ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория нелинейных колебаний

УДК 517. 925. 53

В. Е. Чернышев[1]

ВОЗМУЩЕНИЕ ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ЛОРЕНЦЕВА ТИПА

В работе рассматривается трехмерная автономная система, имеющая гетероклинический цикл, т. е. инвариантное множество, состоящее из конечного числа траекторий и их предельных множеств. Предполагается, что среди предельных множеств есть как седловые состояния равновесия, так и седловые замкнутые траектории. Такие инвариантные множества порождают хаотическое поведение траекторий в своей окрестности. Сам гетероклинический цикл не является грубым множеством и может исчезать при возмущениях системы. Однако, хаотическое инвариантное множество, им порожденное, сохраняется при $\mathbb{C}^1-$малых возмущениях исходной системы. В статье исследуется как может изменяться топология этого хаотического множества. В частности, доказано, что локально максимальное инвариантное множество, лежащее в достаточно малой окрестности исходного гетероклинического цикла, может отделяться от точек покоя и замкнутых траекторий при сколь угодно $\mathbb{C}^1-$малых возмущениях.

Введение

Имеется много примеров трехмерных автономных систем дифференциальных уравнений таких, что наличие у них достаточно простого инвариантного множества — гетероклинического цикла — влечет существование хаотического инвариантного множества в любой окрестности гетерокли-

[1] **Санкт-Петербургский государственный университет:** 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2. СПбГУ. Математико-механический факультет. Кафедра дифференциальных уравнений. E-mail: ve@VC2653.spb.edu

нического цикла, т. е. гетероклинический цикл порождает хаос. При этом хаотическое инвариантное множество сохраняется при $\mathbb{C}^1-$малых возмущениях исходной системы. Под *гетероклиническим циклом* будем понимать компактное инвариантное множество, состоящее из конечного числа траекторий системы и их $\alpha-$ и $\omega-$ предельных множеств, которые являются либо гиперболическими точками покоя, либо гиперболическими замкнутыми траекториями. При этом траектории цикла $\gamma_i,\ i \in 1:m$, можно занумеровать так, что $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1}),\ i \in 1:m-1$, и $\omega(\gamma_m) = \alpha(\gamma_1)$. Инвариантное компактное множество назовем *хаотическим*, если в нем лежит всюду плотная траектория, всюду плотны замкнутые траектории и имеется чувствительная зависимость решений от начальных данных.

В первую очередь к гетероклиническим циклам, порождающим устойчивый хаос, относятся трансверсальные гетероклинические циклы, содержащие среди предельных множеств только замкнутые гиперболические траектории, устойчивые и неустойчивые многообразия которых пересекаются трансверсально [1, 2]. Устойчивый хаос порождает также цикл, состоящий из седло-фокуса и гомоклинической к нему траектории [3].

В работе [4] был введен новый тип гетероклинических циклов, порождающих устойчивый хаос. Гетероклинические циклы этого класса содержат среди предельных множеств как точки покоя, так и замкнутые траетории, при этом точки покоя имеют седловой тип, т. е. собственные числа матрицы линейного приближения вещественные простые и два из них отрицательны. Пара циклов такого класса присутствует в системе Лоренца при рождении странного аттрактора, поэтому такие циклы были названы *циклами типа Лоренца.*

В работе [5] построение хаотического инвариантного множества, лежащего в произвольной окрестности гетероклинического цикла невозмущенной системы, проводилось построением символической динамики для отображения Пуанкаре некоторой трансверсали к траекториям системы. Для невозмущенной системы множество символов, используемое для построения символической динамики, было бесконечным. При возмущении исходной системы, разрушающем гетероклинический цикл, множество символов становилось конечным. Для невозмущенной системы гетероклинический цикл входил в замыкание хаотического инвариантного множества, которое он порождал. Поскольку все предельные множества гетероклинического цикла преполагались грубыми, то они сохранялись при $\mathbb{C}^1-$малых возмущениях. Цель настоящей статьи — показать, что можно так мало в смысле $\mathbb{C}^1$ возмутить систему, что сохраняющееся хаотическое инвариантное множество будет локально максимальным в некоторой окрестности исходного гетероклинического цикла и отойдет на конечное расстояние от предельных множеств исходного цикла. Точная формулировка этого результата будет дана в § 2 (теорема 4).

§ 1. Описание основного построения

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad X \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 4, \tag{1.1}$$

имеет гетероклинический цикл, т. е. компактное инвариантное множество $\Gamma = \bigcup\limits_{i \in 1:m} (\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i))$, где γ_i — траектории системы (1. 1), а $\alpha(\gamma_i)$ их предельные множества. При этом $\omega(\gamma_m) = \alpha(\gamma_1)$ и $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1})$, $i \in 1 : m-1$. Цикл Γ не имеет ветвления, т. е. $\alpha(\gamma_j) \cap \alpha(\gamma_i) = \Omega$ при $i \neq j$. Предельное множество $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 1 : m$, является либо точкой покоя O_i типа седло-узел, либо замкнутой седловой траекторией P_i с ориентируемым устойчивым многообразием. Каждое устойчивое многообразие W_i^s предельного множества $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 1 : m$, двумерно, т. е. цикл Γ равноразмерностный.

