ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория нелинейных колебаний

УДК 517.938

А. С. Бойцов [1]

БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА МАТЬЕ–ДУФФИНГА

Введение. Здесь мы рассматриваем первые бифуркации решений нелинейного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка типа Матье-Дуффинга вида

$$\ddot{x} + k\dot{x} + (1 + q\cos\omega t + x^2)x = 0 \tag{1}$$

для частного случая, когда параметры k, q, ω выбраны положительными и отличными от нуля. Оно может быть интерпретировано как уравнение колебаний осциллятора с внешним возбуждением и жестким нелинейным демпфированием.

Некоторые свойства колебаний, описываемых уравнением (1), приведены в работах [1–4]. В работе [1] рассматриваются субгармонические бифуркации и переход к хаосу в нелинейном уравнении Матье. В статье [2] изучалось явление стохастической синхронизации в цепи связанных автогенераторов, каждый из которых описывается этим уравнением. В статье [3] исследуется главный резонанс в уравнении (1), а также сравнивается использование методов усреднения и нормальных форм для приближенного вычисления амплитуды результирующих колебаний. Примером исследования нестационарного нелинейного уравнения того же класса может служить работа [4], где рассматриваются динамические бифуркации решений в зависимости от меняющегося со временем значения параметра.

[1] **Санкт-Петербургский государственный университет:** 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2. СПбГУ. Математико-механический факультет. Кафедра дифференциальных уравнений.

Рассмотрим динамику осциллятора, полагая $\omega = 2\pi, \quad k = 0.5$. Краткое описание динамики осциллятора при этих значениях параметров дано в работе [5]. Там же определяются первые четыре бифуркации решений относительно q. Здесь мы остановимся подробнее на этом вопросе.

Представим уравнение (1) в виде системы двух уравнений первого порядка относительно переменных x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 - (1 + q\cos\omega t + x_1^2)\, x_1\,, \end{aligned} \tag{2}$$

которая определена на множестве $G(t, x_1, x_2) = R \times R \times R$ и удовлетворяет на ней условиям существования и единственности решения.

1. Свойства линеаризованной системы. Динамика исследуемого осциллятора во многом определяется динамикой линеаризованного уравнения (1), представляющего собой уравнение Матье вида

$$\ddot{x} + k\dot{x} + (1 + q\cos\omega t)x = 0\,, \tag{3}$$

которому соответствует система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 - (1 + q\cos\omega t)x_1\,. \end{aligned} \tag{4}$$

При $k > 0, \quad \omega > 0$ тривиальное решение системы (4) неограниченно устойчиво, если выполняется условие

$$k^2 > 2\,(1 + q - \sqrt{1 + 2q})$$

или относительно q (для исследуемой области параметров):

$$q < k\left(\frac{k}{2} + 1\right).$$

Например, при значении параметра $k = 0.5$ интервалом неограниченной устойчивости является

$$0 < q < q^* \quad (q^* = 0.625)\,. \tag{5}$$

Вывод этих условий можно найти в [5]. Там же приводится пример определения условий устойчивости нулевого решения для уравнения (3) методом разложения решения в ряд по степеням параметра (теорию метода и его применение к уравнению Матье см. в книге [7]). Воспользовавшись результатами работ [5] и [7], запишем условия для первых двух областей неустойчивости нулевого решения уравнения (3):

$$1)\quad 1-\frac{1}{2}r+\frac{7}{32}r^2+\ldots\le\mu^2\le 1+\frac{1}{2}r-\frac{7}{32}r^2+\ldots,$$

$$2)\quad 4-\frac{1}{3}r^2+\ldots\le\mu^2\le 4+\frac{5}{3}r^2+\ldots,$$

где $\quad \mu^2=\dfrac{4-k^2}{\omega^2},\quad r=\dfrac{q}{1-k^2/4}.$

Эти оценки дают при рассматриваемых значениях ω и k следующие границы областей неустойчивости для параметра q:
1) для границы первой зоны $q \approx 3.2587$;
2) для границы второй зоны $q \approx 3.2088$.
Полученные значения близки к точке первой бифуркации нелинейной системы (2), о которой говорится в части 2.

2. Бифуркации решений. Рассмотрим первые бифуркации решений системы (2) в зависимости от величины параметра $q\ge 0$. Обозначим

$$q_0<q_1<q_2<q_3<q_4$$

точки первых пяти бифуркаций системы. Численно полученные бифуркационные диаграммы, которые иллюстрируют наличие устойчивых периодических решений в зависимости от параметра q, приведены на рис. 1.

Пусть α — фазовая плоскость системы (2). Определим отображение Пуанкаре как

$$\mathcal{P} : \alpha \mapsto \alpha, \quad \mathcal{P}(x_{10}, x_{20}) = \varphi(x_{10}, x_{20}, \tau),$$

где функция $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ задается решением системы (2) с начальными данными $t_0 = 0, \quad x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad \tau = 2\pi/\omega.$

При $0 \leq q < q_0$ отображение $\mathcal{P}$ имеет только одну неподвижную точку $x_1 = x_2 = 0$. Это решение является асимптотически устойчивым, и в указанной области параметра q данная точка в сечении Пуанкаре представляет собой устойчивый фокус. Тривиальное решение остается устойчивым и при $q \in [q_0, q_1)$, но при некотором значении $\tilde{q}_1 < q_1$ бифуркационного параметра изменяется тип соответствующей ему особой точки, она становится узлом.

