ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

групповой анализ дифференциальных уравнений

СИНТЕЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ГРУПП НА МНОГООБРАЗИЯХ

А. В. ФЛЕГОНТОВ

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
Россия
E-mail : afleg@mail.iias.spb.su

Аннотация

В статье рассматриваются дифференциальные уравнения, допускающие базисные формы аналитического представления решений в классе полиномиальных функций. Приводятся инварианты непрерывных и дискретных групп преобразований. Рассматриваются новые методы синтеза дифференциальных уравнений с априорной симметрией. Даются примеры систем дифференциальных уравнений высших порядков.

1. Введение

Математические модели в аналитической форме часто используются во многих областях исследовательской деятельности. К анализу и синтезу таких точных моделей приводят в первую очередь многопараметрические задачи и процессы, в исходное описание которых входят произвольные функции, подлежащие определению по тем или иным априорным условиям. Задание структуры системы базисных образующих и определяющих соотношений дает представление математической модели. Полиномиальное представление является удобным (конечномерность базиса системы инвариантов и компактность полиномиальной топологии) и давно используемым в формальных теориях математического моделирования. Свойства инвариантности, симметрии модельных уравнений являются фундаментальными свойствами любого сложного процесса и, соответственно, математической модели, описывающей этот процесс. Симметрийные методы эффективны практически для всех типов математических моделей - от алгебраических до динамических.

2. Полиномиальные системы и инвариантный синтез на многообразиях.

Методы инвариантного синтеза обыкновенных дифференциальных уравнений базируются на технике представления интегральных многообразий P_i над дифференциальным кольцом полиномов $P[\tau]$ (начальные сведения приведены в работах [7,8]). Примем следующие обозначения:

$$P_i(\tau, y_j, C_j, z_l) = 0, \quad (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}; l = \overline{1,m}; m \leq n), \tag{1}$$

где $y_j(\tau)$ – фазовые переменные; C_j, $z_l(\tau)$ – в общем случае, неопределенные неизвестные, причем $DC_j = 0$. Продифференцируем систему уравнений многообразия (1) по τ

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial \tau} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial \tau} = 0.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\frac{dy_i}{d\tau}$ и исключая произвольные константы, получим систему ОДУ вида:

$$\frac{dy_i}{d\tau} = \Phi_j(\tau, y_j) \quad (j = \overline{1,n}), \tag{2}$$

где $\Phi_j(\tau, y_j)$ – полиномы над полем $Q[z_l, \dot{z}_l]$.

Для $i = 1, 2$, $\{y_j\} = \{x, y\}$, $m = n$ и выделенных из кольца полиномов z_1, z_2 при $P_i \equiv P_i(\tau, x, y, C_1, C_2, z_1, z_2)$, после дифференцирования получим систему

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{\partial P_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial P_1}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial P_1}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial P_1}{\partial z_2}\dot{z}_2 = 0,$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \frac{\partial P_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial P_2}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial P_2}{\partial z_2}\dot{z}_2 = 0.$$

Выделяя уравнения для $\dot{x}$ и $\dot{y}$, получим

$$\dot{x} = \frac{\frac{\partial P_1}{\partial y}\left(\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \frac{\partial P_2}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial P_2}{\partial z_2}\dot{z}_2\right) - \frac{\partial P_2}{\partial y}\left(\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{\partial P_1}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial P_1}{\partial z_2}\dot{z}_2\right)}{\Delta_{xy}}$$

$$\dot{y} = \frac{\frac{\partial P_2}{\partial x}\left(\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{\partial P_1}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial P_1}{\partial z_2}\dot{z}_2\right) - \frac{\partial P_1}{\partial x}\left(\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \frac{\partial P_2}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial P_2}{\partial z_2}\dot{z}_2\right)}{\Delta_{xy}}.$$

