ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ЛОКАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В. М. Лагодинский

Санкт-Петербург, Россия.

1. Выбор подхода

В этой работе изучаются некоторые свойства голоморфных функций локальных дифференциальных операторов и линейных уравнений, содержащих такие функции операторов. Определение этих функций было предложено автором [1].

Проблема определения функции дифференциального оператора, то есть построения отображения множества пар, каждая из которых включает функцию комплексной переменной и линейный дифференциальный оператор, в множество линейных операторов имеет как теоретический, так и прикладной интерес. С теоретической точки зрения решение этой проблемы позволяет расширить множество линейных дифференциальных операторов — определить понятие линейного дифференциального оператора бесконечного порядка и изучать уравнения, содержащие такие операторы — линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка. И для некоторых прикладных теорий множество дифференциальных операторов и уравнений конечного порядка оказывается слишком узким. Использование в этих теориях неполиномиальных функций дифференциальных операторов могло бы дать возможность получать уравнения, обладающие определенными, заранее заданными симметриями, и, в то же время, удовлетворяющие другим требованиям данной прикладной теории.

Известно два подхода к решению указанной проблемы. Первый из них основан на определении функции самосопряженного оператора, данном И. фон Нейманом [2]. Функции комплексной переменной $f(z)$ и самосопряженному оператору A, задаваемому в виде спектрального разложения:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda,$$

где E_λ — семейство проекционных операторов, называемое разложением единицы для оператора A, сопоставляется самосопряженный оператор со спектральным разложением

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dE_\lambda.$$

Очевидно, это определение является непосредственным обобщением определения функции матрицы в конечномерном линейном пространстве [3]. Заметим, что в соответствии с определением И. фон Неймана операторы A и $f(A)$ имеют общую систему собственных функций.

Наиболее употребительной реализацией этого определения являются псевдодифференциальные операторы [4], причем здесь функцию $f(z)$ называют символом оператора, а роль оператора-аргумента A играет самосопряженный оператор $-i\partial_x = -id/dx$, определенный в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R})$, точнее, его область определения $D(-i\partial_x) = \{\, u \in L^2(\mathbf{R}) : u' \in L^2(\mathbf{R}) \,\}$, где u' — обобщенная производная. Поскольку (обобщенными) собственными функциями этого оператора являются экспоненты $\exp(ipx)$, то действие оператора $f(-i\partial_x)$ на $u \in D(-i\partial_x)$ определяется с помощью преобразования Фурье.

Важным примером использования псевдодифференциальных операторов является их применение в релятивистской квантовой механике [5-7], оно связано с тем фактом, что релятивистское выражение энергии через импульс $\varepsilon = \sqrt{m^2+p^2}$, в отличие от соответствующего нерелятивистского $\varepsilon = m + (2m)^{-1}p^2$ — не полином.

В другом подходе [8-11] голоморфной функции $f(z)$ (которую называют либо символом, либо характеристической функцией) сопоставляют бесконечный ряд, имеющий формальный вид ряда Тейлора по степеням оператора дифференцирования:

$$f(\partial_x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \partial_x^n, \tag{1}$$

где $f_n = f^{(n)}(0)/n!$ — коэффициенты Тейлора функции $f(z)$, и исследуют линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка $f(\partial_x)u(x) = g(x)$, где $g(x)$ — известная функция. Рассматриваются и уравнения более общего вида:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) y^{(k)},$$

где $P_k(x)$ — полиномы степени n_k.

Очевидно, для построения некоторого обобщения теории дифференциальных уравнений надо выбрать такой подход, который приводит к множеству уравнений, в которое входят и дифференциальные уравнения конечного порядка. Если определение функции оператора пригодно для этой цели, в случае полиномиальной функции дифференциального оператора конечного порядка оно должно давать те операторы, которые могут содержаться в дифференциальном уравнении конечного порядка.

Пусть, например, $A = i\partial_x$, а символ $f(z) = z^2$. Самосопряженный оператор $i\partial_x$ может быть определен, как известно, на функциях $u\colon P \to \mathbf{C}$, где либо $P = \mathbf{R}$, либо $P = [a,b] \subseteq \mathbf{R}^1$, если же $P = [a,\infty)$, либо $P = (-\infty, b]$, то он определен быть не может [12]. Отсюда следует, что и квадрат его в смысле И. фон Неймана при $P = [a,\infty)$ или $P = (-\infty,b]$ не может быть определен.

Но дифференциальное уравнение, например, такое:

$$\big(\partial_x^2 + V(x) + \lambda\big)u(x) = 0, \qquad \forall x \in P, \tag{2}$$

где $V(x)$ — известная функция, имеет смысл не только при $P = [a,\infty)$ или $(-\infty,a]$, P может быть любым связным подмножеством $\mathbf{C}$. Действительно, это уравнение имеет общее решение, и находят это решение, используя определение оператора ∂_x^2. Но здесь это не квадрат самосопряженного оператора $i\partial_x$ с противоположным знаком — правило, по которому он действует, не зависит от P, хотя самосопряженный оператор $i\partial_x$ не может быть определен на $P = [a, \infty)$ или $P \not\subseteq \mathbf{R}$. Это вообще не самосопряженный оператор: во-первых, потому, что он определен и при $P \not\subseteq \mathbf{R}$, во-вторых, потому, что не заданы краевые условия.

Оператор двукратного дифференцирования ∂_x^2 принадлежит к классу локальных операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Пусть G — множество всех комплекснозначных функций u вещественной переменной x, каждая из которых имеет непустую область определения. Линейный оператор $A : G_A \to G$ называется локальным, если для любого непустого открытого связного множества $P_0 \subseteq \mathbf{R}^1$ из $u(x) = 0$, $\forall x \in P_0$ следует $u \in G_A$ и $(Au)(x) = 0$, $\forall x \in P_0$.*[1]

Очевидно, локальными являются операторы умножения на функцию независимой переменной и операторы n-кратного дифференцирования (при их классическом определении). Кроме того, любая конечная линейная комбинация локальных операторов является локальным оператором. Наоборот, интегральные операторы, конечно, нелокальны. Нелокальны псевдодифференциальные операторы, поскольку преобразование Фурье включает интегрирование. Любой самосопряженный оператор, даже самосопряженный вариант оператора $i\partial_x$, нелокален, причем по двум причинам: во-первых, функция принадлежит его области определения только если и она, и ее образ квадратично интегрируемы, во-вторых, в определении самосопряженного дифференциального оператора используются не классические, а обобщенные производные, которые определяются через интегралы.

Особо следует отметить, что нелокальны встречающиеся в литературе [13] микролокальные операторы — так иногда называют псевдодифференциальные операторы.

Итак, в уравнении (2) выражение ∂_x^2 обозначает не самосопряженный, а локальный оператор. Самосопряженный оператор соответствует конкретной краевой задаче для уравнения (2), если эта задача включает подходящие краевые условия, то есть одному локальному оператору ∂_x^2 соответствует несчетное множество различных самосопряженных операторов. Более того, самосопряженный оператор в виде спектрального разложения, как в определении И. фон Неймана, может быть задан только тогда, ко-

[1]В книге [4] приводится менее подробное определение и замечание, что псевдодифференциальные операторы нелокальны.

гда известны все собственные функции, то есть он является не элементом условия задачи, не инструментом для ее решения, а результатом решения. Конечно, им иногда можно воспользоваться для решения другой задачи, достаточно близкой к первой, с помощью теории возмущений.

Заметим, что даже при $V(x) \equiv 0$, самосопряженный оператор, соответствующий краевой задаче для уравнения (2), вовсе не обязательно будет квадратом самосопряженного оператора соответствующего краевой задаче для уравнения

$$(i\partial_x - \lambda)u(x) = 0, \qquad \forall x \in P. \tag{3}$$

Действительно, при $P = \mathbf{R}_+$ самосопряженная краевая задача для уравнения (3) не может быть поставлена, при $P = [a,b] \subset \mathbf{R}$ к такой задаче приводят только краевые условия вида $u(a) = u(b)\exp(i\phi)$, где $\phi \in \mathbf{R}$ [2]. В то же время для уравнения (2) может быть поставлена самосопряженная краевая задача и при $P = \mathbf{R}_+$, а при $P = [a,b]$ к самосопряженной краевой задаче приводят не только условия периодичности (как раз в этом случае оператор, соответствующий задаче для уравнения (2), будет квадратом оператора, соответствующего упомянутой краевой задаче для уравнения (3) с $\phi = 0$), но и краевые условия вида:

$$u(a)\cos\alpha + u'(a)\sin\alpha = u(b)\cos\beta + u'(b)\sin\beta = 0, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}.$$

Псевдодифференциальный оператор с символом z^2, который соответствует уравнению (2) с $V(x) \equiv 0$ и $P = \mathbf{R}$, действительно является квадратом псевдодифференциального оператора с символом z. Но если принять, что в уравнении (2) с $V(x) \equiv 0$ и $P = \mathbf{R}$ выражение $-\partial_x^2$ означает псевдодифференциальный оператор с символом z^2, то окажется. что это уравнение не имеет решений, поскольку ни одно из его решений не входит в область определения этого оператора.