Введем следующие три условия на гетероклинический цикл Γ.

I. Для седловой точки покоя $O_i \in \Gamma$ обозначим через $\mu_i > 0 > \lambda_i > \nu_i$ собственные числа матрицы линейного приближения $DX(O_i)$. Потребуем, чтобы выполнялись неравенства $\lambda_i > -\mu_i$, $\lambda_i - \mu_i > \nu_i$.

II. Для цикла Γ существует непрерывный пучок $P(x)$, $x \in \Gamma$, плоскостей, инвариантный относительно дифференциала Dg^t, $t \in \mathbb{R}$, отображения g^t сдвига по траекториям системы (1. 1) на время t. При этом плоскость $P(O_i)$ совпадает с плоскостью $\langle v_i^s, v_i^u \rangle$, натянутой на собственные векторы v_i^s, v_i^u, соответствующие собственным числам μ_i, λ_i. Для точек x, лежащих на замкнутой траектории $P_j \in \Gamma$, плоскость $P(x)$ является касательной плоскостью в точке x к неустойчивому многообразию W_j^u траектории P_j.

Пусть $P_{l_1}, \ldots, P_{l_k}$ — замкнутые траектории, входящие в цикл Γ, $1 = l_1 < l_2 < \cdots < l_k$. Рассмотрим множество $\Gamma' = \Gamma \setminus \{\bigcup\limits_{i \in 1:k} \gamma_{l_i}\}$.

III. В пучке $P(x)$, $x \in \Gamma'$, можно задать ориентацию так, чтобы в плоскостях $P(O_j)$ она задавалась репером (v_i^s, v_i^u), где вектор v_i^s (v_i^u) имеет направление, совпадающее с предельным направлением вектора $X(x)$ при $x \to O_i$, $x \in \gamma_{i-1}$, $(x \in \gamma_i)$. В плоскостях $P(x)$, $x \in P_{l_i}$, $i \in 1 : m$, ориентация задается репером $(v^u(x), X(x))$, где $v^u(x)$ — касательный вектор к неустойчивому многообразию $W^u(x)$ точки x, направленный в сторону пересечения $W^u(x)$ с траекторией γ_{l_i}.

Рассмотрим $\mathbb{C}^1$-малое возмущение системы (1.1)

$$\dot{x} = X(x) + Y(x), \quad Y \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad ||Y||_{\mathbb{C}^1} < \varepsilon. \tag{1.2}$$

В работе [5] была доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть система* (1.1) *имеет равноразмерностный гетероклинический цикл* Γ*, удовлетворяющий условиям* I, II, III. *Тогда для любой его окрестности* $V(\Gamma)$ *найдется число* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что система* (1.2) *при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *обладает хаотическим инвариантным множеством, лежащим в этой окрестности.*

Обозначим через $g^t_\varepsilon(x)$ отображение сдвига на время t по траекториям системы (1.2).

Основным используемым результатом является теорема из работы [6].

Т е о р е м а 2. *Пусть равноразмерностный гетероклинический цикл* Γ *типа Лоренца системы* (1.1) *удовлетворяет условиям* I, II, III. *Тогда существуют окрестность* V *цикла* Γ *и число* $h > 0$ *такие, что при* $\varepsilon < h$ *окрестность* V *представляется в виде объединения* $\mathbb{C}^1$*−гладких кривых* $W^{ss}_\varepsilon(x),\ x \in V$*, которые вместе со своими касательными липшицевы по* x*. Это семейство инвариантно относительно отображения* $g^\tau_\varepsilon,\ \tau \in \mathbb{R}$*, т. е.* $g^\tau_\varepsilon W^{ss}_\varepsilon(x) \cap V \subset W^{ss}_\varepsilon(g^\tau_\varepsilon(x)), \quad x \in V, t \in \mathbb{R}$*. Любая точка* $x \in V$ *лежит на кривой* $W^{ss}_\varepsilon(x)$*. Если точка* $y \in W^{ss}_\varepsilon(x),\ x \in V$*, то* $W^{ss}_\varepsilon(x) = W^{ss}_\varepsilon(y)$*. Кроме того, существуют числа* $\lambda > 0,\ K > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что для любых двух точек* $z, y \in W^{ss}_\varepsilon(x,\delta) = W^{ss}_\varepsilon(x) \cap B_\delta(x),\ x \in V$ $(B_\delta(x)$ *— шар радиуса* δ *с центром в точке* $x)$*, выполняется неравенство*

$$d(g^t_\varepsilon(z), g^t_\varepsilon(y)) \le K\exp(-\lambda t) d(z,y),$$

если точки $g^\tau_\varepsilon(y), g^\tau_\varepsilon(z) \in V$ *при* $\tau \in [0,t]$.