С учетом принятых обозначений и условий: $\Delta_{st} = \frac{\partial P_1}{\partial s}\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_2}{\partial s}\frac{\partial P_1}{\partial t}$, $\quad \Delta_{q/t} = \frac{\Delta_{sq}}{\Delta_{ts}}$, $\quad \Delta_{xy} \neq 0$, синтезируемые уравнения системы (2) первого порядка будут иметь соответствующий вид:

$$\dot{x} = \Delta_{\tau/x} + \Delta_{z_1/x}\dot{z}_1 + \Delta_{z_2/x}\dot{z}_2$$

$$\dot{y} = \Delta_{\tau/y} + \Delta_{z_1/y}\dot{z}_1 + \Delta_{z_2/y}\dot{z}_2. \tag{3}$$

Разрешая базисные полиномы относительно параметра τ и исключая его из приведенной системы, получим ОДУ первого порядка $y' = F(x, y)$.

Дифференцируя базисное многообразие несколько раз, получим "дифференциальные кусты (D-комплексы)"уравнений старших порядков связанных между собой. Для этих уравнений системы типа (2), (3) оказываются инвариантными относительно переносов (допускают операторы $X_i = \frac{\partial}{\partial s}$, $\quad \forall s \neq y$).

Уравнения многообразий (1) характеризуется размерностью, которая для математических моделей в форме ОДУ определяется размерностью фазового пространства, а также условием неприводимости.

Задачи синтеза и анализа при этом формулируются следующим образом:

1. Инвариантный синтез. Построение системы (2) с априорными симметрийными свойствами по заданному многообразию (1) определенной структуры.

2. Инвариантный анализ. Задача анализа ставится как обратная к 1. По системе (2) восстановить многообразие (1) в заданном классе функций с симметрийными свойствами.

Пример 2.1. Рассмотрим функции из полиномиального базиса кольца в виде (сравни с полиномиальным субклассом обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера (ОУЭФ) [3,8])

$$x = \phi(\tau) = \tau^3 - 3\tau + C_2, \quad y = \psi(\tau) = (\tau^2 - C_1)^2. \tag{4}$$

Тогда система (1) будет иметь вид:

$$P_1(\tau, x, y, C_1, C_2) = x - \tau^3 + 3\tau - C_2 = 0,$$

$$P_2(\tau, x, y, C_1, C_2) = y - \tau^4 + 2C_1\tau^2 - C_1^2 = 0, \tag{5}$$

что эквивалентно уравнению многообразия общего вида

$$\tau x - y + (3 - 2C_1)\tau^2 - C_2\tau + C_1^2 = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя систему (5) или уравнения типа (6), получим требуемую систему ОДУ типа (2)

$$\dot{x} = \frac{C_2}{\tau} + 4\tau^2 - \frac{x}{\tau} - 6,$$

$$\dot{y} = 4\tau^3 - 4C_1\tau. \tag{7}$$

Если разрешить уравнения (4) относительно параметра τ и подставить в (7), то при $C_1 = 1$, получим ОДУ первого порядка

$$y' = \pm\frac{4}{3}\sqrt{1 \pm \sqrt{y}}. \tag{8}$$

Дифференцируя еще раз, получим систему двух ОДУ второго порядка

$$\ddot{x} = 2\left(6\tau - \frac{\dot{x} + 3}{\tau}\right),$$

$$\ddot{y} = 4(3\tau^2 - C_1),$$

из которой, аналогичным образом, получим известное [3] ОДУ класса ОУЭФ, допускающее решение в виде (4)

$$y'' = \pm\frac{4}{9}y^{-1/2}. \tag{9}$$

Продолжая эту процедуру, будем получать ОДУ старших порядков в зависимости от степени гладкости базисного многообразия (6). Так, например, уравнения до 5 порядка будут иметь вид:

$$y''' = \mp\frac{2}{9}y^{-3/2}y', \tag{10}$$

$$y^{iv} = \pm\frac{2}{9}y^{-2}\left[\frac{3}{2}y^{-1/2}(y')^2 \mp \frac{4}{9}\right],$$

