ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Прикладные задачи

К ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБХОДА НЕЛИНЕЙНЫМ УПРАВЛЯЕМЫМ ОБЪЕКТОМ СОВОКУПНОСТИ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И. БЕРДЫШЕВ

Аннотация.

Исследуется задача о последовательном обходе нелинейным управляемым объектом в предписанном порядке заданной совокупности гладких многообразий, перемещающихся в фазовом пространстве. Качество процесса оценивается суммой терминальных критериев, вычисляемых на этих многообразиях. Получены необходимые условия оптимальности управления движением нелинейного объекта и моментов сближения в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина, не использующие декомпозицию во времени. Здесь задача обхода не разбивается на ряд последовательно решаемых "двухточечных задач", а при выборе управления, реализующего переход от одной "цели"к другой, учитывается информация о всех последующих "целях", подлежащих обходу. [1]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00458) и конкурсного центра МО и ПО (грант по фундаментальным исследованиям в области авиационной и ракетно-космической техники).

1. Введение

Исследуется движение нелинейного управляемого объекта в n-мерном эвклидовом пространстве $X \stackrel{\triangle}{=} R^n$ на достаточно протяженном отрезке времени $T \stackrel{\triangle}{=} [t_0, \vartheta]$ [1, 2]. Предполагается заданной совокупность гладких $(n - k + 1)$ - мерных многообразий [1, стр. 71] $\{ \mathcal{M}_i \ (i \in \overline{1,m})\}$, перемещающихся в пространстве X. Каждое многообразие $\mathcal{M}_i$ из этой совокупности определяется уравнением $K_i(t, x) = 0, \quad i \in \overline{1,m}$. Здесь и далее: $k \in N, \ m \in N, \ n \in N$, где $N \stackrel{\triangle}{=} \{1, 2, ...\}$ — множество натуральных чисел, $\overline{1,m} \stackrel{\triangle}{=} \{i, \ i \in N, \ i \leq m\}$; $K_i : T \times X \to R^k \quad (i \in \overline{1,m})$ – непрерывно дифференцируемые (гладкие) по совокупности переменных функции; символ $\stackrel{\triangle}{=}$ означает равенство по определению. На векторный управляющий параметр u накладывается геометрическое ограничение: $u \in P$ $(P, \ P \subset R^r$, — компакт, $r \in N)$. Определяются классы допустимых управлений. Каждое управление $U \stackrel{\triangle}{=} (u(t), \ t \in T)$ из этого класса определяет движение объекта. Качество движения оценивается суммой терминальных критериев, вычисляемых на многообразиях. Задача состоит в построении управления U , обеспечивающего обход в указанном порядке совокупности многообразий многообразий $\{ \mathcal{M}_i \ (i \in \overline{1,m})\}$ и минимизирующего функционал качества. Задачи такого сорта весьма актуальны и возникают, например, при определении трассы самолета, имеющего своей целью в предписанном порядке пройти над заданными точками с минимумом затрат, либо при выборе маневра космического аппарата для сбора космического "мусора"в околоземном пространстве с минимальным расходом массы (энергоресурсов). В последней задаче "мусор"отождествляется с группой точек $\{ W^{(i)}(t), \quad i \in \overline{1,m}\}$, движущихся k - мерном пространстве R^k $(k < n)$ "геометрических координат". Каждая из этих точек в любой момент времени t принадлежит многообразию $\mathcal{M}_i$, определяемому системой скалярных уравнений $x_j - W_j^{(i)}(t) = 0, \quad j \in \overline{1,k}$, где $W_1^{(i)}(t), ...W_k^{(i)}(t)$ — координаты точки $W^{(i)}(t)$. Моменты сближения $t_i \ (i \in \overline{1,m})$ летательных аппаратов (ЛА) считаются заранее неизвестными и также, как и управление ЛА, подлежат определению. При этом предполагается, что $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m \leq \vartheta$. Свобода выбора (в моменты сближения) координат управляемого объекта, не являющихся геометрическими, а в общем случае и самих точек $W_i \in \mathcal{M}_i \ (i \in \overline{1,m})$, в которых происходит сближение, препятствует декомпозиции рассматриваемой задачи с m целевыми многообразиями на m последовательно решаемых задач о переводе объекта с одного многообразия на другое. Последние далее будем называть "двухточечными"задачами. Именно, наличие не одной, а нескольких целевых поверхностей является отличительной чертой данной задачи от классических задач оптимального управления [1]–[4]. Поэтому предлагаемый здесь принцип максимума, действующий на каждом отрезке времени $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m-1$, учитывает информацию не только о многообразиях $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}_{i+1}$, но и о последующих многообразиях $\mathcal{M}_{i+2}, ..., \mathcal{M}_m$, подлежащих "обслуживанию". Он зачастую позволяет существенно уменьшить те затраты энергоресурсов, которые возникают при декомпозиции задачи на m "двухточечных"задач. Приведенные в следующем и последнем пунктах примерах с "тележкой"[10, стр. 11], а также с простейшей моделью движения самолета в задаче обхода двух точек подтверждает это высказывание. Уменьшение "затрат"происходит потому, что за счет "небольшой потери"ресурсов на первом участке траектории создаются более "хорошие"начальные условия для прохождения заключительного участка траектории.

Идейной основой данной работы является общий принцип двойственности, установленный Н.Н. Красовским и сформулированным им в терминах проблемы моментов [2, гл. 5]. Использование этого принципа позволило построить эффективные методы решения линейных задач управления. Суть методов состоит (см.[5]) в сведении задач минимизации в функциональном (бесконечномерном) пространстве к задачам максимизации в конечномерном векторном пространстве, доставляющим оптимум исходным задачам и краевые условия принципа максимума Л.С.Понтрягина. Отметим в этом направлении исследования [6, 7], относящиеся к задачам управления при стесненных фазовых координатах.

В настоящей работе исследуется общий случай нелинейной управляемой системы. Поэтому с целью исчерпывающего решения проблемы существования оптимального управления используется аппарат теории расширений [3], [8]–[16] в классе регулярных борелевских мер, которые согласно теоремы Рисса, определяют представление пространства, топологически сопряженного к пространству непрерывных функций на компакте в конечномерном (в данном случае) пространстве. По сути дела такая же процедура применяется в [3] и в несколько более общей ситуации, где вместо упомянутого пространства непрерывных функций может использоваться пространство функций Каратеодори [3, стр.212]. Существо данной конструкции расширения связано с компактификацией пространства управлений посредством перехода от обычных управлений — измеримых по Борелю функций к обобщенным программным управлениям и замене правой части дифференциального уравнения, описывающего движение объекта, интегралом по нормированной борелевской мере на множестве P [8, стр. 36]. Следует отметить, что конструкции расширения получили большое развитие в работах Н.Н.Красовского [9]–[11], его учеников [12]–[15] и были широко использованы в конфликтно-управляемых задачах. Результаты именно этих авторов, а также [6, 7], применяются по существу при решении рассматриваемых задач.

К исследованиям, опирающимся на вышеупомянутый принцип двойственности Н.Н.Красовского, следует отнести и работы [17]–[21]. В [17]–[21] построены эффективные методы решения задач минимизации система рассогласований между состоянием управляемого объекта в некоторые упорядоченные моменты времени $t_i, \;\; i \in \overline{1,m}$, (заданные или также, как и здесь, подлежащие определению) и точками (множествами) в пространстве геометрических координат R^k. При этом рассматриваются как геометрические [17], так и интегральные [18, 21] ограничения на управление. В [17] получено условие выравнивания — дополнительное необходимое условие оптимальности векторного параметра. В [20] указанное условие обобщено для случая нелинейных управляемых систем и сформулировано в терминах принципа максимума. Отметим, что в [17]–[20] исследуются задачи на безусловный экстремум. В данной работе, мы имеем дело с задачей на условный экстремум, т.к. здесь требуется "точное"прохождение через целевые точки, либо поверхности. Справиться с этой проблемой помогает изящный способ получения необходимых условий оптимальности для задач на условный экстремум, о переходе между двумя поверхностями, опубликованный в монографии [22]. В основе указанного способа лежат штрафные функции, позволяющие перейти к p-задачам (p — коэффициент штрафа) на безусловный экстремум, для последних при любом $p \in N$ сформулировать принцип максимума, а затем, используя асимптотические методы решения при $p \to \infty$, получить необходимые условия оптимальности для исходной задачи. Следует отметить, что асимптотические методы вычисления оптимального управления применялись и в более ранних работах, например, в [6, 7].

Теоретические результаты данной работы иллюстрируются на модельной задаче о сближении по геометрическим координатам материальной точки с совокупностью точек.

Заметим, что близкая по постановке задача рассматривалась в работах

[23, 24], при оптимизации, так называемых, ступенчатых систем.

2. Мотивирующий пример

На данном модельном примере иллюстрируется преимущество бездекомпозиционного подхода к решению задачи о последовательном сближении материальной точки (МТ) с двумя целевыми точками перед декомпозиционным методом решения. Рассмотрим тележку, движущуюся по оси Ox под действием силы F, которая ограничена по величине заданным числом (см. Рис.1). Как известно, движение центра тяжести тележки, называемое далее МТ, с использованием сжатия или растяжения времени и обозначения $x \stackrel{\triangle}{=} x_1$, может быть описано следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad | u | \leq 1. \tag{2.1}$$

Пусть в начальный момент времени $t_0 = o$ МТ находится в начале координат O оси Ox и имеет нулевую скорость. Кроме того, на оси Ox задана точка w, для определенности положим $w = 4$.

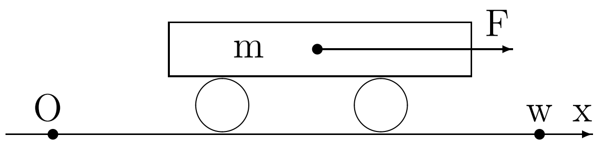

Рис. 1.