Таким образом, семейство кривых $W^{ss}_\varepsilon(x),\ x \in V$, образует $\mathbb{C}^1$− ламинацию на V [7], инвариантную относительно отображения g^t_ε, $\varepsilon < h$, $t \in \mathbb{R}$. При этом g^t_ε — отображение локального сжатия вдоль слоев этой ламинации.

Теорема 2 позволяет при изучении инвариантных множеств потока g^t_ε и отображений Пуанкаре переходить к фактор-потоку и фактор-отображению, отождествляя точки, лежащие на одной кривой $W^{ss}_\varepsilon(x,\delta)$, которую далее будем называть сильно устойчивым многообразием точки x размера δ.

Чтобы описать возмущение системы (1.1), при котором инвариантное хаотическое множество отходит от предельных множеств, понадобятся некоторые дополнительные построения и свойства гетероклинических циклов типа Лоренца. Для простоты обозначений будем далее рассматривать случай, когда исходный цикл Γ содержит среди предельных множеств лишь замкнутую траекторию P_1. Нумерацию траекторий в Γ выберем так, чтобы $\alpha(\gamma_1) = P_1$. Таким образом, остальные предельные множества $\alpha(\gamma_i) = O_i$ суть седловые точки покоя и $\omega(\gamma_m) = P_1$. Все построения будем производить в стандартной окрестности $V(\Gamma)$ цикла Γ.

$$V(\Gamma) = \bigcup_{i\in 1:m} (V_i \cup Q_i), \tag{1.3}$$

где V_i — окрестность точки покоя O_i, $i \in 2 : m$, V_1 — окрестность замкнутой траектории P_1, а Q_i — траекторная окрестность дуг траекторий γ_i с концами на границах окрестностей V_i и V_{i+1}.

В работе [5] было доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть гетероклинический цикл Γ удовлетворяет условиям* I, II, III. *Тогда существует окрестность $V(\Gamma)$ такая, что в ней система* (1.1) *обладает локально инвариантной гладкой поверхностью $Q(\Gamma)$, содержащей множество $\Gamma' = \Gamma \setminus P_1$. При этом цикл Γ делит поверхность $Q(\Gamma)$ на две компоненты $Q_1(\Gamma)$, $Q_2(\Gamma)$. Компонента $Q_1(\Gamma)$ содержится в неустойчивой поверхности W_1^u замкнутой траектории P_1, а компонента $Q_2(\Gamma)$ состоит из траекторий, покидающих окрестность $V(\Gamma)$. Поверхность $Q(\Gamma)$ трансверсальна к кривым $W_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$, $x \in Q(\Gamma)$ и пучок касательных плоскостей T_xQ, $x \in \Gamma$, к поверхности Q совпадает с пучком $P(x)$, $x \in \Gamma$, из условия* II.

Таким образом, уменьшая стандартную окрестность $V(\Gamma)$ и выбирая число ε_0 достаточно малым, можно считать, что $V(\Gamma) \subset \{\bigcup W_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in Q(\Gamma)\}$, если в системе (1.2) $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Возмущение системы (1.1), отделяющее хаотическое инвариантное множество от предельных множеств, будем далее строить так, чтобы инвариантная поверхность $Q(\Gamma)$ невозмущенной системы оставалась инвариантной, а в гетероклиническом цикле Γ лишь последняя траектория γ_m заменялась бы на некоторую траекторию $\gamma_m' \subset Q(\Gamma)$. При этом траектория γ_m' будет неустойчивой сепаратрисой седла O_m возмущенной системы, близкой к траектории γ_m.

Опишем для этого поведение траекторий системы (1.1) на поверхности $Q(\Gamma)$. Рассмотрим трансверсаль S к траекториям системы (1. 1), содержащуюся в окрестности $V(\Gamma)$, проведенную через произвольную точку замкнутой траектории P_1. Выберем координаты ξ, η на ней так, чтобы начало координат совпадало с точкой $S \cap P_1$, а оси ξ и η совпадали с устойчивым и неустойчивым многообразиями отображения первого возвращения T по траекториям системы (1. 1), не покидающим окрестности V_1 замкнутой траектории P_1, некоторой окрестности начала на S в S. Траектория γ_m пересекает ось ξ по последовательности точек, сходящейся к началу. Поэтому можно выбрать и зафиксировать точку $y_0 = (\xi_0, 0) \in S \cap \gamma_m$ так, чтобы она попала в область определения отображения Пуанкаре T. Выберем также точку $x_0 = (0, \eta_0) \in S \cap \gamma_1$. Обозначим через s_1 и s_2 компоненты связности множества $S \cap Q(\Gamma)$, содержащие точки y_0 и x_0 соответственно. Ясно, что это гладкие кривые. Кривую s_2 параметризуем параметром $\bar\eta = \eta - \eta_0$

$$s_2 = \{(0, \eta) : \ |\bar\eta| < \rho_2\}.$$

В силу трансверсальности поверхности $Q(\Gamma)$ и оси ξ, что следует из условия II, если точка x_0 достаточно близка к началу, кривая s_1 параметризуется координатой η

