ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ОБ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.Н.Кусюмов

Россия, 420111, Казань, ул. К.Маркса, д.10,
Казанский государственный технический университет им. А.Н.Туполева,
кафедра Аэрогидродинамики,
e-mail: sysroot@unc3.ksu.ras.ru

Аннотация

Рассматривается методика построения аналитических решений для систем уравнений в частных производных. Для построения решений используются интегральные кривые инфинитезимальных симметрий, допускаемых исходной системой уравнений.

1. Введение

Систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка представим в виде

$$F^k(x^i, u^j, u^j_i) = 0, (i = 1, \ldots, N; j, k = 1, \ldots, K), \tag{1}$$

где x^i, u^j – соответственно, независимые и зависимые переменные, u^j_i – производные u^j по x^i. Считается, что система уравнений (1) определена на некотором открытом подмножестве M декартового пространства R^N, т.е. $M \subset R^N$.

Следуя работе [1], систему уравнений (1) можно рассматривать как подмногообразие (поверхность) $\Sigma \subset J^1(\pi)$ в расслоении $\pi : E \longrightarrow M$, определяемое выражением

$$F^k(x^i, u^j, p_i^j) = 0, \tag{2}$$

Здесь $E = M \times R^K$ – тотальное пространство расслоения с координатами x^i, u^j, а x^i, u^j, p_i^j – рассматриваются как координаты в $J^1(\pi)$ – пространстве 1-джетов расслоения π. При этом, на тотальном пространстве $J^1(\pi)$ определено распределение Картана, которое задается набором 1-форм Картана

$$\Omega^j = du^j - \sum_{j=1}^{N} p_i^j dx^i. \tag{3}$$

Через $U_0 = (u^j(x^i))$ обозначим набор функций, определяющих решение системы уравнений (1), т.е. такое сечение расслоения π, что его график $\Gamma^1_{U_0}$ содержится в Σ.

Согласно [1], преобразованием Ли называется диффеоморфизм пространства джетов, сохраняющий распределение Картана. Классической (конечной) симметрией системы уравнений Σ называется такое преобразование Ли $A : J^1(\pi) \longrightarrow J^1(\pi)$, что $A(\Sigma) \subset \Sigma$. Классической инфинитезимальной симметрией уравнения Σ называется векторное поле Ли $\overline{X}$, касающееся Σ. При этом поле Ли $\overline{X}$, определенное в координатах пространства $J^1(\pi)$, является поднятием векторного поля Ли X, определенного в координатах пространства расслоения E.

Хорошо известно, что знание векторного поля X, определяющего инфинитезимальную симметрию уравнения, позволяет, в частности, ввести новые независимые переменные и получить систему уравнений с меньшим числом независимых переменных. Например, система с двумя независимыми переменными сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе предлагается методика использования векторного поля X, для построения однопараметрического решения – решения, определяемого интегральной кривой векторного поля, лежащей на интегральном многообразии системы уравнений.

2. Однопараметрическое решение вдоль векторного поля

Пусть $\overline{X}$ – инфинитезимальная симметрия уравнения Σ. В координатах пространства $J^1(\pi)$ векторное поле $\overline{X}$ можно записать в виде

$$\overline{X} = X + \zeta_i^j \frac{\partial}{\partial p_i^j}, \tag{4}$$

где

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}, \tag{5}$$

$\xi^i, \eta^j \in C^\infty(E), \zeta_i^j \in C^\infty(J^1(\pi))$.

Координаты ξ^i, η^j векторного поля X определяют однопараметрическую группу диффеоморфизмов A_t пространства E с параметром преобразования t. Интегральные кривые векторного поля X определяются в соответствии с выражениями [2]

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x,u); \frac{du^j}{dt} = \eta^j(x,u). \tag{6}$$

Решение системы уравнений (6) определяет семейство однопараметрических кривых

$$x^i = \varphi^i(t, x_0^i), u^j = \psi^j(t, u_0^j), \tag{7}$$

где $x_0^i, u_0^j = const$. При этом для функций φ^i, ψ^j выполняются условия

$$\varphi^i(0, x_0^i) = x_0^i, \psi^j(0, u_0^j) = u_0^i. \tag{8}$$

Покажем ниже, что среди интегральных кривых (7) векторного поля X будет иметься кривая, лежащая на интегральном многообразии системы Σ. Эта кривая определяет однопараметрическое (x^i, u^j – функции параметра t) решение системы уравнений (1).