Задача состоит в наискорейшем переводе МТ из положения

$$(t_0 = 0, \quad x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0) \tag{2.2}$$

вначале в точку w, а затем обратно в начало координат. Таким образом, здесь имеются две целевые точки: w и начало координат O, в которых скорость МТ может принимать произвольное значение. Свобода выбора скорости МТ в целевых точках препятствует декомпозиции рассматриваемой задачи на две последовательно решаемые задачи, в первой из которых МТ наискорейшим образом переводится из позиции (2.2) в точку w, а во второй задаче — из позиции $(t_1, \ x_1(t_1) = w, \ x_2(t_1))$ в начало координат (t_1 — момент попадания МТ в точку $w = 4$; $x_2(t_1)$ — значение скорости в момент t_1). Действительно, для наискорейшего попадания в точку $w = 4$ необходимо положить $u(t) = 1,\ 0 \le t \le t_1$. Тогда $x_2(t) = t,\quad x(t) = t^2/2$. Поэтому $t_1 = 2\sqrt{2},\quad x_2(t_1) = 2\sqrt{2}$. Для наискорейшего попадания МТ из положения

$$t_1 = 2\sqrt{2},\quad x_2(t_1) = 4,\quad x_2(t_1) = 2\sqrt{2} \tag{2.3}$$

в начало координат, необходимо положить $u(t) = -1,\ t_1 \le t \le t_2$ (t_2 — момент попадания в начало координат). Поскольку при любом $t \in [t_1, t_2]$:

$$x_2(t) = x_2(t_1) - (t - t_1),\quad x_1(t) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(t - t_1) - (t - t_1)^2/2,$$

то из условия $x_1(t_2) = 0$ находим, что $t_2 = 4+4\sqrt{2}$. Теперь рассмотрим другой путь решения поставленной задачи. А,именно, при выборе управления на первом участке (от начала координат до точки w) будем учитывать, что далее МТ придется пройти второй участок (от точки w до начала координат). В связи с этим обстоятельством положим

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ 0 \le t < 2, \\ -1, & \text{если}\ \ 2 \le t \le t_2^* \end{cases} \tag{2.4}$$

(t_2^* — время попадания МТ в начало координат с использованием управления (2.4)). Движение, порожденное этим управлением, будем обозначать через $(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ t \ge 0)$. Тогда имеем

$$x_1^*(2) = 2;\ x_2^*(2) = 2;\ x_1^*(t) = 2 + 2(t-2) - (t-2)^2/2,\ t \ge 2.$$

Отсюда видно, что в момент $t_1^* = 4$ МТ попадет в точку $w = 4$, а в момент $t_2^* = 4 + 2\sqrt{2}$ МТ возвратится в начало координат. Сравнивая значения t_2 и t_2^* приходим к выводу, что потеря времени на первом участке, компенсируется на втором участке за счет реализации более хороших начальных условий для прохождения второго участка, чем те, что образуются при декомпозиционном подходе к решению задачи. Это объясняется тем, что стремясь как можно быстрее сблизиться с первой точкой МТ набирает большую скорость и в результате по инерции "далеко"проскакивает ее. После этого МТ возвращается обратно в точку w и лишь затем движется в начало координат. Иной характер имеет движение, порожденное управлением (2.4). При этом управлении t_1^* — момент сближения МТ с точкой w наступает позже, чем момент t_1. Но при управлении (2.4) в момент времени t_1^* скорость МТ равна нулю и начиная с этого момента движение осуществляется в направлении начала координат. Покажем, что для рассматриваемой задачи с двумя целевыми точками управление (2.4) является оптимальным. Действительно, согласно принципа максимума Л.С.Понтрягина оптимальное управление $u^0(t),\ t \in T$, имеет структуру

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ 0 \le t < \tau, \\ -1, & \text{если}\ \ t \ge \tau, \end{cases}$$

где τ — неизвестный параметр, подлежащий определению. При этом, параметр τ должен удовлетворять ограничению $\tau \ge 2$, т.к. в противном случае МТ не попадет в точку w. В момент τ скорость МТ и ее геометрическая координата принимают следующие значения $x_2(\tau) = \tau, \quad x_1(\tau) = \tau^2/2$. Поэтому при $t \ge \tau$ имеем

$$x_2(t) = \tau - (t-\tau), \quad x_1(t) = w + \tau(t-\tau) - (t-\tau)^2/2.$$

Задача состоит в минимизации момента времени t, удовлетворяющего условию $w + \tau(t-\tau) - (t-\tau)^2/2 = 0$. Отсюда имеем

$$t = 2\tau + (\tau^2 + 2w)^{1/2}.$$

Зависимость $\tau \to t$, определяемая последним равенством, является монотонно возрастающей. Поэтому, ввиду ограничения $\tau \ge 2$, она принимает минимальное значение при $\tau = 2$, что и требовалось доказать.

3. Уравнение движения и классы допустимых управлений

Пусть движение управляемой системы [1, 2] в n-мерном эвклидовом пространстве $X \overset{\triangle}{=} R^n$ на заданном отрезке времени $T \overset{\triangle}{=} [t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta$, описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

Здесь $x \in X$ — фазовый вектор системы (3.1); u — r-мерный управляющий параметр, удовлетворяющий геометрическому ограничению

$$u(t) \in P, \quad t \in T, \tag{3.2}$$

$P \subset R^r$-компакт; $n \in N$, $r \in N$. Как обычно, [3, 9, 25] на функцию f : $T \times X \times P \to X$ накладываем три условия. Во-первых, она должна быть непрерывной по совокупности переменных, во-вторых, иметь непрерывные частные производные $\partial f_i/\partial x_j$ (x_j, $j \in \overline{1,n}$, — координаты вектора x; f_i, $i \in$

$\overline{1,n}$, — координаты вектор-функции f), в-третьих, удовлетворять условию неограниченной продолжимости решений: существует число $a > 0$, для которого при любых $t \in T$, $x \in X$, $u \in P$:

$$\| f(t,x,u) \|_n \leq a(1+ \| x \|_n). \tag{3.3}$$

Здесь и далее для любого $x \in R^n$ через $\| x \|_n$ обозначаем эвклидову норму вектора $x \in R^n$. В качестве класса допустимых "обычных"управлений можно выбирать либо $\mathbb{U}_1$ множество кусочно-постоянных, непрерывных справа на $[t_0, \vartheta]$, r-мерных вектор-функций

$$U \stackrel{\triangle}{=} \{u(t) \in P,\ t \in T\}; \tag{3.4}$$

либо $\mathbb{U}_2$ — множество кусочно-непрерывных, непрерывных справа вектор-функций U (3.4). Каждое управление $U \in \mathbb{U}_1 \quad (U \in \mathbb{U}_2)$ порождает движение [2, 9]

$$\varphi_U \stackrel{\triangle}{=} \{\varphi_U(t),\ t \in T\} \tag{3.5}$$

системы (3.1) из начальной позиции (t_0, x_0). Это движение в каждой точке непрерывности управления U удовлетворяет равенству

$$\dot{\varphi}_U(t) = f(t, \varphi_U(t), U(t)) \tag{3.6}$$

и начальному условию $\varphi_U(t_0) = x_0$.

Известно [4, 8, 25], что оптимальное управление (в различных смыслах) на множествах $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, как правило, не существует. Поэтому необходимо использовать более "полные"классы "обычных"управляющих функций, например, $\mathbb{U}_3$ — множество измеримых по Борелю функций [26]. В данном случае, это множество тех функций $u(\cdot) = \{u(t), t \in T\}$, которые при всяком выборе замкнутого (в смысле эвклидовой нормы в R^r) множества E, $E \subset P$, удовлетворяют включению $\{t : t \in T,\ u(t) \in E\} \in \mathcal{T}$, где $\mathcal{T}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств T ($\mathcal{T}$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств T, еще содержащая семейство τ_T всех открытых в T множеств). При этом легко проверить, что $\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_3$. Каждое управление $U \in \mathbb{U}_3$ порождает единственное движение (3.5) системы (3.1) из начальной позиции (t_0, x_0), которое "почти всюду"на отрезке T удовлетворяет равенству (3.6). В рассматриваемом случае вместо дифференциального уравнения (3.6) используют эквивалентное (3.6) интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t[} f(s, x(s), u(s))\lambda(ds) \tag{3.7}$$