$$s_1 = \{(\xi, \eta) \in S : \ \xi = f(\eta), \ |\eta| < \rho_1\},$$

где $f \in \mathbb{C}^1(|\eta| < \rho)$. Точка y_0 делит кривую s_2 на две части s_+ и s_-, где s_+ — часть s_2, в которой $\bar\eta > 0$. Аналогично обозначим через s^+ часть кривой s_1, в которой $\eta > 0$. В работе [5] доказано, что определено отображение h по траекториям системы (1. 1) одной из кривых $s_+, \ s_-$ в кривую s^+, имеющее в координатах $\bar\eta$ и η вид

$$\begin{gathered} \eta = h(\bar\eta) = C|\bar\eta|^E + q(|\bar\eta|^E) \\ h'(\eta') = CE|\bar\eta|^{E-1} + r(|\bar\eta|^{E-1}), \end{gathered} \tag{1. 4}$$

где $E = |\frac{\lambda_2}{\mu_2}| \cdot \dots \cdot |\frac{\lambda_m}{\mu_m}|, \quad C > 0$, а функции $q(t), \ r(t)$ являются бесконечно малыми при $t \to 0$. Так как $E < 1$, то ρ_2 можно считать столь малым, что h — отображение растяжения с коэффициентом 2.

Будем считать для определенности, что кривая s_+ отображается в кривую s^+. Это означает, что $s_+, \ s^+ \subset Q_1(\Gamma)$. Тогда по теореме 3 траектории, проходящие через $s_- \subset Q_2(\Gamma)$, покидают окрестность $V(\Gamma)$. Случай, когда $s_- \subset Q_1(\Gamma)$, а $s_+ \subset Q_2(\Gamma)$, ничем не отличается от рассматриваемого.

Возьмем дугу $\widetilde{\gamma}$ траектории системы (1. 1), пересекающую трансверсаль S в точке y. Определим множество

$$W^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta)=\bigcup_{x\in\widetilde{\gamma}}W^{ss}(x,\delta).$$

Из теоремы 2 следует, что это гладкая поверхность. Очевидно, она трансверсальна S. Поэтому $w^{ss}(y,\delta)=S\cap W^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta)$ — гладкая кривая. Нетрудно доказать, что она не зависит от выбора дуги $\widetilde{\gamma}$, если последняя достаточно велика. Заметим, что если $x=g^t(y)$ и $x,y\in S$, то отображение g^t переводит кривую $\overline{w^{ss}(y,\delta)}$ в кривую $w^{ss}(x,\delta)$, где черта над множеством означает замыкание. Это следует из теоремы 2, точнее из того, что отображение g^t экспоненциально сжимает вдоль слоев.

§ 2. Построение возмущенной системы

Сформулируем основной результат статьи.

Т е о р е м а 4. *Пусть система* (1. 1) *имеет равноразмерностный гетероклинический цикл* Γ *типа Лоренца, удовлетворяющий условиям* I, II, III. *Тогда существует его окрестность* $W(\Gamma)$ *такая, что для любого* $\varepsilon_0>0$ *найдется система* (1. 2), *в которой* $\varepsilon<\varepsilon_0$ *такая, что она имеет локально максимальное в окрестности* $W(\Gamma)$ *хаотическое компактное инвариантное множество* J*; при этом множество* J *не содержит точек покоя и замкнутых траекторий, которые получаются из точек покоя и замкнутых траекторий цикла* Γ *при их возмущении.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим окрестность $W(\Gamma)$. Сначала выберем стандартную окрестность $V(\Gamma)$, определенную равенством (1. 3) так, чтобы она лежала в окрестностях цикла Γ, фигурирующих в формулировках теорем 2, 3. Можно считать, что трансверсаль $S\subset V_1$. Рассмотрим на S подмножество $D=\{\cup w^{ss}(x,\delta_1),\ \ x\in s_2\},\ \ \delta_1<\delta$. Ясно, что это окрестность точки y_0 на трансверсали S. Выберем число δ_1 столь малым, чтобы траектории точек множества D пересекали границу окрестности V_2 точки покоя O_2. Можно считать, что числа ρ_1 и ρ_2 в определении кривых s_1 и s_2 таковы, что $h\,s_+\subset s^+$. Выберем теперь окрестность Δ точки x_0 на S $\ \Delta=\{\cup\, w^{ss}(x,\delta_1),\ x\in s_1\},\ \delta_1<\delta$. Число δ_1 будем считать столь малым, что $T\,\Delta\cap\Delta=\Omega,\ T\,D\cap D=\Omega$ и $D\cap\Delta=\Omega$. По λ- лемме [8] существует такое число $m_0\in N$, что кривая $T^m s^+$ пересекает каждую кривую $w^{ss}(x,\delta_1),\ x\in s_2$, при $m>m_0$. Изменим множество D. Множество D — криволинейный четырехугольник. Две "вертикальные"его стороны совпадают с кривыми $w^{ss}((0,\eta_0\pm\rho_2),\delta_1)$, а из двух "горизонтальных"одна лежит в полуплоскости $\xi > 0$, а другая — в полуплоскости $\xi < 0$. Заменим первую горизонтальную сторону на гладкую кривую, лежащую между кривыми $T^{m_0-1}s^+$ и $T^{m_0}s^+$ так, чтобы множества $T^{m_0}\Delta$ и $T^{m_0-1}\Delta$ не пересекались с ней. Сохраним старое обозначение D за полученным четырехугольником.

