin{aligned} &x = a - by - x^2 - u^2, \\ &y = x, \\ &u = -2rxu - br^2v, \\ &v = u. \end{aligned} \tag{5}$$

Введем обозначения:$s = \frac{1}{2}(b+1), \quad p = \frac{1}{2r}(1+br^2)$.

С учетом этих обозначений из (5) получаем систему уравнений для нахождения координат неподвижных точек:

$$\begin{aligned} &(x+s)^2 + u^2 = a + s^2, \\ &y = x, \\ &u(x+p) = 0, \\ &v = u. \end{aligned} \tag{6}$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Отображение H обладает следующими свойствами:*
1) *если $a < a_0 = -s^2$, то H не имеет неподвижных точек;*
2) *если $a_0 < a < a_1 = p^2 - 2sp$, то существуют две неподвижные точки M_1 и M_2, лежащие на главной диагонали, с координатами $(m_1, m_1, 0, 0)$ и $(m_2, m_2, 0, 0)$ соответственно, где $m_1 = -s - \sqrt{a+s^2}$, $m_2 = -s + \sqrt{a+s^2}$;*
3) *если $a > a_1$, то существуют четыре неподвижные точки: M_1, M_2, а также $M_3 = (-p, -p, m_3, m_3)$ и симметричная ей $M_3^* = (-p, -p, -m_3, -m_3)$, где $m_3 = \sqrt{a + 2sp - p^2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Очевидно, что первое равенство полученной системы (6) не имеет действительных корней при $a < a_0$. Следовательно, если $a < a_0$, то отображение $H(z,w)$ не имеет неподвижных точек.

Обратим внимание на то, что условие $a < a_0$, при выполнении которого отсутствуют неподвижные точки, для полного и классического отображений совпадают (см. свойство 1. 1).

2) Рассмотрим третье уравнение системы (6). Оно имеет два действительных решения: $u = 0$ и $x = -p$. Запишем равенство $(x+s)^2+u^2 = a+s^2$ в виде $x^2 + 2sx + u^2 = a$. Полученное уравнение не имеет действительных корней при $x = -p$ и $a_0 < a < a_1$, потому что $p^2-2sp+u^2-a > p^2-2sp-a = a_1-a$. Иными словами, значение $x = -p$ не удовлетворяет первому уравнению системы (6). Тогда координаты неподвижных точек находятся из равенств

$$x^2 + 2sx - a = 0, \quad y = x, \quad u = v = 0.$$

Следовательно, неподвижными являются только две точки M_1 и M_2 с координатами $(m_1, m_1, 0, 0)$ и $(m_2, m_2, 0, 0)$, соответственно, где $m_1 = -s - \sqrt{a+s^2}$, $m_2 = -s + \sqrt{a+s^2}$. Таким образом, при $a_0 < a < a_1$ отображение $H(z, w)$ имеет две неподвижные точки, которые лежат на главной диагонали. Отметим, что это решение существует для любого $a > a_0$, в том числе и при $a > a_1$.

3) Если $a > a_1$, то при $x = -p$ система (6) принимает вид:

$$y = x = -p, \quad p^2 - 2sp + u^2 - a = 0, \quad v = u.$$

Из полученных равенств находим координаты неподвижных точек $M_3 = (-p, -p, m_3, m_3)$ и $M_3^* = (-p, -p, -m_3, -m_3)$, где $m_3 = \sqrt{a + 2sp - p^2} = \sqrt{a - a_1}$. При точки M_1 и M_2 остаются неподвижными. Таким образом, при $a > a_1$ существуют четыре неподвижные точки отображения $H(z, w)$.

Условия, указанные в предложении 2, показаны на диаграмме (см. ниже):

I — отсутствие неподвижных точек,

$II - VII$ — области существования неподвижных точек M_1, M_2;

$III, V - VII$ — области существования неподвижных точек M_3, M_3^*.

4. Характер устойчивости неподвижных точек

В этой части работы исследуется характер устойчивости неподвижных точек полного отображения $H(z, w)$.