где λ — след меры Лебега на $\mathcal{T}$ [27]. Для существования оптимального управления во множестве $\mathbb{U}_3$ в задачах Майера, Лагранжа, Больца необходимы дополнительные ограничения на правую часть уравнения (3.1), в частности, условие выпуклости годографа правой части $\{f(t,x,u): \ u \in P\}$ при любой паре $(t,x) \in T \times X$ [4, 9, 25]. Оказывается [11]–[13], что можно обойтись и без этого условия, если решать указанные задачи в классе обобщенных программных управлений — управлений-мер на декартовом произведении измеримых пространств: $(T,\mathcal{T})$ и $(P,\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — есть наименьшая из содержащих все замкнутые множества E, $E \subset P$, σ-алгебра подмножеств P. Следуя [13, стр.\nobreakspace {}118], обозначим через $\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}$ σ-алгебру, порожденную семейством $\mathcal{T}\{\otimes\}\mathcal{A}$ всех измеримых прямоугольников $\Gamma \times A$, $\Gamma \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{A}$. Оказывается, что $\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}$ является σ-алгеброй борелевских подмножеств $T \times P$. Обобщенным программным управлением (на T) назовем всякую меру $\mu: \ \mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \to [0,\infty[$, для которой при любом $\Gamma \subset \mathcal{T}$ имеет место равенство $\mu(\Gamma \times P) = \lambda(\Gamma)$. Множество обобщенных программных управлений на T обозначим через $\mathcal{R}$ [12, 13]. Множество $\mathcal{R}$ обладает рядом достоинств, не присущих множеству $\mathbb{U}_3$. В частности, пучок $\{\tilde{\varphi}_\mu, \ \mu \in \mathcal{R}\}$ всевозможных обобщенных движений, исходящих из фиксированной начальной позиции, обладает компактностью в пространстве непрерывных вектор-функций [12, стр. 157], чего нельзя сказать о пучках движений $\{\varphi_U: \ U \in \mathbb{U}_i\}$, $i \in \overline{1,3}$, порожденных обычными управлениями. Кроме того, оказывается, что пучки $\{\varphi_U: \ U \in \mathbb{U}_i\}$, $i \in \overline{1,3}$, образуют в пучке обобщенных решений плотное множество, т.е. обобщенное программное движение может быть сколь угодно точно приближено "обычным движением". При этом, несмотря на то, что предел последовательности $\{\varphi_{U_i}, \ i \in N\}$ может не являться движением, отвечающим какому-либо управлению $U \in \mathbb{U}_3$, он будет являться обобщенным движением, соответствующим некоторому $\mu \in \mathcal{R}$. Известно (см. в [11] лемму 2.1), что множество $\mathcal{R}$ $*-$слабо компактно в себе, т.е. из любой последовательности $(\mu^{(k)})$, $k \in N$, можно выделить подпоследовательность $(\mu^{(k_j)})$, $j \in N$, $*$- слабо сходящуюся к некоторой мере $\mu^* \in \mathcal{R}$. Это связано с тем, что в силу ограниченности $\mathcal{R}$ (см. [27]), каждую меру $\mu \in \mathcal{R}$ можно рассматривать как элемент некоторого шара $C^*(T \times P)$, сопряженного к пространству $C(T \times P)$ непрерывных на $T \times P$ функций [27], о котором известно, что он слабо компактен в себе. Решением уравнения (2.1), соответствующим мере $\mu \in \mathcal{R}$ назовем [11, 13] абсолютно непрерывную вектор-функцию

$$\tilde{\varphi}_\mu = \{\tilde{\varphi}(t,t_0,x_0,\mu), \quad t_0 \le t \le \vartheta\}, \tag{3.8}$$

удовлетворяющую при всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$ уравнению

$$\tilde{\varphi}_\mu(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t[\times P} f(s, \tilde{\varphi}_\mu(s), u(s))\mu(d(s,u)),\ (t \in T). \tag{3.9}$$

При всяком выборе $\mu \in \mathcal{R}$ такое решение существует [11], более того, оно (см. лемму 2.2 в [11]) единственно. В дальнейшем нам потребуется иная запись обобщенных управлений $\mu \in \mathcal{R}$ и возможность замены интеграла (3.9) по произведению пространств на повторный интеграл. Здесь используем обозначения работ [14, 15]. А именно, пусть $\mathcal{P}$ — множество всех вероятностых мер на P [4]; $\tilde{\mathcal{U}}_T$ — множество всех функций $\mu_T:\ T \to \mathcal{P}$, таких, что при всяком выборе непрерывной на P функции g отображение

$$t \mapsto \int\limits_P g(u)\mu_T(t)(du):\ T \mapsto \mathbb{R}$$

измеримо по Борелю. В этом случае функцию $\mu_T \in \tilde{\mathcal{U}}_T$ назовем $*$-слабым управлением. Каждое $*$-слабое управление $\mu_T \in \tilde{\mathcal{U}}_T$ доставляет единственную меру $\mu^* \in \mathcal{R}$ посредством условия: для любой непрерывной функции g, действующей из $T \times P$ в R имеет место равенство

$$\int\limits_{T\times P} g(t,u)\mu^*(d(t,u)) = \int\limits_T (\int\limits_P g(t,u)\mu_T(t)(du))\lambda(t). \tag{3.10}$$

Теорема Рисса [27] гарантирует существование и единственность меры μ^* с указанным свойством (см. [9, стр.124]). Более того, оказывается [13], что для любого $\mu \in \mathcal{R}$ существует такое $\mu_T \in \tilde{\mathcal{U}}_T$, для которого $\mu = \mu^*$ в смысле (3.10). Соответствие между $\mu_T \in \tilde{\mathcal{U}}_T$ и $\mu^* \in \mathcal{R}$, как и в [14, 15], будем определять равенством $\mu^* = \lambda \odot \mu_T$. Фактически, функции меры $\mu_T \in \tilde{\mathcal{U}}_T$ являются иной записью обобщенных управлений $\mu \in \mathcal{R}$. Следствием этого факта является возможность каждому обычному управлению U ($U \in \mathbb{U}_3$) поставить в соответствие единственным способом такое обобщенное управление $\xi_U \in \mathcal{R}$, что для всякой непрерывной функции $g:\ T \times P \to R$ выполняется равенство

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} g(t,U)dt = \int\limits_{T\times P} g(t,U)\xi_U(d(t,u)) \tag{3.11}$$

При использовании $*$-слабого управления $\mu_T \in \tilde{\mathcal{U}}_T$ уравнение (3.1) заменяется следующим, понимаемым в смысле Каратеодори, уравнением

$$\dot{x} = \int\limits_P f(t,x,u)\mu_T(t)(du), \quad x(t_0) = x_0.$$

Интеграл в правой части последнего уравнения всегда реализует некоторую точку из выпуклой оболочки [3] годографа $\{f(t,x(t),u): \ u \in P\}$. Таким образом осуществляется овыпукление правой части уравнения (3.1), необходимое для существования оптимального, в определенном смысле, управления.

4. Постановка задач

Пусть: R - числовая прямая; $\mathbb{T}$ — множество всех m-мерных векторов $\tau = (t_1, ..., t_m)$, координаты t_i $(i \in \overline{1,m})$ которых удовлетворяют ограничению

$$t_0 \leq t_1 \leq, \cdots \leq t_m \leq \vartheta_0;$$

$\Phi_i : \ T \times X \to R; \quad K_i : \ T \times X \to R^k \quad (i \in \overline{1,m}, \ k \in N \ (k \leq n))$ — непрерывные и непрерывно дифференцируемые (гладкие) по совокупности переменных функции. Полагаем

$$\mathcal{J}(\tau,\mu) \overset{\triangle}{=} \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(t_i, \tilde{\varphi}_\mu(t_i)), \quad (\tau,\mu) \in \mathbb{T} \times \mathcal{R} \tag{4.1}$$

Основная задача состоит в минимизации критерия качества $\mathcal{J}(\tau,\mu)$ (4.1) при условиях

$$K_i(t_i, \tilde{\varphi}_\mu(t_i)) = 0. \tag{4.2}$$

При ее исследовании будем использовать необходимые условия оптимальности, полученные в [19, 20] для следующей задачи, называемой далее простейшей.

Простейшая задача

$$\mathcal{J}(\tau,\mu) \to min, \quad (\tau,\mu) \in \mathbb{T} \times \mathcal{R}. \tag{4.3}$$

Следуя [22, стр. 125], ограничения (4.2) будем снимать методом штрафов, построив семейство вспомогательных p- задач на безусловный экстремум. Для этой цели введем в рассмотрение следующий критерий качества

$$\mathcal{J}_p(\tau,\mu) = \mathcal{J}(\tau,\mu) + \rho(\mu,\mu^*) + \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_i^*)^2 +$$

$$p \sum_{i=1}^{m} \parallel K_i(t_i, \tilde{\varphi}_\mu(t_i) \parallel_k^2 . \tag{4.4}$$

Здесь $p \in N$ — параметр (коэффициент штрафа), $\varepsilon > 0$ — некоторое число, (τ^*, μ^*) — решение основной задачи $(\tau^* \stackrel{\triangle}{=} (t_1^*, ..., t_m^*))$, $\rho(\mu, \mu^*)$ — расстояние между μ и μ^*, определяемое формулой [27, стр. 461]

$$\rho(\mu, \mu^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\parallel \int\limits_{T\times P} g_i(t,u)(\mu(d(t,u)) - \mu^*(d(t,u))) \parallel_n}{2^i(1+ \parallel \int\limits_{T\times P} g_i(t,u)(\mu(d(t,u)) - \mu^*(d(t,u))) \parallel_n)}$$

(при любом $i \in N \quad g_i : T \times P \to X$ — суть непрерывная функция).

Вспомогательная задача

$$\mathcal{J}_p(\tau, \mu) \to \min, \quad (\tau, \mu) \in \mathbb{T} \times \mathcal{R}. \tag{4.5}$$

Существование оптимального обобщенного программного управления μ^0 в простейшей задаче следует из того, что множество $\mathcal{R}$, наделенное $*$-слабой топологией [26, 27]] есть метризуемый компакт, а непрерывный функционал $\mathcal{J}: \ \mathbb{T} \times \mathcal{R} \to R$ (4.1), заданный на компакте $\mathbb{T} \times \mathcal{R}$ достигает своей нижней грани. По той же причине, ввиду непрерывности зависимости $\mu \mapsto \rho(\mu, \mu^*)$, существует решение $(\tau^{(p)}, \mu^{(p)})$ во вспомогательной p-задаче. Заметим, что множество всех $(\tau, \mu) \in \mathcal{R}$, удовлетворяющих соотношениям (4.2) также является компактом. Это гарантирует существование оптимальной пары (τ^*, μ^*) в Основной задаче.