Определим возмущение системы (1. 1) так, чтобы оно сохраняло все предельные множества цикла Γ, их устойчивые и неустойчивые многообразия, кроме траектории γ_m, и не разрушало бы поверхность $Q(\Gamma)$. При этом траектория γ_m пересекала бы секущую S в точке $y(\mu) \in \Delta$ с координатами $(f(\mu), \mu)$, $\mu > 0$. Таким возмущением является поворот векторного поля на $Q(\Gamma)$ в окрестности V_m в положительном направлении, сосредоточенный в некотором конусе, содержащем γ_m. Ясно, что такое возмущение можно сделать сколь угодно $\mathbb{C}^1-$малым, если число μ достаточно мало.

Окрестность $W(\Gamma)$ определим равенством (1. 3), заменив в нем трубки траекторий Q_1, Q_m. В качестве новой трубки траекторий Q_1 возьмем объединение дуг траекторий возмущенной системы (1. 2) с концами на D и границе V_2, а новая трубка Q_m состоит из всех дуг траекторий системы (1. 2) с концами на множестве Δ и границе V_m. При достаточно малом возмущении множество $W(\Gamma)$ является окрестностью цикла Γ.

Поскольку система (1. 2) отличается от системы (1. 1) лишь поворотом, сосредоточенным в V_m, то определено отображение h_μ кривой s_+ в кривую s^+ по траекториям системы (1. 2), лежащим на $Q(\Gamma)$. В координатах $\eta, \bar{\eta}$ оно имеет вид

$$\eta = h_\mu(\bar{\eta}) = \mu + C(\mu)\bar{\eta}^E + q_\mu(\bar{\eta}^E), \quad 0 < E < 1,$$

где q_μ — бесконечно малая в нуле функция. Поскольку $C(0) = 0$, $C(\mu)$ — непрерывна по μ и $E < 1$, то числа ρ_2, μ можно считать столь малыми, что h_μ — отображение растяжения с коэффициентом 2. Будем считать μ столь малым, что $h_\mu \, s_+ \subset s^+$ и далее будем опускать в обозначениях μ.

Как и в случае невозмущенной системы через кривую s_- проходят траектории, покидающие окрестность $W(\Gamma)$, так как они не попадают в трубку траекторий Q_2.

В силу того, что отображение сдвига по траекториям сжимает вдоль кривых $W^{ss}_\varepsilon(x, \delta)$, и определения четырехугольников D и Δ на множестве $D_+ = \{\cup w^{ss}(x, \delta_1),\ x \in s_+\} \cap D$ определено отображение H по траекториям системы (1. 2), не выходящим из окрестности $W(\Gamma)$, $H : D_+ \to \Delta$. При этом $\overline{H\, w^{ss}(x, \delta_1)} \subset w^{ss}(h(x), \delta)$ и для $z, y \in w^{ss}(x, \delta_1)$ выполнено

$d(H(x), H(y)) < \gamma\, d(x, y)$, где $\gamma < 1$. Рассмотрим множество

$$\Delta^+ = \{\cup\, w^{ss}(x, \delta),\ x \in s^+,\ x = (f(\eta), \eta),\ \eta > \mu\}.$$

Траектории, проходящие через точки множества $\Delta \setminus \overline{\Delta^+}$, покидают окрестность $W(\Gamma)$ при убывании t. Они не попадают в трубку траекторий Q_{m-1}.

По выбору m_0 имеем $T^m s_1 \cap w^{ss}(x, \delta_1) \neq \Omega,\ x \in s_2$, при $m \geq m_0$ и $T^m s_1 \cap D = \Omega$ при $m < m_0$. Число μ можно считать столь малым, что $T^m s^+ \cap w^{ss}(x, \delta_1) \neq \Omega,\ x \in s_2,\ m_0 \leq m \leq m_0 + 2$. Для любого числа $n > m_0 + 2$ найдется $\mu_n > 0$ такое, что $T^n y(\mu_n) \in D \setminus \overline{D^+}$. При этом $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу того, что $T\, D \cap D = \Omega, \quad T^{n+1} s^+ \cap D = \Omega$.

Рассмотрим произвольное число $\varepsilon_0 > 0$ и выберем числа $n_0 \geq m_0 + 2$ и μ_{n_0} так, что соответствующее им возмущение $Y(x)$ системы (1. 1) $||Y||_{\mathbb{C}^1} < \varepsilon_0$. Тогда множество $\Sigma_m = T^m \Delta^+ \cap D^+ = = \Omega$, если $n_0 < m$ или $m < m_0$, и пересекает каждую кривую $w^{ss}(x, \delta_1),\ x \in s_+$, если $m_0 \leq m \leq n_0$.

Обозначим $\Delta_m = T^{-m} \Sigma_m \subset \Delta^+$.