Очевидно, для построения теории линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка необходимо так определить понятие неполиномиальной функции дифференциального оператора, чтобы такие функции операторов были, как и полиномы дифференциальных операторов, входящие в дифференциальные уравнения конечного порядка, локальными операторами. Определение И. фон Неймана этому требованию не удовлетворяет — оно приводит к самосопряженному, значит, нелокальному оператору. Остается альтернативный подход с использованием рядов Тейлора. Но приводит ли этот подход к локальным операторам?

Положив $f(z) = \exp(bz)$, получим "оператор сдвига":

$$(T_b u)(x) = (\exp(b\partial_x)u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} u^{(n)}(x) = u(x+b).$$

Казалось бы, третье равенство говорит о нелокальности оператора T_b. Но оно справедливо только для специального класса функций — аналитических на всем $\mathbf{R}$. Именно эти функции нелокальны — значение такой функции в точке x_1 однозначно связано со значениями всех производных в любой другой точке x_2. Однако оператор T_b определен на значительно более широком классе функций, включающем функции, определенные на некотором подмножестве $P \subseteq \mathbf{R}$ и на подмножестве $P_0 \subseteq P$ имеющие ряд Тейлора с радиусом сходимости $\rho > b$. При этом ряд Тейлора не обязан сходиться к самой этой функции. Например, пусть

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \exp(-x^{-2}), & x > 0. \end{cases}$$

Поскольку все производные этой функции в точке $x = 0$ равны нулю, $(T_b u)(0) = 0$ при любом b. Эту функцию оператор T_b сдвинуть не может.

По определению 1 оператор T_b локален, как локальны и все операторы вида (1). Локальность операторов отражает важнейший принцип прикладных (в частности, физических) теорий, где эти операторы используются — принцип близкодействия. Взаимодействия, описываемые этими теориями, непосредственно связывают лишь соседние точки пространства-времени, поэтому им должны соответствовать локальные операторы.

Определение самосопряженного дифференциального оператора конечного порядка включает две части: область определения и правило, по которому оператор действует на функцию из своей области определения. Область определения фиксируется глобальным образом — условием квадратичной интегрируемости как отображаемой функции, так и ее образа; кроме того, часто ставятся краевые условия. Действие такого оператора определяется либо с помощью обобщенных производных (в смысле теории распределений), либо с помощью его спектрального разложения. Понятие обобщенной производной [12], с одной стороны, основано на понятии классической производной, с другой — включает интегрирование, поэтому оно не является локальным. Использование спектрального разложения также связано с интегрированием — при разложении отображаемой функции в ряд или интеграл по собственным функциям оператора, причем собственные функции получаются в результате решения линейного дифференциального уравнения, в котором используется локальный дифференциальный оператор. Таким образом, самосопряженный дифференциальный оператор конечного порядка нелокален, но его определение основано на определении локального дифференциального оператора конечного порядка. При этом одному локальному дифференциальному оператору конечного порядка можно сопоставить несчетное множество самосопряженных операторов, задавая краевые условия.

Самосопряженные операторы используются в локальной теории для описания состояний систем, зависящих не только от внутрисистемных взаимодействий, но и от влияния окружающей среды, которое описывается краевыми условиями.

Подведем итоги сравнения двух подходов к построению функций дифференциальных операторов. В первом из них строится самосопряженный оператор, это приводит к тому, что уравнение, содержащее такой оператор, не является дифференциальным уравнением — оно предполагает конкретную область определения решения и (если эта область ограничена) конкретные краевые условия, при этом оказывается, что даже для простейших функций при некоторых условиях этот способ построения функции оператора невозможен.

Во втором подходе строится локальный оператор, и уравнение, содержащее его, вполне аналогично дифференциальному уравнению конечного порядка. Оно имеет бесконечное множество решений, среди которых можно найти те, которые удовлетворяют нужным краевым условиям.

По-видимому, лишь второй подход можно считать обобщением теории дифференциальных уравнений, и настоящая работа также соответствует этому подходу. Однако существенной частью теории линейных дифференциальных уравнений является теория краевых задач, и наиболее важный для приложений класс этих задач — самосопряженные краевые задачи, которым соответствуют самосопряженные операторы. Поэтому, стремясь к наиболее близкой аналогии с уравнениями конечного порядка, надо так определить локальный дифференциальный оператор бесконечного порядка, чтобы краевые задачи для содержащих этот оператор уравнений могли иметь полные ортогональные системы собственных функций. Но тот способ сопоставления оператора функции, который используется в известных автору работах и заключается в том, что в ряд Тейлора функции вместо степеней аргумента подставляются степени оператора дифференцирования, в случае нецелых функций не удовлетворяет этому требованию.

Действительно, пусть, например, $f(z) = \sqrt{1-z^2}$, тогда

$$f(\partial_x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \partial_x^{2n},$$

где $a_0 = 1$, $a_n = (-2)^{-n}(n!)^{-1}(2n-3)!!$, $n > 0$.

Легко видеть, что функция $u_k(x) = \exp(ikx)$ не принадлежит к области определения этого оператора при $|k| > 1$, так как в этом случае ряд

$$(f(\partial_x)u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_k^{(2n)}(x)$$

расходится. Поэтому собственные функции краевой задачи:

$$(f(\partial_x)u)(x) - \lambda u(x) = 0, u(a) = u(b) = 0, [a,b] \subset \mathbf{R}^1,$$

не составляют полную в $L^2[a,b]$ систему функций, и, следовательно, этой краевой задаче не может быть сопоставлен самосопряженный оператор.

Положение исправить нетрудно, для этого достаточно заметить, что функция, голоморфная в некоторой точке z_0, в тех подобластях своей области определения, в которых не сходится ее ряд Тейлора с центром в z_0, может быть задана с помощью аналитического продолжения этого ряда из окрестности z_0. Поэтому, если ряд (1), действуя на данную функцию u, приводит к расходящемуся ряду, это еще не повод для исключения ее из области опеределения соответствующего оператора — возможно, образ этой функции можно получить с помощью аналитического продолжения. Иными словами, для определения голоморфной функции локального оператора надо голоморфной функции $f(z)$ сопоставить не один ее ряд Тейлора с центром, например, в нуле, а всю совокупность этих рядов, с центрами во всех точках ее голоморфности.

Такой способ определения голоморфной функции дифференциального оператора конечного порядка был предложен автором в сообщении [1]. В настоящей работе это определение обобщается на случай любого локального оператора, исследуются некоторые свойства голоморфных функций локальных операторов и рассматриваются некоторые уравнения, содержащие эти функции операторов.

2. Голоморфные функции локальных операторов

Пусть $f\colon G \to \mathbf{C}$ $(G \subseteq \mathbf{C})$ — функция, голоморфная на связной области $G_0 \subseteq G$ и не имеющая на $\mathbf{C}$ особых точек, кроме, возможно, точек разветвления, каждая из которых соединена прямолинейным разрезом с бесконечно удаленной точкой, и, если разрезов больше одного, все их продолжения (за конечные особые точки) имеют хотя бы одну общую точку $z_0 \in G_0$. Без ограничения общности можно положить $z_0 = 0$. G — это множество точек $z \in \mathbf{C}$, для каждой из которых существует такое $\zeta \in G_0$, что ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta)(z-\zeta)^n, \tag{4}$$

где $f_n(\zeta) = f^{(n)}(\zeta)/n!$, сходится абсолютно. Нетрудно показать, что при сделанных предположениях относительно G и G_0, значение $f(z)$ в любой точке $z \in G$ можно получить с помощью аналитического продолжения ряда

$$f(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \alpha^n z^n \tag{5}$$

($f_n = f_n(0)$ по переменной α вдоль вещественной оси от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1$ (такое продолжение будем называть α-продолжением). Множество таких функций будем обозначать через $F(G, G_0)$ (к $F(G, G_0)$ принадлежат и все функции с областями определения $G' \supset G$ и областями голоморфности $G_0' \supset G_0$). Оно, как легко видеть, является кольцом с единицей.