Определение 2. Неподвижная точка M называется *гиперболической*, если в этой точке ни одно собственное число не равно 1 по абсолютному значению.

Определение 3. Будем говорить, что гиперболическая точка

M принадлежит классу $S_{i,j}$, если $\dim W^s(M) = i$, $\dim W^u(M) = j$, где $W^s(M)$, $W^u(M)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия точки M.

Отметим, что для стандартного отображения Хенона $h(z)$ одна неподвижная точка всегда принадлежит классу $S_{1,1}$, а другая — классу $S_{2,0}$, если $a_0 < a < a_2$ и классу $S_{1,1}$, если $a > a_2$ (см., например, [5]).

Т е о р е м а 1. *Для точек M_1, M_2 при $0 < |b| < 1$ выполняются следующие утверждения:*
1) *если $a_0 < a < a_1$, то $M_1 \in S_{3,1}$;*
2) *если $a > a_1$, то $M_1 \in S_{2,2}$;*
3) *если $a_0 < a < a_2$, то $M_2 \in S_{4,0}$;*
4) *если $a_2 < a < a_3$, то $M_2 \in S_{3,1}$;*
5) *если $a > a_3$, то $M_2 \in S_{2,2}$;*

где $a_0 = -s^2$, $a_1 = p^2 - 2sp$, $a_2 = 3s^2$, $a_3 = p^2 + 2sp$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1) Рассмотрим неподвижные точки M_1 и M_2. Для них характеристическое уравнение запишется в виде

$$(\lambda^2 + 2m_i\lambda + b)(\lambda^2 + 2rm_i\lambda + br^2) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, собственные числа будут равны

$$\lambda_{1i} = -m_i + \sqrt{m_i^2 - b}, \quad \lambda_{3i} = r\lambda_{1i},$$

$$\lambda_{2i} = -m_i - \sqrt{m_i^2 - b}, \quad \lambda_{4i} = r\lambda_{2i},$$

где $i = 1, 2$, $m_1 = -s - \sqrt{a + s^2}$, $m_2 = -s + \sqrt{a + s^2}$, $s = \dfrac{1}{2}(b + 1)$, $0 < r < 1$. При этом λ_{ji}, i, $j = 1, 2$ совпадают с собственными числами неподвижных точек для единичного отображения. Заметим, что собственные числа как функции параметра a являются непрерывными. Тогда, используя свойства 1.6 и 2.3 (так как точки M_1 и M_2 лежат на главной диагонали), получаем следующие свойства:

1) $\lambda_{11}(a) > 1$ и монотонно возрастает с ростом параметра a,

2) $|\lambda_{21}(a)| < 1$, $|\lambda_{12}(a)| < 1$,

3) $|\lambda_{22}(a)| < 1$ при $a_0 < a < a_2 = 3s^2$ и $\lambda_{22}(a) < -1$ и монотонно убывает при возрастании $a > a_2$.

Следовательно,

1) $\lambda_{31}(a) = r\lambda_{11} > r$ и, монотонно возрастая с увеличением параметра a, становится больше 1 при $a > a_1$;

2) $|\lambda_{41}(a)| = r|\lambda_{21}(a)| < r < 1$; $|\lambda_{32}(a)| = r|\lambda_{12}(a)| < r < 1$;

3) если $a_0 < a < a_2$, то $|\lambda_{42}(a)| = r|\lambda_{22}(a)| < r < 1$;