Определим отображение $G:\ \{\cup_{m \in m_0 : n_0} \Delta_m\} \to D^+$, положив $G(x) = T^m x$ для $x \in \Delta_m$. На каждом множестве Δ_m отображение G — диффеоморфизм, который растягивает с коэффициентом 2 в направлении оси η, если число ρ_2 достаточно мало, поскольку точка $(0, 0)$ является седловой неподвижной точкой отображения T и ось η — ее неустойчивое многообразие.

Из определения множества Δ_m следует, что $\Delta_m = \{\cup\, w^{ss}(x, \delta_1),\ \ x \in \delta_m\}$, где δ_m некоторый интервал на кривой s^+, и что $\overline{G(w^{ss}(x, \delta_1))} \subset w^{ss}(G(x), \delta_1) \cap D^+,\ x \in \delta_m$. По теореме 2 отображение G сжимает вдоль кривых $W^{ss}(x, \delta)$. Поэтому, если δ_1 достаточно мало, то $d(G(y), G(z)) < d(y, z)/2,\ y, z \in w^{ss}(x, \delta_1),\ x \in \delta_m$.

Пусть $d_m = h^{-1} \delta_m \subset s_+$, а $D_m = \{\cup\, w^{ss}(x, \delta_1),\ x \in d_m\} \cap D^+$. Заметим, что по выбору точки $y(\mu_n)$ $\overline{d_m} \subset s_+$, а множества D_m отделены от W_1^s на конечное расстояние. Так как h растягивает с коэффициентом 2, то $\operatorname{diam} d_m < \rho_1/2$. Из того, что G сжимает вдоль кривых $w^{ss}(x, \delta_1)$, следует, что $\operatorname{diam} \{w^{ss}(x, \delta_1) \cap \Sigma_m\} < \rho_1/2$, $x \in d_m$.

На каждом из множеств $D_m, m_0 \leq m \leq n_0$, определена композиция $G \cdot H = F:\ D_m \to \Sigma_m$, при этом $F(D_m) \subset \Sigma_m$ и $F(D_m) \neq \Sigma_m$.
Кроме того, из свойств отображений G и H следует, что $F\, D_m \cap w^{ss}(x, \delta_1) \neq \Omega$, $x \in s^+$, $\overline{F(w^{ss}(x, \delta_1))} \subset w^{ss}(F(x), \delta_1) \cap \Sigma_m$, $x \in d_m$, и отображение F сжимает вдоль кривых $w^{ss}(x, \delta_1)$, $x \in D_m$, с коэффициентом $1/2$ и растягивает координату η в два раза.

Рассмотрим пространство Ω, состоящее из бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \{w_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$, $\omega_s \in N$, $m_0 \le \omega_s \le n_0$, $s \in Z$. Введем стандартную метрику ρ на Ω, положив

$$\rho(u,v) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|v_s - u_s|}{2^{|s|}(1 + |v_s - u_s|)}.$$

В этой метрике Ω — компактное вполне несвязное совершенное множество [9].

Л е м м а 1. *Для любой точки $\omega \in \Omega$ существует единственная точка $x = \Psi(\omega) \in D^+$ такая, что для точки x определены все итерации отображения F и $F^s(x) \in D_{\omega_s}$, $s \in Z$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\omega \in \Omega$ и образуем множество $R_i = \{x \in D_{\omega_0} : \ F^s(x) \in D_{\omega_s}, \ s \in 0 : i\}$. Докажем по индукции, что $R_i = \{\cup\, w^{ss}(x,\delta_1), \ x \in d^i\} \cap D^+$, где d^i — интервал такой, что $\overline{d^i} \subset d^{i-1}$ и $\operatorname{diam} d^i \le \rho_1/2^i$. Кроме того, $F^{i+1}R_i \cap w^{ss}(x,\delta_1)$ не пусто и содержится в Σ_{ω_i} для $x \in s_+$. База индукции уже была доказана выше, поскольку $R_0 = D_{\omega_0}$. Осуществим индукционный переход. $R_{i+1} = F^{-(i+1)}(F^{i+1}R_i \cap D_{\omega_{i+1}})$. По индукционному предположению множество $F^{i+1}R_i \cap w^{ss}(x,\delta_1) \ne \Omega$ и содержится в Σ_{ω_i} для $x \in s_+$. Множество $D_{\omega_{i+1}} = \{\cup\, w^{ss}(x,\delta_1), \ x \in d_{\omega_{i+1}}\}$, где $d_{\omega_{i+1}}$ — интервал и $\overline{d_{\omega_{i+1}}} \subset s_+$. Поэтому множество $R_{i+1} = \{\cup\, w^{ss}(x,\delta_1), \ x \in d^{i+1}\}$, где d^{i+1} — интервал и $\overline{d^{i+1}} \subset d^i$. Оценка его длины получается из того, что отображение F сжимает в направлении оси η в два раза. Осталось проверить, что $F^{i+2}R_{i+1}$ пересекает каждую кривую $w^{ss}(x,\delta_1)$, $x \in s_+$.