Пусть A — локальный оператор, определенный на функциях $u\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Функция $u\colon P \to \mathbf{C}$ $(P \subseteq \mathbf{C}^n)$ называется $f(A)$-отображаемой в точке $\xi \in P$, если, во-первых, в этой точке определены функции $A^n u$, $n = 0, 1, \ldots$ $(A^0 = 1)$, во-вторых, существует такое $\alpha_0 > 0$, что ряд*

$$\big(f(\alpha A)u\big)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \alpha^n (A^n u)(\xi) \tag{6}$$

сходится абсолютно при всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$ и, в-третьих, этот ряд имеет абсолютно сходящееся α-продолжение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *$f(A)$-образом функции $u\colon P \to \mathbf{C}$, $f(A)$-отображаемой на $P_0 \subseteq P$, называется функция $f(A)u\colon P_0 \to \mathbf{C}$, значением которой в любой точке $\xi \in P_0$ является α-продолжение суммы ряда (6), что будем обозначать следующим образом:*

$$\big(f(A)u\big)(\xi) = \mathrm{Apr}_\alpha \big(f(\alpha A)u\big)(\xi).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Голоморфной функцией локального оператора A с символом $f(z)$ называется оператор $f(A)$, который любой $f(A)$-отображаемой на некотором подмножестве $\mathbf{C}^n$ функции u сопоставляет ее $f(A)$-образ.*

Везде далее (где не оговорено противное) под словами “функция (локального) оператора A” понимается голоморфная функция локального оператора A.

Непосредственной проверкой доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Функции локальных операторов — линейные локальные операторы.*

ПРИМЕР 1. Пусть $f(z)$ — ветвь функции $\sqrt{1-z}$, определяемая значением $f(0) = 1$ и разрезом $(1, \infty)$, $A = \partial_z^2$, $P \subseteq \mathbf{C}$. Тогда функция $u(z) = \exp(iwz)$, $\forall z \in P$ $f(A)$-отображаема на P, если, и только если $w^2 \notin (-\infty, -1)$, и в этом случае

$$\big(f(A)u\big)(z) \equiv \sqrt{1-\partial_z^2}\, u(z) = f(-w^2)u(z) = \sqrt{1+w^2}\, u(z), \qquad \forall z \in P. \quad (7)$$

(квадратный корень в правой части понимается в том же смысле, что и в определении функции $f(z)$, то есть в нуле он равен единице).

На этом примере отчетливо видна разница между используемым здесь определением функции оператора и определением И. фон Неймана, в частности, определением псевдодифференциального оператора с символом $f(z)$: множество P в (7) может быть любым, что и означает локальность оператора $f(A)$. Если бы $f(A)$ был самосопряженным оператором, то, прежде всего, P должно было бы быть связным подмножеством $\mathbf{R}$, и, кроме того, для справедливости формулы (7) было бы необходимо выполнение определенных условий в краевых точках P. Для псевдодифференциального оператора $P = (-\infty, \infty)$, и функция $u(x) = \exp(iwx)$ не входит в его область определения — она не является квадратично интегрируемой. Чтобы для такого оператора была справедлива формула, аналогичная формуле (7), его надо определить в оснащенном гильбертовом пространстве [14].

Заметим, что если бы оператор $f(A)$ был определен только с помощью “ряда Тейлора по степеням оператора-аргумента”, без α-продолжения, то получение результата (7) при $|w| > 1$ было бы невозможным.

Нетрудно получить необходимые и достаточные условия $f(A)$-отображаемости.

ТЕОРЕМА 2. *Для $f(A)$-отображаемости функции $u\colon P \to \mathbf{C}$ $(P \subseteq \mathbf{C}^n)$ в точке $\xi \in P$ необходимо и достаточно одновременного выполнения двух* *условий: 1) в точке ξ определены функции $A^n u$, $n = 0, 1, \ldots$; 2) множество $K(A, u, \xi)$ предельных точек последовательности*

$$\gamma_n = \big((A^n u)(\xi)\big)^{1/n} = |(A^n u)(\xi)|^{1/n} \exp\{in^{-1} \arg\big((A^n u)(\xi)\}$$

является ограниченным подмножеством множества G, на котором определен символ $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Из ограниченности множества $K(A, u, \xi)$ следует, что существует такое $\alpha_0 > 0$, что при всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$ и всех $z \in K(A, u, \xi)$ ряд (5) сходится абсолютно. Так как множество $K(A, u, \xi)$ замкнуто (предельная точка множества предельных точек последовательности является предельной точкой этой последовательности), то среди $z \in K(A, u, \xi)$ найдется z_m с максимальным модулем, и достаточность легко следует из возможности α-продолжения ряда (5) с $z = z_m$. Необходимость. Первое условие необходимо по определению, пусть оно выполнено, но не выполнено второе, и множество $K(A, u, \xi)$ включает точки $z \in Z$, которые либо лежащат на разрезах, либо являются теми точками разветвления $f(z)$, в которых она не определена. Обозначим через $\rho(\zeta)$ радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ с центром в точке $z = \zeta$. Очевидно, ограниченность множества $K(A, u, \xi)$ необходима уже для существования такого $\alpha_0 > 0$, чтобы при всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$ абсолютно сходился ряд (6). Пусть $K(A, u, \xi)$ ограничено и, значит, такое α_0 существует. Однако это α_0 не может быть равно единице. Действительно, выберем из членов ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (A^n u)(\xi) \right| \tag{8}$$

такую подпоследовательность $\{|f^{(n_i)}(0)(n_i!)^{-1}(A^{n_i}u)(\xi)|\}$, что $(A^{n_i}u)(\xi) \to z \in Z$. Тогда ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n_i)}(0)}{n_i!} (A^{n_i} u)(\xi) \right|$$

минорирует ряд (8) и расходится, поскольку ряд (5) с $\alpha = 1$ и $z \in Z$ не сходится абсолютно. Так как $\rho(0) > 0$, то существует также такая окрестность нуля Q_0, что $\rho(z) > z$, $\forall z \in Q_0$. Выберем некоторое $z_0 \in Q_0$ $(z_0 \neq 0)$ и заменим в (6) с $\alpha = \alpha_0$ коэффициенты f_n абсолютно сходящимися рядами Тейлора с центром в точке z_0. В полученном повторном ряде можно изменить порядок суммирования:

$$
\begin{aligned}
\big(f(\alpha_0 A)u\big)(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(k+l)}(z_0)}{l!}(-z_0)^l(A^k u)(\xi) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^k}{k!}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{f^{(l)}(z_0)}{(l-k)!}(-z_0)^{l-k}(A^k u)(\xi) = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\alpha_0^k(-z_0)^{l-k}(A^k u)(\xi) = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}\big((\alpha_0 A - z_0)^l u\big)(\xi). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Таким образом, последний ряд сходится абсолютно. Очевидно, возможность α-продолжения ряда (6) и его результат не зависят от выбора $\arg z_0$, поэтому достаточно показать, что существует такое значение $\arg z_0$, что α-продолжения последнего ряда (9) невозможно. Пусть $\arg z_0 = \arg a$, где a – такая точка разветвления функции $f(z)$, которая либо сама входит в Z, либо соединена с бесконечностью разрезом, на котором есть точки из Z. Пусть возможен (если невозможен, то необходимость доказана) такой выбор $\alpha_1 \in (\alpha_0, 1]$, что $\big(f(\alpha_1 A)u\big)(\xi)$ представляется в виде следующего абсолютно сходящегося ряда, в котором законно изменение порядка суммирования:

$$
\begin{aligned}
\big(f(\alpha_1 A)u\big)(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1-\alpha_0)^k}{k!}\partial_{\alpha_0}^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}\big((\alpha_0 A - z_0)^l u\big)(\xi) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1-\alpha_0)^k}{k!}\partial_{\alpha_0}^k\sum_{l=k}^{\infty}\frac{f^{(l)}(z_0)}{(l-k)!}\big((\alpha_0 A - z_0)^{l-k}A^k u\big)(\xi) = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}\big((\alpha_1 A - z_0)^l u\big)(\xi).
\end{aligned}
$$

Но последний ряд не может сходится абсолютно при $\alpha_1 = 1$, значит, этот шаг не может быть завершающим при α-продолжении. И выбирая далее $z_n \in (z_{n-1}, a)$ и $\alpha_n \in (\alpha_{n-1}, 1)$, мы на каждом шаге будем получать ряды, которые не могут абсолютно сходится при $\alpha_n = 1$. Поэтому α-продолжение ряда (6) при $Z \neq \emptyset$ невозможно. Теорема доказана полностью.