Выразим параметр преобразования t через одну из координат базы M, используя соотношения (7). Пусть, например,

$$t = \varphi_*^i(x^1, x_0^1), \tag{9}$$

где функция φ_*^1 является обратной к φ^1. Подставляя это выражение в (7), имеем семейство кривых на базе M, заданных выражениями

$$x^i = \overline{\varphi}^i(x^1, x_0^1, x_0^i)(i = 2, \dots, N), \tag{10}$$

где функции $\overline{\varphi}^i$ получаются при подстановке (7) в (9). Подстановка выражения для параметра t в функции ψ^j определяет семейство Γ^1_U графиков функций вдоль кривых (10) на пространстве расслоения E:

$$u^j = \overline{\psi}^j(x^1, x^1_0, u^j_0). \tag{11}$$

Теорема. Для заданной точки $x^i_0 \subset M$ и инфинитезимальной симметрии $\overline{X}$ уравнения Σ существует график $\Gamma^1_{U_0} \in \Gamma^1_U$ такой, что $\Gamma^1_{U_0} \in \Sigma$. При этом график $\Gamma^1_{U_0}$ является интегральной кривой векторного поля $\overline{X}$.

Для доказательства заметим, что векторное поле $\overline{X}$ касается Σ поскольку является инфинитезимальной симметрией для Σ. Кроме того, векторное поле $\overline{X}$ является касательным для семейства графиков функций Γ^1_U (в соответствии с определением интегральных кривых векторного поля). Поэтому для того, чтобы показать, что существует график $\Gamma^1_{U_0}$ принадлежащий поверхности Σ, необходимо доказать, что в семействе графиков Γ^1_U существует график, имеющий хотя бы одну общую точку с поверхностью Σ. Найдем такой график для заданного векторного поля $\overline{X}$. Для этого отметим, что каждое решение системы уравнений Σ, при заданных x^i_0, определяет некоторую точку в пространстве R^K. Совокупность таких точек будет подмножеством $P \subset R^K$. Если точка $x^i_0 \in M$ не является особой для уравнения Σ, то она вполне однозначно определяет точку касания J_0 векторным полем $\overline{X}$ поверхности Σ (где $J_0 \subset J^1(\pi)$). Эта точка касания в свою очередь определяет некоторую точку u^j_0 в R^K, принадлежащую P. Выбирая u^j_0 в качестве значений, определяющих начальную точку для графика $\Gamma^1_{U_0}$, тем самым мы имеем что J_0 и будет являться искомой общей точкой для $\Gamma^1_{U_0}$ и Σ. Теорема доказана.

Таким образом, если в некоторой точке x^i_0 определены значения $u^j_0 \subset P$, то зависимости (10), (11) будут определять однопараметрическое решение системы уравнений Σ. Решение подобного вида будем называть однопараметрическим решением вдоль векторного поля X или просто решением вдоль векторного поля X.

Каждое однопараметрическое решение, определяемое векторным полем X и проходящее через точку x^i_0, u^j_0, касается интегрального многообразия системы уравнений Σ, проходящего через эту точку. Это интегральное многообразие определяется некоторым набором начальных и граничных условий. Восстановить эти начальные и граничные условия для всей области определения системы уравнений Σ нельзя, поскольку однопараметрическое решение определено только вдоль кривой, проходящей через точку

x_0^i. Однако, мы можем использовать производные зависимых переменных вдоль траектории (10) для "восстановления" начальных и граничных условий. Для нахождения этих производных используем следующий прием.

Запишем выражения (7) в виде

$$\tilde{x}^i(x^i, x_0^i) = \tilde{\varphi}^i(t),\ \tilde{u}^j(u^j, u_0^j) = \tilde{\psi}^i(t). \tag{12}$$

Определим некоторые функции $f^j(\tilde{x}^i)$ следующим образом

$$\tilde{\psi}^j(t) = f^j(\tilde{x}^i). \tag{13}$$

При этом потребуем, чтобы функции $f^j(\tilde{x}^i)$ удовлетворяли дифференциальным следствиям из соотношений (13), полученным дифференцированием по параметру t. Тогда выражениям (7) можно придать вид

$$x^i = \varphi(t, x_0^i),\ u^j = u^j(\tilde{x}^i, u_0^j) = \hat{\psi}^j(x^i, x_0^i, u_0^j). \tag{14}$$

и эти выражения определяют решение системы уравнений (1) вдоль векторного поля X.