если $a > a_2$, то функция $\lambda_{42}(a)$ монотонно убывает и ее значение принадлежит интервалу $(-1, -r)$ при $a_2 < a < a_3$ и становится меньше -1 при $a > a_3$. Таким образом,

$$
\begin{array}{lll}
1) & \text{при } a_0 < a < a_1 & \\
 & |\lambda_{11}(a)| > 1,\ |\lambda_{j1}(a)| < 1,\ j = 2,\ 3,\ 4 & \Rightarrow \quad M_1 \in S_{3,1}; \\
2) & \text{при } a > a_1 & \\
 & |\lambda_{j1}(a)| > 1,\ j = 1,\ 3,\ |\lambda_{j1}(a)| < 1,\ j = 2,\ 4 & \Rightarrow \quad M_1 \in S_{2,2}; \\
3) & \text{при } a_0 < a < a_2 & \\
 & |\lambda_{j2}(a)| < 1,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4 & \Rightarrow \quad M_2 \in S_{4,0}; \\
4) & \text{при } a_2 < a < a_3 & \\
 & |\lambda_{j2}(a)| < 1,\ j = 1,\ 3,\ 4,\ |\lambda_{22}(a)| > 1 & \Rightarrow \quad M_2 \in S_{3,1}; \\
5) & \text{при } a > a_3 & \\
 & |\lambda_{j2}(a)| < 1,\ j = 1,\ 3,\ |\lambda_{j2}(a)| > 1,\ j = 2,\ 4 & \Rightarrow \quad M_2 \in S_{2,2}.
\end{array}
$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Для точек M_3, M_3^* при $0 < |b| < 1$ выполняются следующие утверждения:*

1) *если $a_1 < a < a_4$, то M_3, $M_3^* \in S_{3,1}$,*

2) *если $a > a_4$, то M_3, $M_3^* \in S_{2,2}$, где $a_4 = 3s^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для неподвижных точек M_3 и M_3^* характеристическое уравнение задается равенством

$$(\lambda^2 - A\lambda + br)(\lambda^2 - B\lambda + br) = 0,$$

в котором

$$A = p(1 + r) + \sqrt{(p^2 - b)(1 - r)^2 + 4rm_3^2},$$

$$B = p(1 + r) - \sqrt{(p^2 - b)(1 - r)^2 + 4rm_3^2},$$

$$p = \frac{1}{2r}(1 + br^2), \quad m_3 = \sqrt{a + 2sp - p^2}.$$

Собственные числа для точек M_3 и M_3^* будут совпадать и иметь вид:

$$\lambda_{13} = \lambda_{14} = \mu_1(a), \qquad \lambda_{43} = \lambda_{44} = \mu_4(a),$$

где

$$\mu_1(a) = \frac{1}{2}(A + \sqrt{D^+}),\ \mu_4(a) = \frac{1}{2}(A - \sqrt{D^+}).$$

$$\lambda_{23} = \lambda_{24} = \mu_2(a), \quad \lambda_{33} = \lambda_{34} = \mu_3(a),$$

$$\mu_2(a) = \frac{1}{2}(B + \sqrt{D^-}),\ \mu_3(a) = \frac{1}{2}(B - \sqrt{D^-}),$$

при этом $D^+ = A^2 - 4br, \quad D^- = B^2 - 4br.$

Сумма корней уравнения $\lambda^2 - A\lambda + br = 0$ равна A, положительна (так как $p > 0$) и возрастает при росте параметра a, а произведение остается постоянным и меньшим единицы по модулю. При этом очевидно, что возрастает $\mu_1(a)$, т. е. $\mu_1(a) > \mu_1(a_1) = 1/r$, а $\mu_4(a) \to 0$, при $a \to +\infty$.

Сумма корней уравнения $\lambda^2 - B\lambda + br = 0$, равная B, убывает при росте параметра a, а произведение остается постоянным и меньшим единицы по модулю.

Если собственные числа $\mu_2(a)$ и μ_3 комплексны (это возможно только при $a_1 < a < a_4$), то $|\mu_2(a)| = |\mu_3(a)| = |br| < 1$. Если они действительны, то при $a > a_4$ функция $\mu_2(a)$ монотонно убывает при $a \to +\infty$, а $\mu_3(a) \to 0$ с ростом параметра a. Следовательно,
1) при $a_1 < a < a_4$

$$|\mu_1(a)| > 1, \quad |\mu_i(a)| < 1\,(i = 2,\,3,\,4) \;\Rightarrow\; M_3,\, M_3^* \in S_{3,1},$$

2) при $a > a_4$

$$|\mu_i(a)| > 1\,(i = 1,\,2)\,|\mu_i(a)| > 1\,(i = 3,\,4) \;\Rightarrow\; M_3,\, M_3^* \in S_{2,2}.$$

Теорема доказана.