При доказательстве теоремы 2 использовались только множества G, на котором символ $f(z)$ определен, и G_0, на котором он голоморфен. Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ. *Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ определены на G^1 и G^2 соответственно и голоморфны на $G_0^1 \subseteq G^1$ и $G_0^2 \subseteq G^2$ соответственно, причем $G^1 \subseteq G^2$, а $G_0^1 \subseteq G_0^2$, то любая $f_1(A)$-отображаемая в точке ξ функция $f_2(A)$-отображаема в этой точке.*

Пусть $U(F, A, P)$ – множество функций, $f(A)$-отображаемых на связном подмножестве $P \subseteq \mathbf{C}^n$, если $f(z) \in F(G, G_0)$. Далее нас будут интересовать только такие локальные операторы A, для которых справедливы следующие два утверждения:

1) $U(F, A, P) \subset C(P)$;

2) если последовательность функций $\{ u_n \} \subset U(F, A, P)$ равномерно сходится на P, то предельная функция u принадлежит $U(F, A, P)$ и последовательность функций $\{ Au_n \}$ равномерно сходится на P к предельной функции Au.

Множество таких операторов обозначим через $M(P)$. Оно не пусто, к нему принадлежат, например, локальные дифференциальные операторы конечного порядка с голоморфными коэффициентами. Если $A \in M(P)$, то в $U(F, A, P)$ можно ввести топологию, задав счетную систему согласованных норм:

$$\|u\|_n = \max_{k \leq n} \sup_{z \in P} |(A^n u)(\xi)|, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{10}$$

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $U(F, A, P)$ $(A \in M(P))$ полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_n – фундаментальная последовательность в $U(F, A, P)$, то есть все последовательности $A^k u_n$, $k = 0,\ 1,\ \ldots$ – фундаментальные в $C(P)$ и, значит, сходятся равномерно, причем, так как $A \in M(P)$, $A^k u_n \to A^k u$, $k = 0, 1, \ldots$. Поэтому из того, что ряд $\sum \alpha^k f_k(0)(A^k u_n)(\xi)$ абсолютно сходится и имеет α-продолжение при всех n, следует, что то же самое справедливо и для ряда $\sum \alpha^k f_k(0)(A^k u)(\xi)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство $U(F, A, P)$ инвариантно относительно действия любого оператора $f(A)$ с символом $f(z) \in F(G, G_0)$, а последовательное действие (в любом порядке) двух операторов $g(A)$, $h(A)$ с символами $g(z)$, $h(z) \in F(G, G_0)$ на любую функцию из $U(F, A, P)$ эквивалентно действию на эту функцию оператора $h(A)$ с символом $f(z) = g(z)h(z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $g(z)$, $h(z) \in F(G, G_0)$, то и $g(z)h(z) \in F(G, G_0)$, поэтому для любой $u \in U(F, A, P)$ существует такое $\alpha_0 \in (0, 1]$, что при всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$ ряд (6) с $f_n = \sum_k g_k h_{n-k}$ сходится абсолютно на P и допускает α-продолжение. Выберем α таким, чтобы абсолютно сходился и ряд

$$\big(h(\alpha A)u\big)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \alpha^n (A^n u)(\xi).$$

Подействовав на этот ряд оператором $g(\beta A)$, где $g(z) \in F(G, G_0)$, $\beta \in (0, \alpha]$, получим повторный ряд:

$$\big[g(\beta A)\big(f(\alpha A)u\big)\big](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k g_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n f_n (A^{k+n} u)(\xi), \quad \forall \xi \in P.$$

При $\beta = \alpha$ этот ряд лишь изменением порядка суммирования отличается от абсолютно сходящегося и допускающего α-продолжения ряда (6) с $f_n = \sum_k g_k h_{n-k}$. Поэтому этот ряд представляет собой функцию двух переменных α и β, аналитическую в замкнутом треугольнике $\{\alpha \in [0, 1],\ \beta \in [0, \alpha]\}$, и при продолжении по любой кривой этого треугольника мы получим $\big(f(A)u\big)(\xi)$. Теорема доказана.

Пусть $F(A)$ – линейное пространство операторов с символами из $F(G, G_0)$, а $J(A)$ – отображение, которое каждому символу $f(z) \in F(G, G_0)$ сопоставляет локальный оператор $f(A) \in F(A)$. Так как очевидно, что символ суммы операторов из $F(A)$ равен сумме символов операторов-слагаемых, то из теоремы 4 следует, что отображение $J(A)$ – это гомоморфизм кольца с единицей комплекснозначных функций, определенных на $G \subseteq \mathbf{C}^n$ и голоморфных на $G_0 \subseteq G$, в кольцо с единицей локальных операторов $F(A)$ (произведению функций соответствует композиция операторов), определенных на функциях из $U(F, A, P)$, причем оба кольца коммутативные. На самом деле это изоморфизм, поскольку, зная оператор из $F(A)$, можно однозначно определить его символ.

Для построения приближенных решений будет полезна следующая

ТЕОРЕМА 5. *Любой $f(A) \in \hat{F}(A)$ производит непрерывное и ограниченное преобразование $U(F, A, P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(A) \in \hat{F}(A)$, а $\{\, u_n \,\} \in U(F, A, P)$ – последовательность, сходящаяся в смысле топологии (10) к $u \in U(F, A, P)$. Тогда можно выбрать такое N, что ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k (A^k \phi_n)(\xi), \qquad \forall n > N,$$

где $\phi_n = u_n - u$, сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \|f(A)u_n - f(A)u\|_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \|A^k(u_n - u)\|_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \|u_n - u\|_{i+k} = 0.$$

Непрерывность доказана, а каждый непрерывный линейный оператор в любом линейном топологическом пространстве ограничен. Теорема доказана.

Этот результат кажется неожиданным, поскольку не только функции операторов в смысле И. фон Неймана (в том числе и псевдодифференциальные операторы), но и локальные дифференциальные операторы конечного порядка n, определенные из C^n в C (например, оператор дифференцирования $\partial_x \colon C^1 \to C$), не являются непрерывными и ограниченными. Причина хорошего поведения голоморфных функций локальных операторов, конечно, в том, что они могут быть определены только на очень хороших функциях (если $f(z)$ – нецелая функция, а A – дифференциальный оператор, то в область определения оператора $f(A)$ входят только целые функции тех переменных, на которые этот оператор действует) и оставляют множество этих функций инвариантным.

3. Уравнения, содержащие функции операторов

Рассмотрим уравнение:

$$\big(f(A) - V(z)\big)u(z) = g(z), \qquad \forall z \in P \tag{11}$$

где P — связное подмножество $\mathbf{C}$, A — локальный дифференциальный оператор, $f(A)$ — его функция с символом $f(z) \in F(G, G_0)$, $V \colon P \to \mathbf{C}$ и $g \colon P \to \mathbf{C}$ — известные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Решением уравнения (11) называется такая функция $u \in U(F, A, P)$, после подстановки которой в уравнение (11) оно превращается в верное тождество.*

Очевидно, если A — оператор конечного порядка, а символ $f(z)$ — полином, то (11) — линейное дифференциальное уравнение конечного порядка. Наоборот, любое линейное дифференциальное уравнение конечного порядка можно представить в виде (11). Но среди уравнений вида (11) есть и такие, которые не являются дифференциальными уравнениями конечного порядка. Их можно считать линейными дифференциальными уравнениями бесконечного порядка. По-видимому, теория уравнений вида (11) должна быть обобщением теории линейных дифференциальных уравнений конечного порядка. Построению этой теории будут посвящены последующие работы, а здесь для того, чтобы почувствовать, что можно ждать от этой теории, мы сравним некоторые простые уравнения вида (11) с соответствующими (в некотором смысле) уравнениями конечного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Если A — локальный дифференциальный оператор конечного порядка, а ряд Тейлора символа $f(z)$ с центром в нуле имеет вид:*

$$f(z) = f_0 + \sum_{n=k}^{\infty} f_n z^n,$$

где $f_k \neq 0$, то порождающим уравнением для уравнения (11) *называется уравнение*:

$$\big(f_0 + f_k A^k - V(z)\big)u(z) = g(z), \qquad \forall z \in P. \tag{12}$$

Пусть $f(z)$ — символ из примера 1. Будем сравнивать уравнения:

$$\big(\sqrt{1-\partial_x^2} + V(x) - \lambda\big)u(x) = 0, \qquad \forall x \in P \tag{13}$$