Функции $f^j(\tilde{x}^i)$ (которые будем называть далее "определяющими") и функции $\hat{\psi}^j(x^i, x_0^i, u_0^j)$ определяются неоднозначно. Ограничения на их вид получатся после подстановки выражений (14) в уравнения (1). Отметим (это будет видно из примера), что при $N = 2$ после подстановки в (1) вид функций $\hat{\psi}^j(x^i, x_0^i, u_0^j)$ становится однозначным. При $N > 2$ в выборе функций $\hat{\psi}^j(x^i, x_0^i, u_0^j)$ будет иметься некоторый произвол, определяющий произвол в граничных условиях. Этот произвол имеет место, очевидно, вследствие того, что при $N > 2$ через точку x_0^i, u_0^j проходит не одно интегральное многообразие системы Σ, которому будет принадлежать кривая (14). Дифференцируя функции (14) по переменным x^i можно определить производные зависимых переменных в различных точках траектории (14).

Используя значения этих производных можно "приближенно восстановить" граничные условия в окрестности точки x_0^i (локально). После этого можно делать качественную оценку поведения решений системы уравнений. Кроме того, по восстановленным граничным и начальным условиям можно взять новую начальную точку $\overline{x}_0^i, \overline{u}_0^j$, отойдя от точки x_0^i, u_0^j и затем опять построить однопараметрическое решение.

3. Примеры построения однопараметрических решений

В качестве примера рассмотрим простейшее уравнение волнового типа

$$u_t + uu_x = 0. \tag{15}$$

Алгебра инфинитезимальных симметрий этого уравнения хорошо известна и приводится, например в [2]. Кроме того, для данного уравнения можно достаточно легко найти точные решения, используя их затем для проверки методики.

1. Для построения однопараметрического решения выберем векторное поле

$$X = u\frac{\partial}{\partial u} - t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}.$$

Функции (7) для данного векторного поля примут вид

$$u = u_0 \exp(a);\ t = t_0 \exp(-a);\ x = x_0 + a. \tag{16}$$

где a – параметр преобразования, u_0, t_0, x_0 – константы. Выражения (12) в данном случае будут иметь вид

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_0} = \exp(a);\ \tilde{t} = \frac{t}{t_0} = \exp(-a);\ \tilde{x} = x - x_0 = a, \tag{17}$$

откуда

$$\exp(a) = f(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Определяющая функция f находится с учетом записанных выше соотношений неоднозначно. Продифференцируем ее по параметру преобразования a. Получим, что функция f должна удовлетворять следующему уравнению

$$f = f_{\tilde{x}}\,\tilde{x}_a + f_{\tilde{t}}\,\tilde{t}_a,$$

или

$$f = f_{\tilde{x}} - f_{\tilde{t}}\,\tilde{t}_a.$$

Решение данного уравнения можно записать в виде

$$f = \exp(k\tilde{x})\tilde{t}^{\,k-1},$$

откуда

$$u = u_0 \exp[k(x - x_0)] \left(\frac{t}{t_0}\right)^{k-1}. \tag{18}$$

Подстановка этого выражения в (15) с учетом (17) дает следующее выражение для коэффициента k

$$k = \frac{1}{1 + t_0 u_0}. \tag{19}$$

Таким образом вид выражения для $u(x, t, x_0, t_0, u_0)$ определяется точкой x_0, t_0, u_0 вполне однозначно. Решение (18) вообще говоря имеет место только вдоль кривой (17). Для того, чтобы выяснить какому начальному $u(x, t_0)$ и граничному $u(x_0, t)$ условиям оно соответствует, можно определить производные вдоль траектории

$$u_x = ku;\ u_t = (k - 1)u/t.$$

С учетом этого при малых значениях $\delta x = x - x_0,\ \delta t = t - t_0$ имеем

$$u(x, t_0) \simeq u_0(1 + k\delta x);\ u(x_0, t) \simeq u_0(1 + (k - 1)\delta t/t_0). \tag{20}$$

Таким образом, решение (18), проходящее через точку u_0, x_0, t_0, соответствует граничным условиям (20) в окрестности данной точки.