5. Характеристика первых бифуркаций неподвижных точек

Напомним, что в разделе 3 были введены следующие величины:

$$s = \frac{1}{2}(b+1) \ \text{ и } p = \frac{1}{2r}(1 + br^2).$$

Заметим, что $p > s > 0$.

Т е о р е м а 3. *Первые бифуркации неподвижных точек полного отображения $H(z, w)$ при $0 < |b| < 1$ происходят при следующих значениях параметра a :*

1) $a = a_0 = -s^2$ — *"складка"*,

2) $a = a_1 = p^2 - 2sp$ — *"вилка"*,

3) $a_2 = 3s^2$, $a_3 = p^2 + 2sp$, $a_4 = 3p^2$ — *"удвоение периода"*.

З а м е ч а н и е. При выполнении условия $a_4 = 3p^2$ происходит бифуркация как для внедиагональных (симметричных) неподвижных точек, так и для одной из двупериодических орбит.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Первое утверждение теоремы является простым следствием предложения 2 и свойств 1.4, 2.3, так как точки M_1, M_2 лежат на главной диагонали.

2) По предложению 2 координаты неподвижных точек M_1, M_3, M_3^* равны: $M_1 = (m_1, m_1, 0, 0)$, $m_1 = -s - \sqrt{a + s^2}$, $M_3 = (-p, -p, m_3, m_3)$, $M_3^* = (-p, -p, -m_3, -m_3)$, $m_3 = \sqrt{a - a_1}$ и, если выполняется условие $a_0 < a < a_1$, то неподвижных точек M_3, M_3^* нет. Когда $a = a_1$ точки M_1, M_3 и M_3^* совпадают, потому что $m_1 = -s - \sqrt{p^2 - 2sp + s^2} = -p$ и $m_3 = 0$. При этом $\lambda_{31}(a_1) = 1$. Предположим, что выполнено условие $a > a_1$. Следовательно, если $a \to a_1$, то $M_3 \to M_1$ и $M_3^* \to M_1$. Тогда, в точке M_1 при $a = a_1$ происходит бифуркация "вилка".

3) Запишем систему уравнений для нахождения координат двупериодических точек. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= a - bx - y^2 - v^2, \\ y &= a - by - x^2 - u^2, \\ u &= -2ryv - br^2u, \\ v &= -2rxu - br^2v. \end{aligned} \tag{7}$$

Упрощая ее, получаем два возможных варианта:

$$\begin{aligned} x^2 + 2sy &= a, \\ y &= 1 - x, \\ u &= 0, \\ v &= 0 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} (x^2 - p^2)(x^4 - (a - p^2)x^2 + p^4) &= 0, \\ xy &= p^2, \\ u^2 &= a - 2sy - x^2, \\ pv &= -xu. \end{aligned} \tag{8}$$

а) Пусть $u = v = 0$, $a > a_2$. Это соответствует координатам двупериодической орбиты N_1, N_2, лежащей на главной диагонали, с координатами

$$N_1 = (n_1, -n_2, 0, 0), \quad N_2 = (-n_1, n_2, 0, 0),$$

где $n_1 = \frac{1}{2}(s + \sqrt{a - a_2})$, $\quad n_2 = \frac{1}{2}(s - \sqrt{a - a_2})$.