5. Необходимые условия оптимальности в простейшей задаче

При фиксированном векторе $\tau \in \mathbb{T}$ известны (см. теорему 5.1 в [19]) необходимые условия оптимальности обобщенного программного управления $\mu^0 \in \mathcal{R}$ и соответствующего ему $*$-слабого управления $\mu_T^0 \in \tilde{\mathcal{U}}_T$. Напомним их. Пусть: ∇f — матрица-функция частных производных функции f из (3.1) по компонентам вектора фазового состояния x;

$$\dot{y} = (\int\limits_P (\nabla f)(s, \tilde{\varphi}_\mu(s), u)(\mu_T(s))(du)) \ y \tag{5.1}$$

— система в вариациях вдоль решения $\{\tilde{\varphi}_\mu(t), t \in T\}$ (3.8), порожденного управлением $\mu = \lambda \odot \mu_T \quad (\mu_T \in \tilde{\mathcal{U}}_T)$; $S(\vartheta, t \mid \mu_T)$ — значение фундаментальной матрицы решений системы (5.1) в момент времени ϑ с начальным моментом t. Тогда решение Y системы (5.1) с начальным условием $Y(t) = y_0$, $y_0 \in R^n$, имеет в момент ϑ значение $Y(\vartheta) = S(\vartheta, t \mid \mu_T)\ y_0$. Как обычно [1, стр. 55], для любой функции $\Phi : T \times X \to R$ и любой точки $(t_*, x_*) \in T \times X$ через grad $\Phi(t_*, x_*)$ обозначаем вектор-столбец частных производных функции Φ по x, вычисленный в точке (t_*, x_*). Кроме того, фиксируем вектор $\tau \in \mathbb{T}$, обобщенное программное управление $\mu^0 \in \mathcal{R}$ и полагаем

$$l_i \stackrel{\triangle}{=} -\mathrm{grad}\ \Phi_i(t_i, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_i)), \quad \psi_i'(s) = l_i'\ \ S(t_i, s \mid \mu_T^0),$$

$$\bar{\psi}_k(s) = \sum_{i=k}^{m} \psi_i(s) \quad (i \in \overline{1,m}, \quad k \in \overline{1,m}, \quad s \in [t_0, t_k]). \tag{5.2}$$

Здесь $l_i'\ S(t_i, s \mid \mu_T)$ – есть результат произведения вектора-строки l_i' ("штрих сверху"означает транспонирование) на матрицу $S(t_i, s \mid \mu_T)$. Далее для любых $a \in R^n$ и $b \in R^n$ через $a'b$ обозначаем их скалярное произведение.

Теорема 5.1. *Пусть при фиксированном* $\tau \in \mathbb{T}$ *обобщенное управление* $\mu^0 \stackrel{\triangle}{=} \lambda \odot \mu_T^0$ *является решением простейшей задачи (4.3). Тогда при любом* $k \in \overline{1,m}$, *почти всюду на отрезке* $[t_{k-1}, t_k]$ *выполняется равенство*

$$(\bar{\psi}_k(t))' \int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\mu_T^0(t))(du) = \max_{u \in P} (\bar{\psi}_k(t))' f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u). \tag{5.3}$$

Фактически, соотношение (5.3) суть принцип максимума Л.С.Понтрягина для обобщенных программных управлений. Для обычных (борелевских) оптимальных управлений в (5.3) следует просто ограничиться рассмотрением только таких μ_T^0, для которых при каждом $s \in T$ значение $\mu_T^0(s)$ суть мера, сосредоточенная в некоторой точке u_S^0 из множества P. Итак, пусть $U^0 \in \mathbb{U}_3$ таково, что $\mu_0 = \xi_{U^0}$ в смысле равенства (3.11). Тогда соотношение (5.3) вырождается в равенство

$$(\bar{\psi}_k(t))' f(t, \varphi_{U^0}(t), U^0) = \max_{u \in P} (\bar{\psi}_k(t))' f(t, \varphi_{U^0}(t), u),$$

выполняющееся почти всюду на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$.

Обобщением леммы из [20] в случае погружения обычных управлений $U \in \mathbb{U}_3$ в пространство обобщенных управлений мер $\mu \in \mathcal{R}$ является следующая

Теорема 5.2. *Пусть* $(\tau^0, \mu^0) \in T \times \mathcal{R}$ — *решение простейшей задачи (4.3),* $\mu^0 = \lambda \odot \mu_T^0$ *и* $t_i^0 < t_{i+1}^0$ *при любом* $i \in \overline{1, m-1}$. *Тогда при любом* $i \in \overline{1, m-1}$ *имеет место равенство*

$$\max_{u\in P}(\bar\psi_{i+1}(t_i^0))' f(t_i^0, \tilde\varphi_{\mu^0}(t_i^0), u) = \max_{u\in P}(\bar\psi_i(t_i^0))' f(t_i^0, \tilde\varphi_{\mu^0}(t_i^0), u) - \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\Big|_{(t_i^0, \tilde\varphi_{\mu^0}(t_i^0))} . \tag{5.4}$$

Доказательство этой теоремы проводится от противного по схеме доказательства леммы из [20]. А именно, предположим, что для некоторого $i = k$ равенство (5.4) места не имеет. Для определенности полагаем, что разность между левой и правой частями соотношения (5.4), которую обозначим через χ, строго положительна. Пусть δ_{U_k} – мера Дирака [3, стр. 65], [8, стр. 65] сосредоточенная в точке U_k, для которой имеет место соотношение

$$\max_{u\in P}(\bar\psi_{k+1}(t_k^0))' f(t_k^0, \tilde\varphi_{\mu^0}(t_k^0), u) = \int\limits_P (\bar\psi_{k+1}(t_k^0))' f(t_k^0, \tilde\varphi_{\mu^0}(t_k^0), u) d\delta_{U_k}.$$

Определим вектор $\bar\tau = (\bar t_1, ..., \bar t_m)$, обобщенное программное управление $\bar\mu$ и полуинтервал $T_k(\varepsilon)$ соотношениями

$$\bar t_s = t_s^0 \quad (s \neq k); \quad \bar t_k = t_k^0 - \varepsilon; \quad T_k(\varepsilon) = [t_k^0 - \varepsilon, t_k^0[; \quad \overline{\mu}_T = \lambda \odot \overline{\mu}_T;$$

$$\bar\mu_T(t) = \begin{cases} \mu_T^0, & \text{если} \quad t \in T \backslash T_k(\varepsilon), \\ \delta_{U_k}, & \text{если} \quad t \in T_k(\varepsilon), \end{cases} \tag{5.5}$$

где ε – достаточно малое положительное число. Замена (τ^0, μ^0) на $(\bar\tau, \bar\mu)$ приводит к вариации траектории. Далее используем методику [9], [28, стр.23] вычисления вариации траектории и приращения функционала качества. Положим $(\delta x)(t) \overset{\triangle}{=} \tilde\varphi_{\overline{\mu}}(t) - \tilde\varphi_{\mu^0}(t) \quad t \in T$. Тогда

$$(\delta x)(t) = 0, \quad t_0 \le t \le t_k^0 - \varepsilon, \tag{5.6}$$

$$(\delta x)(t_s^0) = S(t_s^0, t_k^0 \mid \mu_T^0)(\delta x)(t_k^0) \quad (s = k+1, ..., m). \tag{5.7}$$

Покажем справедливость соотношения

$$(\delta x)(t_k^0) = \int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t, \tilde\varphi_{\mu^0}(t), u)(\overline{\mu}_T(t) - \mu_T^0(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon) \tag{5.8}$$

($o(\varepsilon)$ — величина меньшего порядка малости, чем ε т.е. при $\varepsilon \to 0 \quad o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$). Действительно, с учетом (5.6), (5.7), (3.9) имеем

$$(\delta x)(t_k^0) = \int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t, \tilde\varphi_{\overline{\mu}}(t), u)(\overline{\mu}_T(t))(du))\lambda(dt) - \int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t, \tilde\varphi_{\mu^0}(t),$$

$$u)(\mu_T^0(t))(du))\lambda(dt) = \int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\overline{\mu}_T(t) - \mu_T^0(t))(du))\lambda(dt) +$$

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\int\limits_P (f(t,\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t),u) - f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u))(\overline{\mu}_T(t))(du))\lambda(dt). \tag{5.9}$$

Второй интеграл по мере λ в правой части (5.9) имеет порядок $o(\varepsilon)$. Это связано с тем, что ввиду условий, накладываемых на функцию f найдется такое положительное число M, что при любом $t \in T_k(\varepsilon)$ будет иметь место неравенство $\| f(t,\varphi_{\bar{\mu}}(t),u) - f(t,\varphi_{\mu^0}(t),u) \|_n \leq M \cdot \| (\delta x)(t) \|_n$ и силу леммы Гронуолла [3, с.219] [23, с.13] величина $\| (\delta x)(t) \|_n$ при любом $t \in T_k(\varepsilon)$ имеет порядок малости ε. Таким образом, имеет место соотношение (5.8).

С учетом равенств (5.2), $\mathrm{grad}\ \Phi_k(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)) = -\psi_k(t_k^0)$, вычислим

$$\Delta\Phi_k \stackrel{\triangle}{=} \Phi_k(t_k^0 - \varepsilon, \tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0 - \varepsilon)) - \Phi_k(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)) = -\varepsilon\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$+(\mathrm{grad}\ \Phi_k(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)))'\ (\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0 - \varepsilon)) - \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)) + o(\|(\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0 - \varepsilon) - \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)\|_n) =$$

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\psi_k(t_k^0))'(\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\mu_T^0(t))(du))\lambda(dt) - \varepsilon\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))} + o(\varepsilon),$$

$$\Delta\Phi_s \stackrel{\triangle}{=} \Phi_s(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu}(t_s^0)) - \Phi_s(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_s^0)) = (\mathrm{grad}\ \Phi_s(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_s^0)))'(\delta x)(t_s^0) +$$

$$o(\|(\delta x)(t_s^0)\|) = (\mathrm{grad}\ \Phi_s(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_s^0)))'\ S(t_s^0, t_k^0)(\delta x)(t_k^0) + o(\|(\delta x)(t_k^0)\|) =$$

$$-\int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\psi_s(t_k^0))'(\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\overline{\mu}_T(t) - \mu^0(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon),$$

$$\Delta\mathcal{J} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{J}(\overline{\tau},\overline{\mu}) - \mathcal{J}(\tau^0,\mu^0) = \Delta\Phi_k + \sum_{i=k+1}^{m} \Phi_i(t_i^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_i^0)) =$$

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\psi_k(t_k^0))'(\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\mu^0(t))(du)) -\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$-\sum_{i=k+1}^{m} (\psi_i(t_k^0))'(\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\overline{\mu}_T(t) - \mu^0(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon) =$$

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} [(\bar{\psi}_k(t_k^0))'(\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\mu^0(t))(du)) -\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$-(\bar{\psi}_{k+1}(t_k^0))' \int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\overline{\mu}(t))(du))]\lambda(dt) + o(\varepsilon). \tag{5.10}$$

В силу непрерывности функции f по совокупности переменных при принятом предположении выражение, стоящее в квадратной скобке в (5.10), равно $\chi + O(\varepsilon)$. Следовательно, $\Delta\mathcal{J} = -\varepsilon\chi + o(\varepsilon)$. и выполняется неравенство $\mathcal{J}(\bar{\tau}, \bar{\mu}) < \mathcal{J}(\tau^0, \mu^0)$, противоречащее оптимальности пары (τ^0, μ^0) в простейшей задаче при $\chi > 0$.