и порождающее

$$\big(1 - \frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x) - \lambda\big)u(x) = 0, \qquad \forall x \in P, \tag{14}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$, а P — связное подмножество $\mathbf{R}$. Уравнение (14) — это стационарное уравнение Шредингера, оно получается из временно́го уравнения Шредингера

$$\big(1 - \frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x) - i\partial_t\big)U(x,t) = 0, \qquad \forall x \in P, \quad \forall t \in \mathbf{R} \tag{15}$$

где $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, $\xi = x, t$, отделением переменной t (времени) с помощью подстановки $U(x,t) = u(x)\exp(-i\lambda t)$ и, затем, добавлением в правой части известной функции $g(x)$. Временной вариант уравнения (13) имеет вид:

$$\big(\sqrt{1-\partial_x^2} + V(x) - i\partial_t\big)U(x,t) = 0, \qquad \forall x \in P, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{16}$$

Пусть сначала $V(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$:

$$\big(\sqrt{1-\partial_x^2}-\lambda\big)u(x)=0, \qquad \forall x \in P, \tag{17}$$

$$\big(1-\frac{1}{2}\partial_x^2-\lambda\big)u(x)=0, \qquad \forall x \in P, \tag{18}$$

$$\big(1-\frac{1}{2}\partial_x^2-i\partial_t\big)U(x,t)=0, \qquad \forall x \in P, \quad \forall t \in \mathbf{R} \tag{19}$$

$$\big(\sqrt{1-\partial_x^2}-i\partial_t\big)U(x,t)=0, \qquad \forall x \in P, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{20}$$

(21)

Подставив в уравнения (17) и (18) $u(x)=\exp(ikx)$, соответственно получим (см. пример 1):

$$\sqrt{1+k^2}=\lambda \tag{21}$$

и

$$1+\frac{1}{2}k^2=\lambda. \tag{22}$$

Уравнение (22) — это характеристическое уравнение для уравнения (18), очевидно, уравнение (21) является характеристическим для уравнения (17). Уравнение (22) при любом λ имеет два корня: $k=\pm\sqrt{2(\lambda-1)}$, уравнение (21) — при $\lambda<0$ корней не имеет (напоминаем, что для квадратного корня имеется в виду та ветвь, которая дает $\sqrt{1}=1$), а при $\lambda \geq 0$ тоже имеет два корня (хотя в левой части — не полином второй степени): $k=\pm\sqrt{\lambda^2-1}$. Поэтому уравнение (17) при $\lambda<0$ имеет лишь тривиальное решение, а при $\lambda \geq 0$ имеет общее решение того же вида, что и уравнение (18):

$$u(x)=A\exp(ikx)+B\exp(-ikx), \qquad \forall x \in P, \tag{23}$$

где, A, $B \in \mathbf{C}$, и $k=\sqrt{\lambda^2-1}$, (для уравнения (22) $k=\sqrt{2(\lambda-1)}$). То, что (17) других решений не имеет, легко показать. Действительно, подействовав на левую часть оператором $\sqrt{1-\partial_x^2}+\lambda$, получим уравнение:

$$(1-\partial_x^2-\lambda^2)u(x)=0 \qquad \forall x \in P, \tag{24}$$

(стационарное одномерное уравнение Клейна-Гордона), которому заведомо удовлетворяют все решения уравнения (17). Но (24) не имеет никаких решений, кроме (23).

Конечно, не всякое решение уравнения (24) удовлетворяет уравнению (17). При $\lambda<0$ уравнение (24) имеет нетривиальное решение (23), но оно в этом случае не является решением уравнения (17). Действительно, если

$\lambda < 0$, то уравнение $1 + k^2 = \lambda^2$ имеет корни $k = \pm\sqrt{\lambda^2 - 1}$, но они не удовлетворяют уравнению (21). Переход от уравнения (17) к уравнению (24) приводит к появлению лишних решений.

Уравнение бесконечного порядка (17) оказалось настолько простым, что удалось легко найти его общее решение. Можно показать, что справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $Y = \{\, z_i \,\}$ — множество корней уравнения $f(z) = \lambda$. Если $Y \neq \emptyset$, то общее решение уравнения*

$$\big(f(A) - \lambda\big)u(z) = 0, \qquad \forall z \in P \tag{25}$$

есть линейная комбинация общих решений уравнений

$$(A - z_i)u(z) = 0, \qquad \forall z \in P.$$

Если же $Y = \emptyset$, то уравнение (25) имеет только тривиальное решение..

Итак, линейное дифференциальное уравнение бесконечного порядка может иметь столько же линейно независимых решений, сколько и уравнение конечного порядка, но может и вообще не иметь нетривиальных решений. Кажется, что это противоречит известной теореме о совпадении числа линейно независимых решений с порядком уравнения. Но в доказательстве этой теоремы используется разрешимость уравнения относительно старшей производной, а если $f(z)$ — не полином, то в уравнениях вида (11) старшей производной просто нет.

Если A — локальный дифференциальный оператор конечного порядка, а $f(z)$ — не полином, то теорема 7 позволяет свести задачу об интегрировании линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка (например, (18)) к задаче об интегрировании линейного дифференциального уравнения конечного порядка (25), необходимо только помнить, что уравнение (26) имеет нетривиальное решение лишь в том случае, если характеристическое уравнение $f(z) = \lambda$ имеет хотя бы один корень.

Очевидно, что существование и единственность решения задачи Коши для уравнений (17) и (18) обеспечиваются одинаковыми начальными условиями. Отсюда не следует, что приемлемы лишь те условия, которые обычно используют в задаче Коши для уравнения (18) — можно взять любые начальные условия, которые приводят к линейной системе уравнений для постоянных A и B в (23) с не равным нулю определителем, например:

$$u(a) = C_1, \quad \big(g(\partial_x)u\big)(a) = C_2, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbf{C},$$

где $g(\partial_x)$ — функция оператора ∂_x с символом $g(z)$.

С краевыми задачами дело обстоит несколько сложнее. Краевые условия отбирают из всех $k \in \mathbf{C}$ множество K тех k, при которых для функции (23) можно найти такие A и B, что (23) удовлетворяет этим условиям. С помощью формулы (22) для каждого из этих k можно найти λ — спектральное значение этой краевой задачи для уравнения (18). Но формула (21) сопоставляет одно единственное λ не всем $k \in \mathbf{C}$: если $-k^2 \in (1, \infty)$, то оно попадает на разрез выбранной нами ветви символа $f(z) = \sqrt{1-z}$. Это связано с тем, что функция (23) дважды дифференцируема при любом $k \in \mathbf{C}$, но не при любом из них она $f(\partial_x^2)$-отображаема. Таким образом, если для некоторых $k \in K$ $k^2 \in (-\infty, -1)$, то система собственных функций этой краевой задачи для уравнения (17) является подмножеством системы собственных функций краевой задачи для уравнения (18) с теми же краевыми условиями и не совпадает с ней. Если последняя краевая задача — самосопряженная, то, по теории Штурма-Лиувилля, система ее собственных функций ортогональна и полна в $L^2(P)$, поэтому, если $K \supset \{\, k : -k^2 \in (1, \infty) \,\}$, то система собственных функций первой краевой задачи неполна в $L^2(P)$, и эта краевая задача — не самосопряженная.

Рассмотрим некоторые краевые задачи для уравнений (17) и (18).

1) $P = [a, b] \subset \mathbf{R}$, краевые условия имеют вид:

$$u(a)\cos\alpha + u'(a)\sin\alpha = u(b)\cos\beta + u'(b)\sin\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{26}$$

Подставив (23) в (26), получим систему:

$$A\exp[i(ka+\alpha)] + B\exp[-i(ka+\alpha)] = 0,$$
$$A\exp[i(kb+\beta)] + B\exp[-i(kb+\beta)] = 0.$$

Определитель этой системы $-2i\sin(kl+\gamma)$, где $l = b-a$, $\gamma = \beta - \alpha$. Все корни k_n определителя вещественны, $k_n^2 \notin (-\infty, -1)$. Из теории Штурма-Лиувилля известна самосопряженность краевой задачи (18), (26), поэтому самосопряженна и краевая задача (17), (26). Каждой самосопряженной краевой задаче Штурма-Лиувилля можно сопоставить самосопряженный оператор в виде спектрального представления. И краевой задаче (17), (26) можно сопоставить самосопряженный оператор H_1:

$$D(H_1) = \{\, u \in L^2(P) : u(x) \text{ удовлетворяет условию (26)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\sqrt{1+k_n^2}\, C_n|^2 < \infty \,\},$$

$$(H_1u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+k_n^2}\, C_n\phi_n(x), \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall u \in D(H_1),$$

где $\{\, \phi_n \,\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная система собственных функций,

$$C_n = \int_a^b u(x)\phi_n^*(x)\, dx,$$

$n = 1,\, 2,\, \ldots$. Оператор H_1 имеет чисто точечный спектр, ограниченный снизу.