Если $a \to a_2$, то $n_i \to s$, $i = 1, 2$. При $a = a_2$ координаты неподвижной точки $M_2 = (m_2, m_2, 0, 0)$ равны $(s, s, 0, 0)$, так как

$$m_2 = -s + \sqrt{a + s^2} = -s + \sqrt{4s^2} = s.$$

Следовательно, $N_i \to M_2$, $i = 1, 2$, когда $a \to a_2$. Если $a = a_2$, то $N_1 = N_2 = M_2$, при этом $\lambda_{22}(a_2) = -1$. Для значений параметра a, меньших a_0, действительных точек N_1, N_2 не существует. Следовательно, в точке M_2 при $a = a_2$ происходит бифуркация "удвоения периода".

b) Вторая группа равенств (8) представляет собой совокупность двух систем уравнений, которые, учитывая координаты неподвижных точек и двупериодической орбиты N_1, N_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} &x = p, \\ &y = p, \\ &u^2 = a - 2sp - p^2, \\ &v = -u \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} &x^4 - (a - p^2)x^2 + p^4 = 0, \\ &xy = p^2, \\ &u^2 = a - 2sy - x^2, \\ &pv = -xu. \end{aligned} \tag{9}$$

Если $a < a_3$, то первая система равенств (9) не имеет действительных решений. Если $x = y = p$, $a > a_3$, то находим координаты точек

$$N_3 = (p, p, n_3, -n_3), \qquad N_3^* = (p, p, -n_3, n_3),$$

где $n_3 = \sqrt{a - 2sp - p^2} = \sqrt{a - a_3}$. Если $a \to a_3$, то $n_3 \to 0$. Неподвижная точка M_2 при $a = a_3$ имеет координаты $(p, p, 0, 0)$. Тогда точки M_2 и N_3, N_3^* сливаются, при этом собственное число $\lambda_{42}(a_3) = -1$. Иными словами, в точке M_2 при $a = a_3$ происходит бифуркация "удвоения периода".

c) Запишем уравнение $x^4 - (a - p^2)x^2 + p^4 = 0$ из (9) в виде $x^4 - 2p^2x^2 + p^4 - (a - 3p^2)x^2 = 0$. Введя обозначение $t = \sqrt{a - a_4} = \sqrt{a - 3p^2}$, приходим к равенству

$$(x^2 + tx - p^2)(x^2 - tx - p^2) = 0,$$

используя решения которого, получаем координаты двупериодических точек $K_i = (k_{1i}, k_{2i}, k_{3i}, k_{4i})$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$K_1\colon \begin{aligned} &k_{11} = g, \\ &k_{21} = f, \\ &k_{31} = \sqrt{a - 2sf - g^2}, \\ &k_{41} = -p^{-1}gk_{31}; \end{aligned} \qquad K_2\colon \begin{aligned} &k_{12} = f, \\ &k_{22} = g, \\ &k_{32} = \sqrt{a - 2sg - f^2}, \\ &k_{42} = -p^{-1}fk_{32}; \end{aligned}$$

$$K_3\colon \begin{aligned} &k_{13} = -g, \\ &k_{23} = -f, \\ &k_{33} = \sqrt{a + 2sf - g^2}, \\ &k_{43} = p^{-1}gk_{33}; \end{aligned} \qquad K_4\colon \begin{aligned} &k_{14} = -f, \\ &k_{24} = -g, \\ &k_{34} = \sqrt{a + 2sg - f^2}, \\ &k_{44} = p^{-1}fk_{34}, \end{aligned}$$

где

$$f = \frac{1}{2}(t - \sqrt{d}),\ g = \frac{1}{2}(-t - \sqrt{d}),$$
$$d = t^2 + 4p^2,\ t = \sqrt{a - a_4}.$$

Из этих равенств естественным образом находятся координаты симметричных точек K_i^*, $i = 1, 2, 3, 4$. Отметим очевидный факт: если $a < a_4$, то полное отображение H не имеет двупериодических точек K_i и K_i^*, $i = 1, 2, 3, 4$, так как $t^2 < 0$. Предположим, что $a \geq a_4$, и рассмотрим поведение точек K_1 и K_2 при $a \to a_4$. Так как при этом условии $t \to 0$ и $d \to 2p^2$, то f, g стремятся к $-p$. Тогда $K_i \to M_3$, $i = 1, 2$ (напомним, что $M_3 = (-p, -p, m_3, m_3)$, где $m_3 = \sqrt{a + 2sp - p^2}$). При $a = a_4$ точки M_3 и K_1, K_2 совпадают, при этом μ_2 равно -1, т. е. в точке M_3 при $a = a_4$ происходит бифуркация "удвоения периода". Аналогично ведут себя точки K_1^*, K_2^* и M_3^*.