Пусть теперь величина χ, определяемая соотношением (5.5), меньше нуля. Обозначим через δ_{U_k} – меру Дирака [3, 8], сосредоточенную в точке U_k и определяемую соотношением

$$\max_{u\in P}(\bar{\psi}_k(t_k^0))' f(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0), u) = \int\limits_P (\bar{\psi}_k(t_k^0))' f(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0), u) d\delta_{U_k}.$$

Определим вектор $\bar{\tau} = (\bar{t}_1, ..., \bar{t}_m)$, обобщенное программное управление $\bar{\mu}$ и полуинтервал $\Gamma_k(\varepsilon)$ соотношениями

$$\bar{t}_s = t_s^0 \quad (s \neq k); \quad \bar{t}_k = t_k^0 + \varepsilon; \quad \Gamma_k(\varepsilon) = [t_k^0, t_k^0 + \varepsilon[; \quad \overline{\mu}_T = \lambda \odot \overline{\mu}_T;$$

$$\bar{\mu}_T(t) = \begin{cases} \mu_T^0, & \text{если} \quad t \in T \backslash \Gamma_k(\varepsilon), \\ \delta_{U_k}, & \text{если} \quad t \in \Gamma_k(\varepsilon) \end{cases}$$

где ε – достаточно малое положительное число, Замена (τ^0, μ^0) на $(\bar{\tau}, \bar{\mu})$ приводит к вариации траектории и значения функционала качества. Положим

$$(\delta x)(t) \stackrel{\triangle}{=} \tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t) - \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), \quad t \in T.$$

Тогда

$$(\delta x)(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_k^0 + \varepsilon, \tag{5.11}$$

$$(\delta x)(t_s^0) = S(t_s^0, t_k^0 + \varepsilon \mid \mu_T^0) \ (\delta x)(t_k^0 + \varepsilon) \quad (s = k+1, ..., m). \tag{5.12}$$

Вычислим

$$(\delta x)(t_k^0 + \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(\bar{t}_k) - \tilde{\varphi}_{\mu^0}(\bar{t}_k) = \tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0) +$$

$$\int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t), u)(\overline{\mu}_T(t))(du))\lambda(dt)$$

$$-\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0) - \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\mu_T^0(t))(du))\lambda(dt)$$

Прибавим и вычтем к правой части последнего равенства интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)\ (\bar{\mu}_T(t))(du)))\ \lambda(dt)$$

После перегруппировки слагаемых получим

$$(\delta x))(t_k^0+\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\overline{\mu}_T(t)-\mu_T^0(t))(du))\lambda(dt)+$$

$$\int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P (f(t,\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t),u)-f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u))(\overline{\mu}_T(t))(du))\lambda(dt) \tag{5.13}$$

Второй интеграл по мере λ в правой части (5.13) имеет порядок $o(\varepsilon)$. Действительно, ввиду условий, накладываемых на функцию f найдется такое положительное число M, что при любом $t\in[t_k^0,t_k^0+\varepsilon[$ будет иметь место неравенство

$$\parallel f(t,\varphi_{\bar{\mu}}(t),u)-f(t,\varphi_{\mu^0}(t),u)\parallel_n \leq M\cdot \parallel (\delta x)(t)\parallel_n .$$

В силу леммы Гронуолла [3, 29] величина $\parallel (\delta x)(t)\parallel_n$ при любом $t\in[t_k^0,t_k^0+\varepsilon[$ имеет порядок малости ε, поэтому второй интеграл в (5.13) имеет порядок малости ε^2. Таким образом, имеет место соотношение

$$(\delta x))(t_k^0+\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\overline{\mu}_T(t)-\mu_T^0(t))(du))\lambda(dt)+o(\varepsilon) \tag{5.14}$$

Вычислим

$$\Delta\Phi_k \stackrel{\triangle}{=} \Phi_k(t_k^0+\varepsilon,\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0+\varepsilon))-\Phi_k(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)) = \varepsilon\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$+(\mathrm{grad}\ \Phi_k(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)))'\ (\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0+\varepsilon))-\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))+o(\|(\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0+\varepsilon)-\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)\|_n).$$

Отсюда, с учетом соотношения

$$\mathrm{grad}\ \Phi_k(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)) = -\psi_k(t_k^0)$$

и того факта, что величина

$$(\tilde{\varphi}_{\overline{\mu}}(t_k^0+\varepsilon))-\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0)) = \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\bar{\mu}}(t),u)(\overline{\mu}_T(t))(du))\ \lambda(dt) =$$

$$\int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\overline{\mu}_T(t)(du)) \ \lambda(dt) + o(\varepsilon)$$

имеет порядок малости ε, имеем

$$\Delta\Phi_k = \ \varepsilon \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \ |_{(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))} - \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} \psi_k'(t_k^0)(\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\bar{\mu}_T(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon).$$

Кроме того, имеем

$$\Delta\Phi_s \overset{\triangle}{=} \Phi(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu}(t_s^0)) - \Phi(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_s^0)) = (\text{grad } \Phi(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_s^0)))'(\delta x)(t_s^0)$$

$$+o(\|(\delta x)(t_s^0)\|) = (\text{grad } \Phi(t_s^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_s^0)))' \ S(t_s^0, t_k^0 + \varepsilon)(\delta x)(t_k^0 + \varepsilon) + o(\|(\delta x)(t_k^0)\|_n)$$

$$= - \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} \psi_s'(t_k^0 + \varepsilon)(\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\overline{\mu}_T(t) - \mu^0(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon).$$

С учетом соотношения $\psi_s(t_k^0 + \varepsilon) = \psi_s(t_k^0) + O(\varepsilon)$ ($O(\varepsilon)$ — величина, порядка малости ε) вычислим

$$\Delta\mathcal{J} \overset{\triangle}{=} \mathcal{J}(\overline{\tau}, \overline{\mu}) - \mathcal{J}(\tau^0, \mu^0) = \Delta\Phi_k + \sum_{i=k+1}^{m} \Phi_i(t_i^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_i^0)) =$$

$$- \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} \psi_k'(t_k^0)(\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\mu^0(t))(du)) + \varepsilon \ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \ |_{(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$- \sum_{i=k+1}^{m} \psi_i'(t_k^0) \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\overline{\mu}_T(t) - \mu_T^0(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon) =$$

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} (-\bar{\psi}_k'(t_k^0) \ \int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\bar{\mu}(t))(du)) + \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \ |_{(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_k(\varepsilon)} \bar{\psi}_{k+1}'(t_k^0)(\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\mu_T^0(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon).$$

В силу непрерывности функции f по совокупности переменных найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и любого $t \in [0, \varepsilon]$ выражение

$$\int\limits_P \max_{u \in P} \bar{\psi}_{k+1}'(t) f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\mu_T^0(t))(du) - \int\limits_P \max_{u \in P} \bar{\psi}_k'(t) f(t_k^0,$$

$$\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\bar{\mu}_T(t))(du) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\mid_{(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))} -\chi$$

будет иметь порядок малости ε. Следовательно,

$$\Delta \mathcal{J} = \varepsilon\ \chi + o(\varepsilon).$$

Отсюда следует неравенство $\mathcal{J}(\bar{\tau}, \bar{\mu}) < \mathcal{J}(\tau^0, \mu^0)$, противоречащее оптимальности пары (τ^0, μ^0) в простейшей задаче при $\chi < 0$. Таким образом, справедливость теоремы 5.2 полностью доказана.

Предположим,что в формулировке Теоремы 5.2 отсутствует условие о различии координат вектора $\tau^0 \in \mathbb{T}$. Расмотрим случай, когда

$$\tau_k^0 = \tau_{k+1}^0 < \tau_{k+2}^0 \tag{5.15}$$

Покажем, что при любом $k \in \overline{1, m-1}$, для которого справедливо условии (4.18), соотношение (4.4) принимает следующий вид

$$\max_{u \in P} \bar{\psi}'_{k+2}(t_k^0) f(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0), u) =$$

$$\max_{u \in P} \bar{\psi}'_k\ (t_k^0) f(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0), u) - \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\mid_{(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))} - \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial t}\mid_{(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}. \tag{5.16}$$

Это соотношение доказывается от противного. Для этого предположим, что разность между правой и левой частями равна некоторому числу χ_1, которое отлично от нуля. Для определенности пусть это число больше нуля. Здесь как и ранее пару (τ^0, μ^0) заменяем парой $(\bar{\tau}, \bar{\mu})$, определяемой формулами (5,6). В рассматриваемом случае величины $\Delta\Phi_k$, $\Delta\Phi_s$, $(s \in \overline{1, m-1})$ останутся прежними, а величина $\Delta\Phi_{k+1}$ примет вид

$$\Delta\Phi_{k+1} = \int\limits_{T_k(\varepsilon)} \psi'_{k+1}(t_k^0)(\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\mu_T^0(t))(du))\lambda(dt)$$

$$-\varepsilon\ \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial t}\mid_{(t_k^0(t_k^0), \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))} + o(\varepsilon).$$