Для проверки предложенной методики необходимо сравнить решение найденное решение (18), с граничными условиями (20) с решением проходящим через точку u_0, x_0, t_0, полученным другим способом.

Для этого построим инвариантное решение, соответствующее рассматриваемой симметрии по методике, изложенной, например в [2]. В соответствии с этой методикой положим

$$\eta = t \exp(x);\ u(x, t) = g(\eta)/t,$$

где функция $g(\eta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\eta(1 + g)\frac{dg}{d\eta} = g.$$

Решение этого уравнения дает следующее выражение

$$u \exp(ut) = c \exp(x), \tag{21}$$

где c – произвольная константа. Зададим константу c таким образом, чтобы $u = u_0$ в точке $x = x_0, t = t_0$:

$$c = u_0 \exp(u_0 t_0 - x_0). \tag{22}$$

Отметим, что используя полученное решение, не удается представить u виде аналитической функции от t, x. Поэтому по виду полученного решения мы не можем судить каким начальным и граничным условиям оно соответствует (граничные условия надо “восстанавливать”).

Определим теперь из выражения (21) $u(x, t_0)$ и $u(x_0, t)$ при малых $\delta x, \delta t$. При $x = x_0$ имеем

$$u = u_0 \exp(u_0 t_0 - ut) \simeq u_0(1 - ut + u_0 t_0),$$

откуда

$$u(x_0, t) \simeq u_0 \left(1 - \frac{u_0 \delta t}{1 + u_0 t_0}\right) = u_0 \left(1 + (k-1)\frac{\delta t}{t_0}\right),$$

где k определяется формулой (19).

Аналогично можно определить

$$u(x, t_0) \simeq u_0 \left(1 + \frac{\delta x}{1 + u_0 t_0}\right) = u_0(1 + k\delta x).$$

Таким образом мы получили выражения совпадающие с (20) при малых $\delta x, \delta t$ с точностью до членов второго порядка малости.

Мы можем сравнить также результаты расчетов $u(x, t_0)$ в какой-нибудь точке x, соответственно, по формулам (20) (или прямо по формуле (18)) и по формуле (21). Для этого положим, что однопараметрическое решение проходит, например, через точку $x_0 = 1, t_0 = 1, u_0 = 1$, для которой $c = 1$. Определим значение u в точке $x = 2, t_0 = 1$. Из формулы (21) находим, что $u(2, 1) \simeq 1,5574$.

Получим теперь значение $u(2, 1)$ по формуле (18). Решение будем получать “отходя” от точки $x_0 = 1, t_0 = 1$ в несколько шагов. Технология вычисления следующая: вычисляем $u(x_0 + \delta x, t_0)$ по формуле (18). Полученную точку принимаем за новую начальную точку ${x_0}', t_0 = 1, {u_0}'$ и снова повторяем вычисления.

При $\delta x = 1$ (один шаг) имеем $u(2, 1) \simeq 1,648$; при $\delta x = 0,5$ (два шага) $u(2, 1) \simeq 1,597$; при $\delta x = 0,333$ $u(2, 1) \simeq 1,584$; при $\delta x = 0,1$ $u(2, 1) \simeq 1,5647$.

Анологично можно сравнить результаы расчетов $u(x_0, t)$ в точке t, соответственно, по формулам (20) (или (18)) и по формуле (21).

По формуле (21) находим, что $u(1,2) \simeq 0,6874$. По формуле (18) при $\delta t = 1$ (один шаг) имеем $u(1,2) \simeq 0,707$; при $\delta t = 0,5$ имеем $u(1,2) \simeq 0,696$; при $\delta t = 0,333$ имеем $u(1,2) \simeq 0,69$; при $\delta t = 0,1$ имеем $u(1,2) \simeq 0,68923$.

Таким образом, мы имеем, что при $\delta x \to 0$, $\delta t \to 0$ значения u, вычисленные по формуле (18), стремятся к точным значениям, вычисленным по формуле (21).

2. Рассмотрим теперь однопараметрическое решение вдоль векторного поля

$$X = u\frac{\partial}{\partial u} - (\alpha - 1)t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x}.$$

где $\alpha = \text{const}$.