Первая бифуркация системы является бифуркацией рождения двух седлоузловых двупериодических точек S^+ и S^-. Подобная бифуркация рассматривалась в работе [4] при исследовании динамической системы с медленно изменяющимся параметром. Неустойчивые сепаратрисы $W^u_{S^+}$ и $W^u_{S^-}$ входят в точку $O(0,0)$. Таким образом, начиная с $q = q_0 \approx 2.89$ у отображения $\mathcal{P}$ возможны периодические решения, отличные от тривиального.

При увеличении параметра q от значения q_0 из точек S^+ и S^- отщепляются две устойчивые двупериодические точки, соответственно, N^+ и N^- типа узел, которые при некотором значении параметра становятся фокусами. Сами точки S^+ и S^- характеризуются наличием устойчивых сепаратрис W^s_{S+1}, W^s_{S+2} и W^s_{S-1}, W^s_{S-2}, а также неустойчивых сепаратрис W^u_{S+1}, W^u_{S+2} и W^u_{S-1}, W^u_{S-2} (рис. 2). На интервале $q_0 < q < q_1$ система (2) имеет два двупериодических решения: одно устойчивое и одно неустойчивое, первое из которых определяется точками N^+ и N^-, а второе – точками S^+ и S^-. Сепаратрисы W^s_{S+1}, W^s_{S+2}, W^s_{S-1} и W^s_{S-2} делят плоскость α на области притяжения двупериодического (G_I и G_{III}) и тривиального (G_{II}) решения. Изменение значения q от q_0 до q_1 сопровождается смещением двупериодических точек друг относительно друга: седла приближаются к точке O, уменьшая ее область притяжения и, как следствие, увеличивая области притяжения устойчивого двупериодического решения. При $q = \tilde{q}_1 < q_1$, как уже говорилось, точка O становится узлом.

При $q = q_1$ происходит слияние точек S^+, S^- и O и бифуркация потери устойчивости тривиального решения. Вычисления дают значение $q_1 \approx 16.5$, при котором один из мультипликаторов, соответствующих тривиальному решению, переходит через единичную окружность в комплексной плоскости. Точка O становится седловой. Ее сепаратрисы W_1^u и W_2^u входят соответственно в устойчивые фокусы N^+ и N^-. Система (2) характеризуется наличием одного устойчивого двупериодического решения, определяемого точками N^+ и N^-, при неустойчивом нулевом решении на интервале $q_1 \leq q < q_2$. Рисунок 3 иллюстрирует описанную ситуацию и отражает состояние системы, предшествующее следующей бифуркации.

При $q = q_2 \approx 18.90$ двупериодическое решение претерпевает бифуркацию типа "вилка". Эта бифуркация сопровождается потерей устойчивости точек N^+ и N^- в сечении Пуанкаре и образованием четырех устойчивых двупериодических точек N_1^+, N_2^+, N_1^- и N_2^-. При $q_2 \leq q < q_3$ система имеет неустойчивое двупериодическое решение, определяемое точками N^+ и N^-, и два устойчивых двупериодических решения, определяемые: первое – точками N_1^+ и N_2^-, второе – точками N_1^- и N_2^+. Характерная ситуация показана на рис. 4.

При значении параметра $q = q_3 \approx 23.95$ точки N^+ и N^- вновь приобретают устойчивость (изменяется их тип) в результате второй бифуркации типа "вилка". В результате этой бифуркации в окрестностях этих точек появляются четыре седловых точки, которым соответствуют неустойчивые двупериодические решения. В интервале $q_3 \leq q < q_4$ у системы есть три устойчивых двупериодических решения и пара неустойчивых двупериодических решений при неустойчивом нулевом. Фазовый портрет, соответствующий значению параметра из этого интервала приведен на рис. 5.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ: программа поддержки ведущих научных школ (грант 96–15–96209), кроме того, автор поддержан Правительством Санкт-Петербурга (персональный грант 97–2. 1 к–1031 для студентов, аспирантов и молодых ученых). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2. 1–326. 53).

Список литературы

1. *Ito A.* Successive Subharmonic Bifurcations and Chaos in a Nonlinear Mathieu Equations // Progress Theor. Phys., 1979. V. 61, N 3. P. 815.

2. *Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Известия вузов. Радиофизика, 1986. Т. 29, N 9. С. 1050.

3. *Lamarque C. H., Stoffel A.* Parametric Resonance with Nonlinear Term: Comparison of Averaging and the Normal Form Method Using a Simple Example // Mech. Res. Comm., 1992. V. 19 (6). P. 495.

4. *Soliman M. S.* Dynamic bifurcations in non-stationary systems: transitions with an unpredictable outcome // Proc. R. Soc. Lond., 1995. A 451. P. 471.

5. *Бойцов А. С.* О некоторых свойствах нелинейного осциллятора типа Дуффинга в частном случае. — Деп. в ВИНИТИ (в печати). 1998.

6. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., Наука, 1972. 720 с.

7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966. 532 с.