Вычислим $\Delta\mathcal{J}$ – приращение критерия качества (4.1), получаемое при указанной замене. Имеем

$$\Delta\mathcal{J} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{J}(\overline{\tau}, \overline{\mu}) - \mathcal{J}(\tau^0, \mu^0) = \Delta\Phi_k + \Delta\Phi_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{m} \Phi_i(t_i^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_i^0)) =$$

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} \psi'_k(t_k^0)(\int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t), u)(\mu^0(t))(du))\ \lambda(dt) - \varepsilon\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\mid_{(t_k^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$+\int\limits_{T_k(\varepsilon)} \psi_k'(t_k^0)(\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\mu^0(t))(du))\ \lambda(dt) - \varepsilon\ \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$-\sum_{i=k+2}^{m} \psi_i'(t_k^0) \int\limits_{T_k(\varepsilon)} (\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\overline{\mu}_T(t)-\mu^0(t))(du))\lambda(dt) + o(\varepsilon) =$$

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)} [\bar{\psi}_k'(t_k^0)\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\mu^0(t))(du)) - \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))} - \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial t}\ |_{(t_k^0,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_k^0))}$$

$$-\bar{\psi}_{k+2}'(t_k^0)(\int\limits_P f(t,\tilde{\varphi}_{\mu^0}(t),u)(\overline{\mu}(t))(du))]\lambda(dt) + o(\varepsilon) \tag{5.17}$$

В силу принятого предположения выражение, стоящее в квадратной скобке правой части (5.17), равно $\chi_1 + O(\varepsilon)$. Тогда

$$\Delta\mathcal{J} = \varepsilon\chi_1 + o(\varepsilon).$$

Это противоречит оптимальности пары $(\tau^0,\ \mu^0)$. Следовательно, предположение $\chi_1 > 0$ является неверным. Аналогично доказывается , что число χ_1 не может быть отрицательным. Таким образом, $\chi_1 \neq 0$, т.е. имеет место равенство (5.16).

6. Связь между простейшей, вспомогательной и основной задачами

Теорема 6.1. *Пусть* (τ^*,μ^*) *и* $(\tau^{(p)},\mu^{(p)})$ *— соответственно решения основной и вспомогательной задач. Тогда при* $p\to\infty$ *имеют место соотношения*

$$\tau^{(p)} \to \tau^*, \quad \mu^{(p)} \to \mu^*, \quad \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_i)) \to \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_i)).$$

Здесь сходимость траекторий равномерная, а управлений — $*$-слабая.

Действительно, поскольку для любого $p\in N$: $\mathcal{J}_p(\tau^{(p)},\mu^{(p)}) \le \mathcal{J}_p(\tau^*,\mu^*)$, т.е.

$$\mathcal{J}(\tau^{(p)},\mu^{(p)}) + \sum_{i=1}^{m}(t_i^{(p)}-t_i^*) + \rho(\mu^{(p)},\mu^*) +$$

$$p\sum_{i=1}^{m} \parallel K_i(t_i^{(p)},\tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_i)) \parallel_k^2 \le \mathcal{J}(\tau^*,\mu^*),$$

то найдется положительное число c_0, при котором будет иметь место неравенство

$$p\sum_{i=1}^{m} \parallel K_i(t_i^{(p)}, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_i^{(p)})) \parallel_k^2 \leq c_0 \quad (p \in N). \tag{6.1}$$

Поделив правую и левую части (6.1) на p, перейдем в (6.1) к пределу при $p \to \infty$. В силу компактности множества $\mathbb{T}$ и слабой компактности в себе множества $\mathcal{R}$ (см. в [11] лемму 2.1) найдется такая пара $(\tau^0, \mu^0) \in \mathbb{T} \times \mathcal{R} \quad (\tau^0 \stackrel{\triangle}{=} (t_1^0, ..., t_m^0))$, при которой будут иметь место равенства

$$K_i(t_i^0, \tilde{\varphi}_{\mu^0}(t_i^0)) = 0. \tag{6.2}$$

Теперь из (4.4) с учетом соотношений $\mathcal{J}_p(\tau^*, \mu^*) = \mathcal{J}(\tau^*, \mu^*)$, (6.2) имеем

$$\mathcal{J}(\tau^0, \mu^0) + \sum_{i=1}^{m}(t_i^0 - t_0^*)^2 + \rho(\mu^0, \mu^*) \leq \mathcal{J}(\tau^*, \mu^*). \tag{6.3}$$

С другой стороны, ввиду оптимальности пары (τ^*, μ^*) в основной задаче, справедливо неравенство

$$\mathcal{J}(\tau^*, \mu^*) \leq \mathcal{J}(\tau^0, \mu^0). \tag{6.4}$$

Сравнивая (6.3), (6.4), приходим к выводу, что $t_i^0 = t_i^* \ (i \in \overline{1, m}), \quad \rho(\mu^0, \mu^*) = 0$. Используя последнее равенство и неравенство треугольника (свойство метрики ρ), можно показать, что $\rho(\mu^{(p)}, \mu^*) \to 0$ при $p \to \infty$. Таким образом, $\mu^{(p)}$ $*$-слабо сходится к μ^*. Кроме того, равенство $\rho(\mu^0, \mu^*) = 0$ означает совпадение μ^0 и μ^* почти всюду на множестве $T \times P$. Равномерная сходимость $\tilde{\varphi}_{\mu(p)}$ к $\tilde{\varphi}_{\mu^0}$ является следствием леммы 2.3 из [11]. Итак, теорема 5.1 полностью доказана.

Вспомогательная p-задача (4.5) сводится к простейшей за счет введения в рассмотрение, вместо Φ_i $(i \in \overline{1, m})$, функций $\Phi_i^{(p)} : \ T \times X \to R$ $(p \in N)$, определяемых соотношениями

$$\Phi_i^{(p)}(t, \tilde{\varphi}_\mu(t)) \stackrel{\triangle}{=} \Phi_i(t, \tilde{\varphi}_\mu(t)) + (t_i - t_i^*)^2 + p \ \parallel K_i(t_i, \tilde{\varphi}_\mu(t_i) \parallel_k^2 .$$

Тогда критерий качества $\mathcal{J}_p(\tau, \mu)$ (4.4) примет вид

$$\mathcal{J}_p(\tau, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i^{(p)}(t_i, \tilde{\varphi}_\mu(t_i)) + \rho(\mu, \mu^*). \tag{6.5}$$

Вид критерия качества $\mathcal{J}_p(\tau, \mu)$ (6.5) отличается от вида $\mathcal{J}(\tau, \mu)$ (4.1) наличием лишь слагаемого $\rho(\mu, \mu^*)$, которое никоим образом не влияет на вывод необходимых условий оптимальности пары $(\tau^{(p)}, \mu^{(p)})$ во вспомогательной p-задаче. Таким образом, для последней применимы теоремы 5.1 и 5.2.

7. Необходимые условия оптимальности решения основной задачи

Положим

$$l_i^{(p)} \stackrel{\triangle}{=} -\mathrm{grad}\ \Phi_i^{(p)}(t_i^{(p)}, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_i^{(p)})) \quad (i \in \overline{1,m},\ p \in N),$$

$$\psi_i^{(p)'}(t) = l_i^{(p)'}\ S(t_i^{(p)}, t \mid \mu_T^{(p)}), \quad \bar{\psi}_k^{(p)}(t) = \sum_{i=k}^{m} \psi_i^{(p)}(t), \quad t_0 \le t \le t_k, \tag{7.1}$$

где $\mu_T^{(p)}$ – $*$-слабое оптимальное управление в p-задаче (3.5), $\mu^{(p)} = \lambda \odot \mu_T^{(p)}$, Тогда при обозначениях

$$\lambda_i^{(p)} \stackrel{\triangle}{=} 2pK_i(t_i^{(p)}, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_i^{(p)})), \tag{7.2}$$

каждый вектор $l_i^{(p)}$ $(i \in \overline{1,m},\ \ p \in N)$ примет вид

$$l_i \stackrel{\triangle}{=} -\mathrm{grad}\ \Phi_i(t_i^{(p)}, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_i^{(p)})) - \frac{\partial K_i}{\partial x} \mid_{(t_k^{(p)}, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_i^{(p)}))}\ \lambda_i^{(p)}.$$

Здесь $\frac{\partial K_i}{\partial x}$ – матрица $n \times k$ (k – размерность вектор-функции K_i), элементами которой являются частные производные $\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_s}$ $(j \in \overline{1,m},\ s \in \overline{1,n})$. Если $\mu^{(p)}$ — решение вспомогательной задачи при фиксированном τ, то согдасно теореме 5.1, при любом $k \in \overline{1,m}$ почти всюду на отрезке $[t_{k-1}^{(p)}, t_k^{(p)}]$ выполняется равенство

$$(\bar{\psi}_k^{(p)}(t))' \int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t), u)(\mu_T^{(p)}(t))(du) = \max_{u \in P} (\bar{\psi}_k^{(p)}(t))' f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t), u). \tag{7.3}$$

Для оптимальности пары $(\tau^{(p)}, \mu^{(p)})$ необходимо также выполнение равенства (см. теорему 5.2)

$$\max_{u \in P} (\bar{\psi}_{k+1}^{(p)}(t_k^{(p)}))' f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_k^{(p)}), u) = \max_{u \in P} (\bar{\psi}_k^{(p)}(t_k^{(p)}))' f(t_k^{(p)},$$

$$\tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_k^{(p)}), u) - \frac{\partial \Phi_k^{(p)}}{\partial t} \mid_{(t_k^{(p)}, \tilde{\varphi}_{\mu^{(p)}}(t_k^{(p)}))}, \tag{7.4}$$

при любом $k \in \overline{1, m-1}$. Ввиду соотношения (6.1), при любом $i \in \overline{1,m}$ последовательность $\{\lambda_i^{(p)}, p \in N\}$ ограничена. Поэтому существует такое число $c_1 > 0$, что $\parallel \lambda_i^{(p)} \parallel_n \le c_1$ при любых $p \in N$, $i \in \overline{1,m}$. Поэтому из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{\lambda_j^{(p)}, j \in N\}$, сходящуюся к некоторому λ_i^* из шара $\parallel \lambda_i^{(p)} \parallel_n \leq c$.