2) $P = [a,b] \subset \mathbf{R}$, краевые условия — условия периодичности:

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b). \tag{27}$$

Аналогично предыдущему получим, что собственные функции краевых задач (17), (27) и (18), (27) имеют вид (23) с $k_n = 2n\pi/l$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$, обе задачи — самосопряженные, каждой из них можно сопоставить самосопряженный оператор с чисто точечным спектром, ограниченным снизу, в частности, задаче (17), (27) соответствует оператор:

$$D(H_2) = \{\, u \in L^2(P) : u(x) \text{ удовлетворяет условию (27)}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} |\sqrt{1+k_n^2}\, S_n|^2 < \infty \,\},$$

$$(H_2u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+k_n^2}\, S_n\psi_n(x), \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall u \in D(H_2),$$

где $\{\, \psi_n \,\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная система собственных функций задачи (17), (27),

$$S_n = \int_a^b u(x)\psi_n^*(x)\, dx,$$

$n = 1,\, 2,\, \ldots$.

3) $P = \mathbf{R}$. Вместо краевых условий задаем условие ограниченности решения на P.

Очевидно, этому условию удовлетворяет функция (23) с любыми $k \in \mathbf{R}$ и A, $B \in \mathbf{C}$. Этой краевой задаче для уравнения (17) соответствует самосопряженный псевдодифференциальный оператор H_3 с символом $\sqrt{1+z^2}$:

$$D(H_3) = \{\, u \in L^2(\mathbf{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |\sqrt{1+k^2}\, \hat{u}(k)|^2\, dk < \infty \,\},$$

$$(H_2u)(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{1+k^2}\,\hat{u}(k)\exp(ikx)\,dx, \quad \forall x\in\mathbf{R}, \quad \forall u\in D(H_3),$$

где

$$\hat{u}(k) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\exp(-ikx)\,dx.$$

Оператор H_3 имеет чисто непрерывный спектр, ограниченный снизу, каждое значение которого двукратно вырождено.

4) $P = [0,\infty) = \mathbf{R}_+$. Решение должно быть ограниченным и удовлетворять условию:

$$u'(0) = Cu(0), \quad C\in\mathbf{R}. \tag{28}$$

Этим условиям и условию нормировки удовлетворяют функции (23) $\phi(k,x) = A(C\sin kx + k\cos kx)$ $(A = [2\pi(C^2+k^2)]^{-1/2})$ при всех вещественных k и $\phi_0(x) = 2|C|\exp(-|C|x)$. Таким образом, спектр краевой задачи (18), (28) состоит из непрерывной и точечной частей, причем последняя включает в себя только одно значение $\lambda_0 = 1 - C^2/2$. (18), (28) — самосопряженная краевая задача. Если $|C|\le 1$, то каждая функция (23), удовлетворяющая условию (28), удовлетворяет и уравнению (17) с $\lambda = \sqrt{1-C^2}$, и краевая задача (17), (28) также является самосопряженной. Ей можно сопоставить самосопряженный оператор H_4:

$$D(H_4) = \{\, u\in L^2(\mathbf{R}_+) : u(x) \text{ удовлетворяет условию (28)}, \\ \int_0^{\infty}|\sqrt{1+k^2}\,\hat{u}(k)|^2\,dk < \infty\,\},$$

$$(H_4u)(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^{\infty}\sqrt{1+k^2}\hat{u}(k)\phi(k,x)\,dx + \hat{u}_0\phi_0(x), \\ \forall x\in\mathbf{R}_+, \quad \forall u\in D(H_4),$$

где

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\phi(k,x)\,dx, \quad \hat{u}_0 = \int_0^{\infty} u(x)\phi_0(x)\,dx.$$

Если же $|C|>1$, то функция $u_0(x)$ не удовлетворяет уравнению (17), значит, система (обобщенных) собственных функций задачи (17), (28) состоит только из функций $\phi(k,x)$ и неполна в $L^2(\mathbf{R}_+)$, эта задача — не самосопряженная.

Итак, мы получили самосопряженные операторы, каждый из которых соответствует функции $f(z) = \sqrt{1-z}$ и оператору ∂_x^2 и имеет ту же систему (обобщенных) собственных функций, что и последний при тех же краевых условиях. Но это не означает, что мы вернулись к первому подходу, основанному на определении И. фон Неймана. Прежде всего, с точки зрения этого определения, разрешается считать оператор $\sqrt{1-\partial_x^2}$ функцией не оператора ∂_x^2, а оператора $i\partial_x$, но тогда, используя определение И. фон Неймана, мы бы не смогли получить самосопряженных операторов H_1 и H_4. А оператор H_4 не при всех C может быть получен и как функция оператора ∂_x^2 (в смысле определения И. фон Неймана). В то же время все эти операторы получены здест с помощью одного определения локального оператора $\sqrt{1-\partial_x^2}$, путем постановки и решения конкретных краевых задач. На самом деле и то, что операторы H_2 и H_3 оказались эквивалентными тем, которые можно получить с помощью определении И. фон Неймана, связано с тем, что мы положили $V(x) = \text{const}$.

Совершенно очевидно, что ни один из полученных здесь самосопряженных операторов не совпадает с локальным оператором $f(\partial_x^2) = \sqrt{1-\partial_x^2}$. Действительно, например, для того, чтобы квадратично интегрируемая на $\mathbf{R}$ функция $u(x)$ принадлежала $D(H_3)$, ей достаточно быть дважды дифференцируемой на $\mathbf{R}$ (причем лишь в обобщенном смысле), что, конечно, не достаточно для ее $f(\partial_x^2)$-отображаемости. С другой стороны, функция $u(x) = \exp(ikx)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, при $k^2 \notin (-\infty, -1)$ $f(\partial_x^2)$-отображаема, но не принадлежит $D(H_3)$ (как писал И. фон Нейман [2]: “функция $\exp(ikx)$ для нас не существует”). Это может вызвать серьезные трудности в тех теориях, в которых существенную роль играют симметрии.

Следует заметить, что между уравнениями (17) и (18) с одной стороны и уравнением (24) с другой есть очень важная разница. Поскольку спектральный параметр λ входит в (24) нелинейно, двум его различным значениям могут соответствовать одинаковые собственные функции. Очевидно, в этом случае не существует самосопряженных краевых задач. Кроме того, спектр краевых задач для уравнения (24), в отличие от спектров краевых задач для уравнений (17) и (18), не ограничен снизу.

Рассмотрим уравнения (19) и (20) (дифференциальные уравнения в частных производных) с $P = \mathbf{R}$. Теперь легко написать их общие решения, удовлетворяющие условию ограниченности:

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\big(i(kx - \lambda_k t)\big)\, dk,$$

где для уравнения (19) $\lambda_k = 1 + k^2/2$, а для уравнения (20) $\lambda_k = \sqrt{1+k^2}$. Легко показать, что в результате преобразования

$$x = x' - vt', \qquad t = t', \tag{29}$$

где $v \in \mathbf{R}$, любое решение уравнения (19) переходит в некоторое (вообще говоря, другое) решение этого же уравнения, записанного в штрихованной системе отсчета. Аналогично, в результате преобразования

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{30}$$

где $v \in (-1, 1)$, любое решение уравнения (20) переходит в некоторое (вообще говоря, другое) решение этого же уравнения, записанного в штрихованной системе отсчета.

Преобразования (29) составляют группу Галилея, а преобразования (30) — группу Лоренца (в двухмерном пространстве-времени). Это означает, что уравнение (19) инвариантно относительно преобразований из двухмерной группы Галилея, а уравнение (20) — относительно преобразований из двухмерной группы Лоренца. Сравним уравнение (20) с другим лоренц-инвариантным уравнением, хорошо известным уравнением Клейна-Гордона:

$$(1 - \partial_x^2 + \partial_t^2)U(x,t) = 0 \qquad \forall x \in P, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{31}$$

Его общее решение

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(A(k)\exp(-i\lambda_k t) + B(k)\exp(i\lambda_k t)\exp(ikx)\big)\,dk,$$

где $\lambda_k = \sqrt{1+k^2}$, отличается от общего решения уравнения (20) наличием "отрицательночастотной" части. Это следствие того, что уравнение (31), в отличие от уравнений (19) и (20) — гиперболического типа. С этим же связана и неограниченность снизу спектра краевых задач для уравнения (24). Известно, что из уравнений (19) и (31) следуют уравнения непрерывности вида:

$$\partial_t \rho(x,t) = -\partial_x j(x,t), \qquad \forall x \in P, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{32}$$

где для уравнения (19):

$$\rho(x,t) = |U(x,t)|^2, \tag{33}$$

$$j(x,t) = -i\big(U^*(x,t)\partial_x U(x,t) - U(x,t)\partial_x U^*(x,t)\big), \tag{34}$$

а для уравнения (31):

$$\rho(x,t) = i\big(U^*(x,t)\partial_t U(x,t) - U(x,t)\partial_t U^*(x,t), \tag{35}$$

$$j(x,t) = -i\big(U^*(x,t)\partial_x U(x,t) - U(x,t)\partial_x U^*(x,t)\big). \tag{36}$$

Видно, что для уравнений (19) и (31) функции $j(x,t)$ имеют одинаковые выражения (34) и (36), а выражения для $\rho(x,t)$ существенно различаются: (34) — положительно определенная величина, а (36) — знаконеопределенная.