d) Рассмотрим поведение точек N_3, K_3 и K_4 при выполнении условия $a \geq a_4$. Если $a \to a_4$, то, как показано выше, f и g стремятся к $-p$. Это эквивалентно тому, что K_3, K_4 сходятся к двупериодической точке N_3, координаты которой равны (p, p, n_3, n_3), где $n_3 = \sqrt{a - 2sp - p^2}$. При $a = a_4$ точки N_3, K_3 и K_4 сливаются. Аналогичным образом ведут себя точки N_3^*, K_3^*, K_4^*. Следовательно, в точках N_3, N_3^* при $a = a_4$ происходят бифуркации.

З а м е ч а н и е. Обратим внимание на то, что в случае d) после бифуркации возникают две двупериодические орбиты, а не одна четырехпериодическая.

На диаграмме изображены следующие кривые при значениях параметров:

$$a_0 = -s^2,\ a_1 = p^2 - 2sp,\ a_2 = 3s^2,\ a_3 = p^2 + 2sp,\ a_4 = 3p^2.$$

Области существования неподвижных точек и двупериодических орбит обозначены $I - VII$. В регионе, обозначенном I ($a < a_0$), периодических точек нет.

Неподвижные точки M_1, M_2 существуют в областях $II - VII$, при этом $M_1 \in S_{3,1}$ в областях II, IV, т. е. $a_0 < a < a_1$, и $M_1 \in S_{2,2}$ в областях III, $V - VII$, соответствующих значениям параметров $a > a_1$; $M_1 \in S_{4,0}$ в областях II, III ($a_0 < a < a_2$), $M_2 \in S_{3,1}$ в областях IV, V, ограниченных кривыми $a > a_2$, $p > a_3$, $M_2 \in S_{2,2}$ в регионах VI, VII, когда $p > s$, $a > a_3$.

Неподвижные точки M_3, M_3^* существуют в областях III, $V - VII$, и принадлежат классу $S_{3,1}$ в III, V, VI и классу $S_{2,2}$ в VII.

Двупериодическая орбита N_3, N_3^* существует в областях VI, VII.
Двупериодические точки K_i, K_i^*, $i = 1, 2, 3, 4$ существуют в области VII.

Рис. 1. Диаграмма первых бифуркаций.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ: программа поддержки ведущих научных школ (грант 96–15–96209), кроме того, автор поддержан Правительством Санкт-Петербурга (персональный грант 97–2. 1 к–523 для студентов, аспирантов и молодых ученых). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2. 1–326. 53).

Список литературы

1. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys., 1976. **50**. P. 69–77.

2. *Kaneko K.* Transition from torus to chaos accompanied by frequency lockings with simmetry breaking // Prog. Theor. Phis., 1983. **69**, N 5. P. 1427–1435.

3. *Kaneko K.* Oscillation and doubling of torus // Prog. Theor. Phis., 1984. **72**, N 2. P. 202–215.

4. *Gyllenberg M., Söderbacka G., Ericsson S.* Does migration stabilize local population dynamics? Analysis of a discrete metapopulation model // Math. Biosci., 1993. **118**. P. 25–49.

5. *Devanye R. L.* An introduction to chaotic dynamical system. Addison-

Wesley comp., 1989.

6. *Thompson J. M. T., Stewart H. B.* A tutorial glossary of geometrical dynamics // Int. J. Bifurcation and Chaos, 1993. **3**, N 2. P. 223–239.

7. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М., "Мир", 1975.