При любом $i \in \overline{1,m}$ последовательность $\{\psi_t^{(p)}(t),\ t \in T, i \in N\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Поэтому в силу теоремы Арцела [26, стр. 109] из нее можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к пределу $(\psi_i^*(t), t \in T)$. Переходя к пределу в (7.1) при $p \to \infty$ и учитывая теорему 6.1, получим

$$l_i^* \stackrel{\triangle}{=} -\text{grad}\ \Phi_i(t_i^*, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t_i^*)) - \ \frac{\partial K_i(t_i^*)}{\partial x} \mid_{(t_i^{(p)}, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t_i^*))}\ \lambda_i^*$$

$$\psi_i^*(t) = (l_i^*)'\ S(t_i^*, t \mid \mu_T^*),\ \ \bar{\psi}_k^*(t) = \sum_{i=k}^{m} \psi_i^*(t). \tag{7.5}$$

Теперь из (7.3), (7.4) будет следовать справедливость следующего утверждения

Теорема 7.1. *Пусть (τ^*, μ^*) — оптимальное решение в Основной задаче и $t_i^* < t_{i+1}^*$ при любом $i \in \overline{1, m-1}$. Тогда найдутся такие векторы λ_i^* $(i \in \overline{1,m})$, при которых функции $\bar{\psi}_k^*(t)$ (7.5) при любом $k \in \overline{1,m}$ почти всюду на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ удовлетворяют соотношению*

$$(\bar{\psi}_k^*(t))' \int\limits_P f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t), u)(\mu_T^*(t))(du) = \max_{u \in P} (\bar{\psi}_k^*(t))' f(t, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t), u), \tag{7.6}$$

а в моменты t_k^* $\ (k \in \overline{1,m})$ равенству:

$$\max_{u \in P} (\bar{\psi}_{k+1}^*(t_k^*))' f(t_k^*, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t_k^*), u) =$$

$$\max_{u \in P} (\bar{\psi}_k^*(t_k^*))' f(t_k^*, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t_k^*), u) - \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \mid_{(t_k^*, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t_k^*))} - \frac{\partial K_k}{\partial t} \mid_{(t_k^*, \tilde{\varphi}_{\mu^*}(t_k^*))}\ \lambda_k^*. \tag{7.7}$$

8. Примеры

В рассматриваемых примерах будем использовать простейшую модель движения самолета (автомобиля) в горизонтальной плоскости Ox_1x_2. Как известно [30, 31], это движение на отрезке времени $T \stackrel{\triangle}{=} [t_0, \vartheta]$ описывается системой уравнений

$$\dot{x}_1 = cos x_3, \quad \dot{x}_2 = sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \tag{8.1}$$

где x_1, x_2 – координаты самолета, отождествляемого с точкой на плоскости, x_3 – угол, составляемый вектором скорости $V = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ с осью $0x_1$, u — управляющий параметр, удовлетворяющий ограничению $| u | \leq 1$. Этот параметр характеризует скорость изменения угла x_3. Предполагаются заданными: начальный момент t_0, координаты (x_{01}, x_{02}, x_{03}) фазового вектора $x \stackrel{\triangle}{=} (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t_0, координаты (w_{11}, w_{12}), (w_{21}, w_{22}) двух точек W_1, W_2 на плоскости $0x_1x_2$. Момент ϑ, $\vartheta > t_0$, предполагается достаточно большим.

Пример 1. Здесь показывается, что задачу о наибыстрейшем обходе системой (8.1) двух точек W_1, W_1 нельзя декомпозировать на две двухточечные задачи о наибыстрейшем переводе системы (8.1) из позиций $(t_0, x_{01}, x_{02}, x_{03})$ в точку W_1, а затем — из позиции $(t_1, w_{11}, w_{12}, w_{13})$ в точку W_2 (t_1 — момент попадания в точку W_1, w_{13} — значение угла x_3, с которым система (8.1) попадает в точку W_1). Для единообразия точку с координатами (x_{01}, x_{02}) обозначим через W_0. Пусть: $t_0 = 0$, $x_{01} = x_{02} = -1$, $x_{03} = 0$,

$$w_{11} = 1, \quad w_{12} = 2(\sqrt{3} - 1), w_{21} = 2, \quad w_{22} = -3(2 - \sqrt{3}) \tag{8.2}$$

Решение задачи о переводе системы из положения $(t_0, x_{01}, x_{02}, x_{03})$ в точку W_1 известно [32, 33]. Оптимальная траектория при заданных краевых условиях (8.2) состоит из дуги $\breve{W_0 M}$ окружности единичного радиуса и отрезка прямой MW_1 (см. Рис.2). При этом начальные условия подобраны так, что центральный угол, опирающийся на дугу $\breve{W_0 M}$ равен $\pi/3$, и $w_{13} = \pi/3$. Поэтому координаты x_{M1}, x_{M2} точки M вычисляются по формулам $x_{M1} = -1 + \sqrt{3}/2$, $x_{M2} = -1/2$. Тогда длина отрезка MW_1 равна $4 - \sqrt{3}$. Ввиду того, что скорость движения по траектории всегда равна "1", то длина траектории равна моменту t_1 попадания в точку W_1. Следовательно, $t_1 = \pi/3 + 4 - \sqrt{3}$.

Решим задачу о наискорейшем переводе системы (8.1) из положения $(t_1, w_{11},$
$w_{12}, w_{13})$ в точку W_2. Здесь оптимальная траектория (см. [32, 33]) будет также состоять из дуги $\breve{W_1 N}$ окружности единичного радиуса и отрезка прямой NW_2 (см. Рис.2). Начальные условия (8.2) подобраны так, что длина дуги $\breve{W_1 N}$ равна π. Отсюда, с учетом равенства $w_{13} = \pi/3$, следует, что ординаты точек C, E, N равны между собой. Поэтому координаты x_{N1}, x_{N2} точки N определяются соотношениями $x_{N1} = \sqrt{3}+1$, $x_{N2} = 2\sqrt{3}-3$. Тогда $x_{N1} - w_{21} = \sqrt{3} - 1$, и длина отрезка отрезка NW_2 равна $2(\sqrt{3} - 1)$. Таким образом, $t_2 = t_1 + \pi + 2(\sqrt{3} - 1) \ = \ 4\pi/3 + 2\sqrt{3} + 2$. Теперь построим тра-

екторию $L \stackrel{\triangle}{=} W_0BCEW_2$ (см. Рис.2), также состоящую из дуг $\breve{W_0B}$, $\breve{CE}$ окружностей единичного радиуса и отрезков BC и EW_2 прямых. Пусть t'_1 и t'_2 — моменты попадания системы (8.1) соответственно в точки W_1 и W_2. Координаты x_{B1}, x_{B2}; x_{C1}, x_{C2} соответствено точек B, C определяются соотношениями $x_{B1} = 0$, $x_{B2} = 0$, $x_{C1} = 0$, $x_{C2} = 2\sqrt{3} - 3$. Поэтому $t'_1 = \pi + 2\sqrt{3} - 3$, $t'_2 = \frac{3}{2}\pi + \sqrt{3}$, $t_2 - t'_2 = 2 - \frac{\pi}{6}$. Сравнивая значения t_1, t'_1 и t_2, t'_2 приходим к выводу, что $t'_1 > t_1$, но $t'_2 < t_2$. Таким образом, потеря времени на участке W_0W_1 компенсируется выигрышем времени на участке W_1W_2. Это происходит, потому что за счет потери времени на первом участке создаются более "хорошие"начальные условия для второй задачи о переходе из W_1 в W_2, чем они возникают при движении по траектории $W_0MW_1EW_2$. Здесь подтверждается жизненный принцип: нельзя марафонскую дистанцию бежать как стометровки.

Пример 2. Пусть имеют место условия примера 1 с той лишь разницей, что точки W_1 и W_2 выбираются произвольным образом и расстояния между парами точек W_0, W_1 и W_1, W_2 — больше 4.

Задача состоит в определении моментов времени t_1, t_2 $(t_1 \leq t_2)$ и управления U, обеспечивающего сближение объекта (7.1) вначале с точкой W_1, а затем — с точкой W_2 в момент времени t_2 за наименьшее время $t_2 - t_0$.

Для сведения данной задачи к Основной задаче введем дополнительное уравнение

$$\dot{x}_4 = 1, \quad x_4(t_0) = t_0.$$

Тогда функция $\Phi_1 : T \times R^4 \to R$ тождественно равна нулю, а функция $\Phi_2(t, x) = x_4 - t_0$. В рассматриваемом случае K_i $(i = 1, 2)$ — двумерные функции, компоненты которых K_{ij} определяются соотношениями $K_{ij} = x_j - w_{ij}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$. Поэтому векторы λ^*_i, $i = 1, 2$, фигурирующие в формулировке теоремы 5.2, будут двумерными и

$$-\frac{\partial K_2}{\partial x}\lambda^*_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\lambda^*_2 = (\lambda_{21}, \lambda_{22}, 0, -1)', \quad -\frac{\partial K_1}{\partial x}\lambda^*_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, 0, 0)'.$$