Легко проверить, что уравнение (32) будет справедливо, если $\rho(x,t)$ и $j(x,t)$ определить, используя решение уравнения (20):

$$\rho(x,t) = |U(x,t)|^2, \tag{37}$$

$$j(x,t) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(k_1,t)A^*(k_2,t)\frac{k_1+k_2}{\sqrt{1+k_1^2}+\sqrt{1+k_2^2}}\exp[i(k_1-k_2)]\,dk_1dk_2, \tag{38}$$

где $A(k,t) = A(k)\exp(-it\sqrt{1+k^2})$. Здесь, наоборот, $\rho(x,t)$ так же выражается через решение уравнения (20), как в (33) — через решение уравнения (19), и является положительно определенной величиной.

Может возникнуть вопрос: не следует ли из лоренц-инвариантности уравнения (32) и того факта, что операторы ∂_t и ∂_x преобразуются как компоненты двухмерного вектора псевдоевклидова пространства, вывод, что и функции (37) и (38) должны преобразовываться как t и x соответственно? Но функция (37) явно лоренц-инвариантна. На самом деле ответ на этот вопрос — отрицательный, поскольку для лоренц-инвариантности уравнения (32) достаточно, чтобы величина $\partial_t\rho + \partial_x j$ при преобразованиях Лоренца умножалась на любую ограниченную функцию x и t — она равна нулю, а это гарантируется лоренц-инвариантностью уравнения (20).

Таким образом, уравнение (20) лоренц-инвариантно, так же как уравнение (31), условие лоренц-инвариантности не определяет однозначно уравнение даже для однокомпонентной функции. Лоренц-инвариантные уравнения могут быть как конечного, так и бесконечного порядка и отличаться друг от друга по своему типу, а, значит, и по свойствам решений. Неограниченность спектра снизу, наличие "отрицательночастотных" решений и знаконеопределенность функции $\rho(x,t)$ не следуют с необходимостью из лоренц-инвариантности.

Можно заметить, что уравнение (20) ближе по своим свойствам к уравнению (19), чем уравнение (31), несмотря на то, что и (31), и (19) имеют конечный порядок, а (20) — бесконечного порядка по x. Поэтому было бы естественным называть уравнение (20) релятивистским уравнением Шредингера. Использование уравнений бесконечного порядка может позволить построить релятивистскую теорию, более близкую к нерелятивистской квантовой механике, чем существующая релятивистская квантовая механика, основанная на уравнении Клейна-Гордона и содержащая многочисленные трудности [15].

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение, соответствующее уравнению (18), с экспоненциальной правой частью :

$$(\sqrt{1-\partial_x^2}-\lambda)u(x)=\exp(iqx), \qquad \forall x\in P, \quad \lambda,\, q\in \mathbf{C}. \tag{39}$$

Из теоремы 4 следует, что если $q^2\in(-\infty,-1)$, то это уравнение не имеет решений. Пусть $q^2\notin(-\infty,-1)$, тогда легко найти общее решение этого уравнения при $\lambda\notin(-\infty,0)$, $|q|\neq\sqrt{\lambda^2-1}$, $q^2\notin(-\infty,-1)$ с помощью метода неопределенных коэффициентов:

$$u(x)=A\exp(ikx)+B\exp(-ikx)+(\sqrt{1+q^2}-\lambda)^{-1}\exp(iqx) \qquad \forall x\in P,$$

где $k=\sqrt{\lambda^2-1}$. Но если $\lambda\in(-\infty,0)$ (и, по-прежнему, $|q|\neq\sqrt{\lambda^2-1}$, $q^2\notin(-\infty,-1)$), то только при $A=B=0$ эта функция будет $f(\partial_x^2)$-отображаемой ($f(z)=\sqrt{1-z}$) и, значит, решением уравнения (37). Однако это не будет общее решение — оно не содержит произвольных постоянных. Таким образом, существуют линейные неоднородные дифференциальные уравнения бесконечного порядка, имеющие единственное решение. Конечно, это решение нельзя подчинить произвольным начальным или краевым условиям.

Пусть теперь $q^2=\lambda^2-1\notin(-\infty,0)$. Перепишем (39) в виде:

$$(\sqrt{1-\partial_x^2}-\sqrt{1+q^2})u(q,x)=\exp(iqx), \qquad \forall x\in P. \tag{40}$$

Покажем, что это уравнение, как и порождающее, имеет частное решение вида

$$u(q,x)=Ax\exp(iqx).$$

где $A\in\mathbf{C}$. Действительно, $x^n\exp(iqx)=A(-i\partial_q)^n\exp(iqx)$. Воспользовавшись коммутативностью операторов ∂_q и $\sqrt{1-\partial_x^2}$, получим:

$$\sqrt{1-\partial_x^2}\,x^n\exp(iqx)=A(-i\partial_q)^n\sqrt{1-\partial_x^2}\,\exp(iqx)= \\ =(-i)^nA\partial_q^n\big(\sqrt{1+q^2}\exp(iqx)\big). \tag{41}$$

Подставив этот результат при $n = 1$ в (40), получим, что $u(q, x)$ является частным решением уравнения (40), если $A = i\sqrt{1+q^2}/q$. Обобщая этот результат, нетрудно доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Уравнение*

$$(\sqrt{1-\partial_x^2} - \sqrt{1+q^2})u(q,x) = P_n(x)\exp(iqx), \qquad \forall x \in P \subseteq \mathbf{R},$$

где $q^2 \notin (-\infty, 0)$, *а* $P_n(x)$ — *полином* n*-ой степени, имеет частное решение вида* $u(q,x) = P_{n+1}(x)e^{iqx}$.

Таким образом, для уравнений бесконечного порядка возможен резонанс. Но этот результат имеет и другое интересное следствие. Пользуясь им, можно найти решение уравнения (14) с кулоновским потенциалом $V(x) = A/x$, $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $A \in \mathbf{R}$:

$$(\lambda + A/x - \sqrt{1-\partial_x^2})u(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{42}$$

Пусть $A > 0$. Поставим условия

$$u(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{43}$$

Очевидно, решения надо искать в виде $u_n(x) = xP_{n-1}(x)\exp(-\kappa x)$, $n = 0, 1, \ldots$. Найдем $u_1(x)$. Подставив $u(x) = x\exp(-\kappa_1 x)$ в (42) с $\lambda = \lambda_1$ и используя (41) при $q = i\kappa_1$ и $n = 1$, получим после сокращения на $\exp(-\kappa_1 x)$:

$$-\frac{\kappa_1}{\sqrt{1-\kappa_1^2}} - x\sqrt{1-\kappa_1^2} + A + \lambda_1 x = 0.$$

Для того, чтобы это равенство выполнялось при всех $x \in \mathbf{R}_+$, очевидно, необходимо, чтобы выполнялись равенства:

$$\lambda = \sqrt{1-\kappa_1^2}, \qquad \frac{\kappa_1}{\sqrt{1-\kappa_1^2}} = A,$$

из которых следует, что

$$\kappa_1 = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Первые собственная функция и собственное число найдены. Вторую собственную функцию ищем в виде $u_2(x) = x(1+ax)\exp(-\kappa_2 x)$. Подставив в (42) с $\lambda = \lambda_2$ и используя (41) с $q = i\kappa_2$ и $n = 1, 2$, получим:

$$-\frac{\kappa_2}{\sqrt{1-\kappa_2^2}} - x\sqrt{1-\kappa_2^2} - a\left(\frac{1}{(1-\kappa_2^2)^{3/2}} - \frac{2\kappa_2 x}{\sqrt{1-\kappa_2^2}} - x^2\sqrt{1-\kappa_2^2}\right) +$$
$$+ A(1+ax) + \lambda_2 x(1+ax) = 0.$$

Отсюда

$$\kappa_2 = \frac{A}{\sqrt{4 + A^2}}, \qquad a = -\kappa_2(1 - \kappa_2^2), \qquad \lambda_2 = \frac{2}{\sqrt{4 + A^2}}.$$

Для n-го собственного значения аналогично получим выражение:

$$\lambda_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + A^2}}. \tag{44}$$

При малых по сравнению с единицей A это выражение сводится к тому, которое можно получить с помощью порождающего уравнения:

$$\lambda_n = 1 - \frac{A^2}{2n^2}. \tag{45}$$

Равенство (45) эквивалентно формуле Бальмера для уровней энергии водородоподобного атома в нерелятивистской квантовой механике. Это подтвеждает высказанное ранее предположение, что уравнение (14) — это релятивистский аналог уравнения Шредингера, которое для него является порождающим.