Функции (7) для данного векторного поля примут вид

$$u = u_0 \exp(a);\ t = t_0 \exp((\alpha - 1)a);\ x = x_0 \exp(\alpha a). \tag{23}$$

Определяющая функция f в данном случае имеет вид

$$f = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{k/\alpha} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(1-k)/(\alpha-1)},$$

откуда

$$u = u_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{k/\alpha} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(1-k)/(\alpha-1)}. \tag{24}$$

Подстановка этого выражения в (15) дает

$$k = \left(1 - \frac{(\alpha - 1)u_0 t_0}{\alpha x_0}\right)^{-1}.$$

Определим теперь инвариантное решение для данного векторного поля. Положим

$$u = x^{1/\alpha} g(\eta),\ \eta = x^{-\alpha/(\alpha-1)}.$$

где для $g(\eta)$ имеем уравнение

$$\left(\eta g - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\eta^{(2\alpha-1)/\alpha}\right)\frac{dg}{d\eta} + \frac{g^2}{\alpha} = 0.$$

Определить решение данного уравнения при произвольном α не удается. Поэтому положим $\alpha = 1/2$. В этом случае имеем решение

$$g = \frac{1}{\eta};\ u = \frac{x}{t}.$$

Пусть $u = u_0$ при $x = x_0, t = t_0$. Тогда

$$u_0 = \frac{x_0}{t_0}.$$

Сравним это решение с тем, что получается из (24). При

$$u_0 = \frac{x_0}{t_0}$$

имеем $k = \alpha$, откуда

$$u = u_0 \frac{x}{x_0} \frac{t_0}{t} = \frac{x}{t}.$$

Таким образом, для данного векторного поля при выборе

$$u_0 = \frac{x_0}{t_0}$$

однопараметрическое решение совпадает с инвариантным решением.

3. Выберем теперь векторное поле

$$X = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}.$$

Инвариантное решение для данного векторного поля иммет вид

$$u = t + \sqrt{c + t^2 - 2x},$$

где $c = const$. Если положить $u = u_0$ при $x = x_0, t = t_0$ то

$$u = t + \sqrt{u_0^2 - 2t_0u_0 + 2x_0 + t^2 - 2x}. \tag{25}$$

Найдем теперь определяющую функцию. Функции (7) для данного векторного поля примут вид

$$u = u_0 + a;\ t = t_0 + a;\ x = x_0 + at_0 + a^2/2, \tag{26}$$

откуда

$$\tilde{u} = u - u_0 = a;\ \tilde{t} = t - t_0 = a;\ \tilde{x} = x - x_0 = a(t_0 + a/2).$$

Определяющая функция $f = \tilde{u} = u - u_0$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$1 = f_{\tilde{x}}\, \tilde{x}_a + f_{\tilde{t}}\, \tilde{t}_a,$$

или

$$1 = f_{\tilde{t}} + f_{\tilde{x}}\, (\tilde{t} + t_0).$$

Решение данного уравнения можно записать в виде

$$f = t + c_3 + c_2(c_1 + t^2 - 2x + 2x_0)^n,$$

где c_3, c_2, c_1, n константы.

Покажем, что для рассматриваемого векторного поля определяющую функцию можно выбрать таким образом, что она совпадет с инвариантным решением (25). Для этого подставим определяющую функцию в уравнение (15) и учтем (26). Получим

$$n = 0,5;\; c_3 = -u_0;\; c_2 = 1;\; c_1 = {u_0}^2 - 2t_0u_0,$$

откуда получаем решение (25).

4. Заключение

Предложенный выше алгоритм построения однопараметрических решений позволяет находить решения только вдоль определенных кривых в пространстве независимых переменных. Однако, он имеет то преимущество, что его основная трудоемкая часть заключается в нахождении инфинитезимальных симметрий (векторных полей), допускаемых системой уравнений. Для большого количества встречающихся в приложениях уравнений инфинитезимальные симметрии уже известны. В этом случае задача построения однопараметрических решений сводится к нахождению конечных симметрий и определяющих функций по известным инфинитезимальным симметриям.

Отметим также, что методика данной работы может быть использована не только для уравнений первого порядка.

В заключение автору также хотелось бы выразить благодарность профессору Павлову В.Г. за консультации и замечания по работе.

Список литературы

[1] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. / Под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. – М.: Изд-во “Факториал”, 1997. – 464 с.

[2] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639с.