Здесь λ_{i1}, λ_{i2} – координаты вектора $-\lambda^*_i$, подлежащие определению. Индекс "штрих сверху"означает транспонирование. Пусть $\varphi_{U,1}, ..., \varphi_{U,2}$ — координаты движения системы (8.1) из начальной позиции $(t_0, x_{01}, ..., x_{03})$, порожденного управлением $U \in \mathbb{U}_2$. В данном примере система в вариациях (5.1) и фундаментальная матрица ее решений $S(t_0, t_0 \mid U)$ имеют вид

$$\delta\dot{x}_1 = -\sin\varphi_{U,3}\ \delta x_3, \quad \delta\dot{x}_2 = -\cos\varphi_{U,3}\ \delta x_3, \quad \delta\dot{x}_3 = 0, \quad \delta\dot{x}_4 = 0,$$

$$S(t,t_0 \mid U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{02}-\varphi_{U,2} & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_{U,1}-x_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Следовательно, (см. (7.5),(8.3)) координаты $\psi_{ij}(t)$ $(j \in \overline{1,3}, i \in \overline{1,2})$ векторов $\bar{\psi}_i(t)$ определяются формулами

$$\psi_{21}(t) = \lambda_{21}, \quad \psi_{22}(t) = \lambda_{22}, \psi_{23}(t) = \lambda_{21}(\varphi_{U,2} - w_{22}) - \lambda_{22}(\varphi_{U,1} - w_{21}),$$

$$\psi_{24}(t) = -1, \psi_{11}(t) = \lambda_{21} + \lambda_{11}, \quad \psi_{12}(t) = \lambda_{22} + \lambda_{12}, \quad \psi_{14} = -1,$$

$$\psi_{13}(t) = \lambda_{11}(\varphi_{U,2} - w_{12}) - \lambda_{12}(\varphi_{U,1} - w_{11}) + \psi_{23}(t), \tag{8.3}$$

где λ_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$ — числа, подлежащие определению. Согласно принципу максимума (см. (7.7))

$$U(t) = \operatorname{sign} \psi_{i3}, \quad t_{i-1} \le t \le t_i.$$

Используя это соотношение и "достаточную"удаленность точек W_1 $(i = 0,1,2)$ друг от друга, можно показать, что оптимальная траектория состоит из дуг D_0, D_1 окружностей единичного радиуса и отрезков G_1, G_2 прямых L_1, L_2, соединяющих эти дуги и точку W_2 (см. Рис. 3). При этом $W_0 \in D_0$, $W_1 \in D_1$, $W_2 \in G_1$. В данном случае равенство (7.7) примет вид

$$(\lambda_{11} + \lambda_{21}) \cos\varphi_{U,3}(t_1) + (\lambda_{12} + \lambda_{21}) \sin\varphi_{U,3}(t_1) + \mid \psi_{13}(t_1) \mid -1 =$$

$$\lambda_{21} \cos\varphi_{U,3}(t_1) + \lambda_{22} \sin\varphi_{U,3}(t_1) + \mid \psi_{23}(t_1) \mid -1.$$

Отсюда, с учетом равенств (8.3), $\lambda_{11}\cos\varphi_{U,3}(t_1) + \lambda_{12}\sin\varphi_{U,3}(t_1) = 0$, $\lambda_{11}(\varphi_{U,2}(t_1) - w_{12}) - \lambda_{12}(\varphi_{U,2}(t_1) - w_{11}) = 0$, следует, что $\lambda_{11}\cos\varphi_{U,3}(t_1) + \lambda_{12}\sin\varphi_{U,3}(t_1) = 0$. Геометрический смысл этого соотношения следующий: в момент времени t_1 вектор скорости $V(t_1) \stackrel{\triangle}{=} (\cos\varphi_{U,3}(t_1), \sin\varphi_{U,3}(t_1))$ ортогонален вектору $\Lambda_1 \stackrel{\triangle}{=} (\lambda_{11}, \lambda_{12})$. Поэтому прямая $\lambda_{11}(x_2 - w_{12}) - \lambda_{12}(x_1 - w_{11}) = 0$ проходит через центр $0 \stackrel{\triangle}{=} (x_1^*, x_2^*)$ окружности, содержащей дугу D_1 и, следовательно, $\lambda_{11}(x_2^* - w_{12}) - \lambda_{12}(x_1^* - w_{11}) = 0$ Вычислим расстояния d_1, d_2 от точки (x_1^*, x_2^*) до прямых L_1, L_2 соответственно. Имеем $d_1 = (\lambda_{21}(x_2^* - w_{12}) - \lambda_{22}(x_1^* - w_{21}))/ \mid \Lambda_1 + \Lambda_2 \mid$, $d_2 = (\lambda_{21}(x_2^* - w_{12}) - \lambda_{22}(x_1^* - w_{21}))/ \mid \Lambda_2 \mid$, где $\mid \Lambda_2 \mid$, $\mid \Lambda_1 + \Lambda_2 \mid$ — соответственно длины векторов $\Lambda_2 \stackrel{\triangle}{=} (\lambda_{21}, \lambda_{22})$, $\quad \Lambda_1 + \Lambda_2 \stackrel{\triangle}{=} (\lambda_{21} + \lambda_{21},\ \lambda_{12} + \lambda_{22})$. Поскольку $d_1 = d_2$ как радиусы одной окружности, то $\mid \Lambda_2 \mid = \mid \Lambda_1 + \Lambda_2 \mid$.

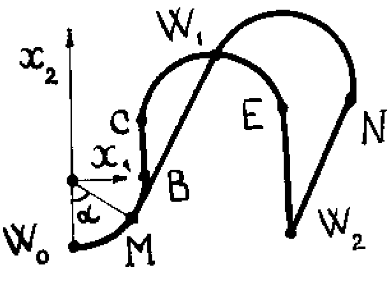

Рис. 2.

Из этого равенства следдует, что вектор Λ_1 разбивает угол между векторами Λ_2, $\Lambda_1+\Lambda_2$ пополам. Последнее возможно лишь тогда, когда точка W_1 разбивает дугу D_1 пополам. Этого дополнительного факта, следующего из соотношения (7.7), достаточно для однозначного определения оптимальной траектории.

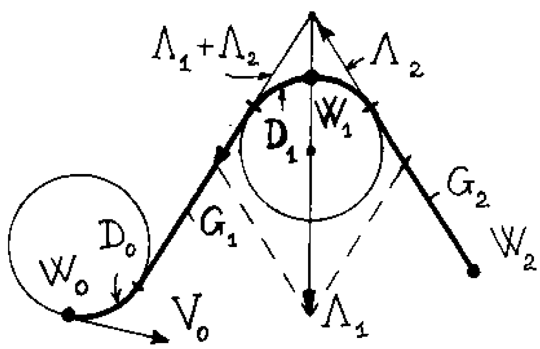

Рис. 3.

Замечание. В случае, когда $m > 2$ (m — число целевых точек W_i) из принципа максимума (6.6) также следует, что оптимальная траектория состоит из дуг окрестностей $D_i(W_i \in D_i, i = 0, 1, ..., m-1)$ и отрезков прямых $G_i(i \in \overline{1,m})$. Соотношение (7.7) позволяет выписать $m-1$ равенств, из которых будет следовать, что отрезки и дуги, составляющие оптимальную траекторию надо выбрать так, чтобы точки W_i разбивали дуги $D_i(i \in \overline{1, m-1})$ пополам. Это позволяет однозначно определить траекторию при любом m, $m \geq 2$.

Автор выражает глубокую благодарность А.Г.Ченцову за обсуждение работы и полезные советы.

Список литературы

[1] **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

[2] **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[3] **Варга Дж.** Оптимальное дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

[4] **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с.

[5] **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1969.

[6] **Куржанский А.Б., Осипов Ю.С.** К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами. //Прикл. матем. и мех., т.32, вып.2, 1968, с.194-203.

[7] **Куржанский А.Б, Осипов Ю.С.** К задаче об управлении при стесненных ограничениях. // Прикл. матем. и механ., т. 33, вып.4, с.705-719.

[8] **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1977, 253 с.

[9] **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. – 456 с.

[10] **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985, 516 с.

[11] **Батухтин В.Д., Красовский Н.Н.** Экстремальное прицеливание в нелинейной игре сближения. – Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх. Изд-во АН СССР, УНЦ, ИММ, Свердловск, 1974.

[12] **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981, 288 с.

[13] **Ченцов А.Г.** Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск. Средне-Уральское книжн.изд-во, 1985.

[14] **Ченцов А.Г.** О структуре дифференциальной игры сближения-уклонения. ВИНИТИ N 3583-80 Деп.

[15] **Ченцов А.Г.** Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения. ВИНИТИ N 1933-79 Деп.

[16] **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974, 488 с.

[17] **Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления. //Кибернетика, вып. 1, 1986, с.59-64.

[18] **Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г.** К вопросу о редукции некоторых линейных задач оптимального управления с интегральными ограничениями. //Кибернетика, вып. 4, 1990, с.59-64.

[19] **Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г.** О некоторых задачах последовательной оптимизации управляемых систем. Свердловск, 1983. – 98 с., деп. в ВИНИТИ 05.01.83. N 109- 83 Деп.

[20] **Бердышев Ю.И.** Об одной задаче последовательной оптимизации без декомпозиции во времени // Кибернетика, 1987, N 4, с.32–35.

[21] **Морина С.И., Ченцов А.Г.** Задача последовательного последовательного сближения при комбинированных ограничениях на выбор управления. Свердловск, 1987. – 25 с., деп. в ВИНИТИ 02.09.87. N 6461- В87.

[22] **Арутюнов А.В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Изд-во "Факториал", 1997, 256 с.

[23] **Захаров Г.К.** Оптимизация ступенчатых систем управления // А. и Т., 1981, N 8, с.2–9.

[24] **Медведев В.А., Розова В.Н.** Оптимальное управление ступенчатыми функциями // А. и Т., 1972, N 3, с.15–23.

[25] **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Мат.сб., 1960, т.51(93), вып.1.

[26] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976, 496 с.

[27] **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962, 895 с.

[28] **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск.: Наука и техника, 1974, 272 с.

[29] **Барбашин Е.А.** Введению в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967, 167 с.

[30] **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967, 497 с.

[31] **Хамза М.Х., Колас И. Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования. В кн.: Управление космическими аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971, с.410–418.

[32] **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка. В кн.: Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления / Тр. ИММ УНЦ АН СССР, Свердловск, 1973, вып.12, с.91–101.

[33] **Бердышев Ю.И..** Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикл. мат. и мех., 1975, т.39, вып.6, с.985–994.