$$F^{i+2}R_{i+1} = F^{i+2}F^{-(i+1)}(F^{i+1}R_i \cap D_{\omega_{i+1}}) = F(F^{i+1}R_i \cap D_{\omega_{i+1}}).$$

По индукционному предположению пересечение множества $F^{i+1}R_i$ с каждой кривой $w^{ss}(x,\delta_1)$, $x \in d_{\omega_{i+1}}$, не пусто. Отображение F переводит кривую $w^{ss}(x,\delta_1)$ в кривую $w^{ss}(F(x),\delta_1) \cap D^+$. Поэтому на каждой кривой $w^{ss}(F(x),\delta_1) \cap D^+$, $x \in d_{\omega_{i+1}}$, есть точки множества $F^{i+2}R_{i+1}$. Осталось заметить, что из свойств множества $D_{\omega_{i+1}}$ следует, что для каждой кривой $w^{ss}(y,\delta_1)$, $y \in s_+$, найдется точка $x \in d_{\omega_{i+1}}$ такая, что $\Omega \ne w^{ss}(F(x),\delta_1) \cap D^+ \subset w^{ss}(y,\delta_1)$.

Рассмотрим последовательность вложенных сегментов $d_0 \supset \overline{d_1} \supset \overline{d_2} \supset \ldots$. Их пересечение состоит из одной точки z, так как $\operatorname{diam} d_n \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим кривую $w^{ss}(z,\delta_1)$. Для точек этой кривой, в силу определения точки z и того, что $F\, w^{ss}(x,\delta_1) \subset w^{ss}(F(x),\delta_1) \cap D^+$, имеем

$F^s(y) \in D_{\omega_s},\ y \in w^{ss}(z,\delta_1),\ s \in N$. Докажем, что существует единственная точка $\Psi(\omega) \in w^{ss}(x,\delta_1)$ такая, что найдется последовательность точек $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что $y_k \in D_{\omega_{-k}}$ и $F^k y_k = \Psi(\omega)$. Заметим, что поскольку множество $\Sigma_m,\ m_0 \le m \le n_0$, пересекает все кривые $w^{ss}(x,\delta_1),\ x \in s_+$, то для любой точки x и любого множества $D_m,\ m_0 \le m \le n_0$, найдется единственная точка $y \in d_m$ такая, что $F\, w^{ss}(y,\delta_1) \subset w^{ss}(x,\delta_1)$. Отсюда следует, что существует единственная последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $z_k \in d_{\omega_{-k}}$ и $F^k w^{ss}(z_k,\delta_1) \subset w^{ss}(x,\delta_1)$. Так как $\overline{F\, w^{ss}(z_k,\delta_1)} \subset w^{ss}(F(z_k),\delta_1) \cap D^+ \subset w^{ss}(z_{k-1},\delta_1)$, то множества $\overline{F^k w^{ss}(z_k,\delta_1)},\ k \in N$, образуют последовательность вложенных дуг, лежащих на кривой $w^{ss}(z,\delta_1)$. Их пересечение состоит из одной точки $\Psi(\omega)$, так как $\operatorname{diam}(F^k w^{ss}(z_k,\delta_1)) \le \delta_1/2^k$. Из определения z_k и того, что $\Psi(\omega) = F^k(x_k), x_k \in w^{ss}(z_k,\delta_1)$, следует, что $\Psi(\omega)$ — искомая точка. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим множество $I = \{\Psi(\omega), \omega \in \Omega\}$. Очевидно, что I — инвариантное множество отображения F. Определим отображение сдвига σ в пространстве Ω, положив $\sigma(\omega) = v = \{v_s\}_{-\infty}^{\infty}$, где $v_s = \omega_{s+1},\ s \in Z$. Из определения отображения Ψ следует, что $F\,\Psi = \Psi\,\sigma$, т. е. Ψ сопрягает отображения $F|_I$ и σ.

Докажем, что Ψ — гомеоморфизм. Для этого в силу компактности Ω достаточно доказать непрерывность и взаимную однозначность Ψ. Последняя очевидна, так как множества $D_k,\ m_0 \le m \le n_0$, не пересекаются, а какая-то итерация F отображает точки $\Psi(\omega),\ \Psi(v),\ \omega \ne v$, в разные множества D_k.

Л е м м а 2. *Отображение Ψ непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность точек $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$, $v_k = \{v_s^k\}_{s=-\infty}^{\infty}$, сходится к точке $\omega = \{\omega_s\}_{s=-\infty}^{\infty}$ в метрике ρ. Сходимость в метрике ρ означает, что для любого n найдется номер $k(n)$ такой, что $v_s^k = \omega_s$ при $s \in -n : n,\ k > k(n)$, или, что то же самое, точка $\Psi(v_k),\ k > k(n)$, лежит во множестве R_n, определенном в лемме 1 по последовательности ω. $R_n = \{w^{ss}(x,\delta_1),\ x \in d^n\} \cap D^+$, $\operatorname{diam} d^n \le \rho_1/2^n$. Рассмотрим множество $R^n = \{x \in D^+ :$ определены все итерации $F^{-s}(x), s \in 1 : n$, и $F^{-s}(x) \in D_{\omega_{-s}}\}$. Из сказанного выше следует, что $\Psi(v_k) \in R^n$ при $k > k(n)$. Множество R^n можно представить иначе: $R^n = F^n(\{y \in D_{\omega_{-n}} :\ F^s(y) \in D_{\omega_{-n+s}},\ s \in 0 : n\})$. Легко видеть, что множество, стоящее в скобках, определяется по последовательности $\sigma^{-n}\omega$ так же, как множество R_n определялось в лемме 1 по последовательности ω. Поэтому оно обладает теми же свойствами, в частности оно имеет вид $\{\cup\, w^{ss}(x,\delta_1),\ x \in \widetilde{d}^n\}$, где $\widetilde{d}^n$