Выражение (44) для уровней энергии релятивистского водородоподобного атома известно в физической литературе [7], оно было получено с использованием псевдодифференциальной интерпретации оператора $\sqrt{1 - \partial_x^2}$ путем гораздо более громоздких расчетов, чем здесь. Обычно для вычисления этих уровней используется либо уравнение Клейна-Гордона (без учета спина электрона), либо уравнение Дирака. В обоих случаях возникают существенные трудности — при достаточно больших A среди "разрешенных" значений энергии оказываются невещественные, а решения становятся сингулярными в нуле, причем, если в уравнении Дирака эти трудности наступают при атомном номере $Z = 137$, то в уравнении Клейна-Гордона уже при вполне реальном $Z = 69$ [16].

Очевидно, при нашем подходе этих трудностей нет. Но одна трудность остается: функции $u_n(x)$ не составляют ортогональную систему. Это связано с бесконечным порядком уравнения (42). Действительно, для порождающего уравнения справедлива известная формула:

$$(\lambda_n - \lambda_m)u_n(x)u_m(x) = -\partial_x W[x; u_n, u_m], \qquad \forall x \in P, \tag{46}$$

где $W[x; u_n, u_m] = -i\big(u_n(x)\partial_x u_m(x) - u_m(x)\partial_x u_n(x)\big)$ — вронскиан. Для уравнения (14) можно получить аналогичную формулу:

$$(\lambda_n - \lambda_m)u_n(x)u_m(x) = -\partial_x L[x; u_n, u_m], \qquad \forall x \in P, \tag{47}$$

где

$$L[x;u_n,u_m]=-i\mathrm{Apr}_\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i\sum_{j=0}^{2i-1}(-)^j\big(u_n^{(j)}(x)u_m^{(2i-1-j)}(x)-u_m^{(j)}(x)u_n^{(2i-1-j)}(x)\big). \tag{48}$$

Из формулы (46) следует, что функции $u_n(x)$ и $u_m(x)$ ортогональны в смысле $L^2[a,b]$, где $[a,b]\subset\mathbf{R}$, в том случае, если $W[a;u_n,u_m]=W[b;u_n,u_m]=0$. Поэтому ортогональность краевой задачи для уравнения (15) обеспечивается, например, краевыми условиями (27). Аналогично, ортогональность решений уравнения (14) обеспечивается, если $L[a;u_n,u_m]=L[b;u_n,u_m]=0$. Но эти равенства могут и не выполняться при краевых условиях (27). Для их выполнения нужно, вообще говоря, бесконечное число краевых условий.

Возникает вопрос: почему же имеют ортогональные системы собственных функций краевые задачи для уравнения (17)? Ответ состоит в том, что для уравнений вида (13) это специфика случая $V(x)=\mathrm{const}$, когда общее решение имеет вид (23). Выражение для $L[x;u_n,u_m]$ в этом случае легче получить из формулы (47), чем из формулы (48):

$$L[x;u_n,u_m]=\frac{1}{\sqrt{1+k_n^2}+\sqrt{1+k_m^2}}\Big\{(k_n-k_m)\Big[A_nA_m\exp\big(i(k_n+k_m)\big)-$$
$$-B_nB_m\exp\big(-i(k_n+k_m)\big)\Big]+(k_n+k_m)\Big[A_nB_m\exp\big(i(k_n-k_m)\big)-$$
$$-B_nA_m\exp\big(-i(k_n-k_m)\big)\Big]\Big\}.$$

Это выражение только на множитель отличается от вронскиана тех же функций и, поэтому, обращается в нуль вместе с вронскианом. Но в общем случае это не так, и собственные функции краевой задачи, например, (42), (43) не составляют ортогональную систему функций. Казалось бы, такой задаче нельзя сопоставить самосопряженный оператор. Надо заметить, однако, что все собственные числа задачи (42), (43) вещественны. Ортогональность системы собственных функций нужна, чтобы разлагать в ряд по ним функции из соответствующего гильбертова пространства с помощью интегрирования. Но собственные функции эадачи (42), (43) линейно независимы и их скалярные произведения друг с другом определены, поэтому с помощью известной процедуры Грама-Шмидта из них можно получить ортогональную систему, которую составляют линейные комбинации собственных функций нашей задачи:

$$\phi_n(x) = \sum_{m=1}^{n} A_{nm} u_m(x), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Поэтому разложение некоторой функции $w(x)$ по собственным функциям краевой задачи (42), (43) имеет следующий формальный вид (вопрос о сходимости мы здесь рассматривать не будем):

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sum_{m=1}^{n} A_{nm} u_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \sum_{n=m}^{\infty} C_n A_{nm},$$

где C_n — коэффициенты разложения $w(x)$ по функциям $\phi_n(x)$, которые предполагаются нормированными. Таким образом, хотя локальному оператору

$$\sqrt{1 - \partial_x^2} + A/x$$

и нельзя сопоставить самосопряженный оператор в $L^2(\mathbf{R}_+)$, краевая задача (42), (43) близка по своим свойствам к соответствующей задаче для порождающего уравнения.

4. Заключение

Итак, рассмотренные здесь голоморфные функции локальных дифференциальных операторов похожи на локальные дифференциальные операторы конечного порядка в самом главном отношении — это локальные операторы. Это определяет и большую аналогию между линейными уравнениями, содержащими эти операторы, и линейными дифференциальными уравнениями конечного порядка. Однако эта аналогия не всеобъемлюща, и некоторые свойства последних уравнений специфичны для них — ими не обладают уравнения бесконечного порядка (например, совпадение порядка уравнения и числа линейно независимых решений). Существуют и такие свойства порождающих уравнений, которые могут передаваться, а могут и не передаваться порождаемым — как свойство ортогональности решений, соответствующих разным значениям спектрального параметра. Теория уравнений бесконечного порядка, подобных рассмотренным здесь, является обобщением теории линейных дифференциальных уравнений конечного порядка. Развитию этой теории будут посвящены последующие работы.

Автор выражает глубокую благодарность В. Ф. Зайцеву и Л. Э. Цырлину за интерес к работе, ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] V.M.Lagodincky. International Congress on Computer Systems and Applied Mathematics CSAM'93 St. Petersburg 1993. Abstracts.

[2] И.фон Нейман. Математические основы квантовой механики. М., Наука, 1964.

[3] И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М., Наука, 1971.

[4] Ф.Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. М., Мир, 1984.

[5] W.Lucha, H.Rupprecht and F.F.Schöberl. Phys. Rev. D. **45**, 1992, p. 1233.

[6] L.Durand and A.Gara. J. Math. Phys. **31**, 1990, p. 2237.

[7] L.J.Nickish, L.Durand and B.Durand. Phys. Rev. D. **30**, 1984, p. 660.

[8] Ю.Ф.Коробейник. Мат. сб. т. 71, 1966, с. 535.

[9] Ю.Ф.Коробейник. Мат. сб. т. 80, 1969, с. 52.

[10] Ю.Ф.Коробейник. Мат. сб. т. 64, 1964, с. 106.

[11] В.В.Напалков. УМН. т. 29, 1974, с. 217.

[12] Р.Рихтмайер. Принципы современной математической физики. т. 1. М., Мир, 1982.

[13] T.Aoki, M.Kashiwara and T.Kawai. Adv. Math. **62**, 1986, p. 155.

[14] И.М.Гельфанд и А.Г.Костюченко. ДАН СССР. **103**, с.349.

[15] Дж.Д.Бьеркен и С.Д.Дрелл. Релятивистская квантовая теория. Т. 1. Релятивистская квантовая механика. М., Наука, 1978.

[16] К.Ициксон и Ж.-Б.Зюбер. Квантовая теория поля. М., Мир, 1984.