— интервал $\widetilde{d}^n \subset d_{\omega_{-n}}$. Из этого представления следует, что R^n — прямоугольник такой, что $\mathrm{diam}\,(R^n \cap w^{ss}(x,\delta_1)) < \delta_1/2^n$, поскольку отображение F сжимает вдоль кривых $w^{ss}(x,\delta_1),\ x \in s_+$. Итак, точки $\Psi(v_k),\ k > k(n)$, лежат во множестве $A_n = R_n \cap R^n$, где $R_n = \{w^{ss}(x,\delta_1),\ x \in d^n\} \cap D^+$ и $\mathrm{diam}\, d^n \leq \rho_1/2^n$. Семейство кривых $w^{ss}(x,\delta_1),\ x \in s_+$, состоит из гладких кривых, которые по теореме 2 вместе со своим касательными липшецевы по x. Отсюда следует, что существует постоянная M, не зависящая от n и точки $\Psi(\omega)$ такая, что $\mathrm{diam}\, A_n \leq M \max(\delta_1/2^n, \rho_1/2^n) = K/2^n,\ n \in N$. Следовательно, последовательность $\Psi(v_k) \to \Psi(\omega)$ при $k \to \infty$. Лемма 2 доказана.

Хорошо известно [9], что инвариантное множество Ω отображения σ хаотично. Свойство хаотичности сохраняется при топологическом сопряжении. Поэтому I — компактное хаотическое инвариантное множество отображения $F|_A$, где $A = \{\cup D_m,\, m_0 \leq m \leq n_0\}$.

Рассмотрим множество J, состоящее из траекторий системы (1. 2), проходящих через точки множества I. По интегральной непрерывности траектории множества J наследуют рекуррентные свойства траекторий отображения F. Следовательно, J — хаотическое компактное инвариантное множество системы (1. 2). Множество J по своему построению не содержит траекторий асимптотических к предельным множествам P_1 и $O_i,\ i \in 2 : m$, системы (1. 2), в частности, траекторий $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. В силу компактности J и седлового характера предельных множеств получим, что множество J отделено от последних.

Осталось показать, что J локально максимально. Выберем такую окрестность $O(J)$ множества J, которая не содержит предельных множеств цикла Γ и лежит в $W(\Gamma)$. Как отмечалось в процессе доказательства, траектории, проходящие через точки множества $D \setminus \overline{D^+}$, покидают окрестность $W(\Gamma)$ при возрастании t, а траектории, проходящие через точки множества $\Delta \setminus \overline{\Delta^+}$, — при убывании t. Траектории, проходящие через точки множества $\overline{D^+} \setminus D^+$ являются асимптотическими к предельным множествам цикла Γ. Поэтому они покинут окрестность $O(\Gamma)$. Из траекторий, проходящих через точки множества $\overline{\Delta^+}$ только те могут оставаться в окрестности $W(\Gamma)$, которые пересекут множество D^+, не выходя из окрестности V_1. Они пересекают D^+ в точках множества A. Множество I — максимальное инвариантное множество отображения $F|_A$. Поэтому траектории, лежащие в окрестности $O(J)$, содержатся во множестве J. Теорема 4 доказана.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 96–01–00421). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2.1 – 326.53).

Список литературы

1. *Devaney R. L.* An introduction to Chaotic Dynamical Systems // Benjamin / Cummings: Melo Park. CA. 1986.

2. *Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре-Биргоффа // Мат. сб., 1967. Т. 74, N 3.

3. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. Москва, 1977. 304 с.

4. *Шильников Л. П.* К вопросу о расширенной окрестности седло-фокуса // Мат. сб., 1970. Т. 81, N 1.

5. *Чернышев В. Е.* Бифуркации контуров из особых траекторий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1., 1992. Вып. 2 (N 8). С. 52–57.

6. *Чернышев В. Е.* Сильно устойчивые слоения над контурами Лоренцева типа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1., 1996. Вып. 3 (N 15). С. 46–53.

7. *Аносов Д. В., Арансон С. Х. и др.* Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундам. направления. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 9. С. 5–238.

8. *Пилюгин С. Ю.* Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Ленинград. Изд. Ленингр. ун-та, 1988. 158 с.

9. *Wiggins S.* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos // Springer-Verlag. New Jork., 1990.