$$y^{v} = \pm\frac{40}{81}y'y^{-3} \mp \frac{5}{6}y^{-7/2}(y')^3.$$

Проверка интегрируемости уравнений в виде (4) легко осуществляется в системе Reduce [3]. Так, например, для уравнений (8)-(10) и многообразия (6) корректная проверка имеет вид:

```
1: x:=t**3-3*t+C2;
2: y:=(t**2-1)**2;
3: operator dif;
4: dif(y,x):=df(y,t)/df(x,t);
5: M1:=t*x-y+t**2-C2*t+1;
M1 := 0
6: dif(y,x)-(4/3)*sqrt(1+sqrt(y));
0
7: operator dif1,dif2;
8: dif1:=df(dif(y,x),t)/df(x,t);
    dif2:=df(dif1,t)/df(x,t);
9: dif1-(4/9)*y**(-1/2);
0
10: dif2+(2/9)*y**(-3/2)*dif(y,x);
0
```

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение (8) только с верхними знаками "+"и по нему восстановим интегральное многообразие размерности 2 с заданной полиномиальной структурой (4). Вначале преобразуем исходное уравнение в систему, используя дифференцирование по параметру и представление $\tau = \sqrt{1+\sqrt{y}}$, следующее из (4).

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4\sqrt{y}\sqrt{1+\sqrt{y}}}{3\sqrt{y}},$$

откуда и получаем систему вида:

$$\dot{x} = 3\sqrt{y},$$

$$\dot{y} = 4\sqrt{y}\sqrt{1+\sqrt{y}}. \qquad (11)$$

Запишем соответствующее общее уравнение многообразия формальным образом (через формальные коэффициенты, которые требуется определить):

$$\alpha_1\tau^2 + \alpha_2\phi^2 + \alpha_3\psi^2 + \alpha_4\tau\phi + \alpha_5\tau\psi + \alpha_6\phi\psi + \alpha_7 C_1\tau + \alpha_8 C_1\phi + \alpha_9 C_1\psi +$$

$$+\alpha_{10}C_2\tau + \alpha_{11}C_2\phi + \alpha_{12}C_2\psi = 0. \qquad (12)$$

Дифференцируя (12) и подставляя вместо производных их значения (11), получим определяющее уравнение, расщепление которого по степеням τ и произвольным константам $C_{1,2}$, приводит к уравнениям:

$$\alpha_3 = 0; \quad \alpha_6 = 0; \quad \alpha_2 = 0; \quad \alpha_5 = 0;$$

$$\alpha_4 + \alpha_9 = 0, \quad \alpha_{12} = 0; \quad \alpha_8 = 0, \quad \alpha_{11} = 0;$$

$$\alpha_1 - \alpha_4 = 0; \quad \alpha_7 = 0, \quad \alpha_4 + \alpha_{10} = 0.$$

Откуда, при $C_1 = 1$, получим:

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_9 = -1, \quad \alpha_{10} = -1$$

и, следовательно, искомое интегральное многообразие в виде:

$$\tau x - y + \tau^2 - C_2\tau = 0. \qquad (13)$$

Пример 2.3. Рассмотрим ОДУ третьего порядка (10), принадлежащее дифференциальному кусту из примера 2.1. Восстанавливая для него многообразие, убедимся, что оно тоже допускает решения типа (4). Действуя по аналогии с примером 2.2., получим вначале эквивалентную систему уравнений первого порядка

$$y' = z \longrightarrow (\dot{x} = f_1, \dot{y} = f_2)$$

$$z' = z_1 \longrightarrow \dot{z} = z_1 f_1,$$

$$z_1' = \frac{-2}{9}y^{-3/2}z \longrightarrow \dot{z}_1 = \frac{-2}{9}y^{-3/2}f_2,$$

которая естественным образом упростится, т.к. уравнения старших порядков структурно связаны через многообразия с уравнениями младших порядков, т.е., если f_1 и f_2 будут иметь вид (11). Затем, трижды продифференцировав формальное уравнение многообразия $P(\tau, \phi, \psi, C_1 = 1, C_2, C_3) = 0$ и решая алгебраическую определяющую систему, получим:

$$\alpha_4 + \alpha_9 = 0; \quad \alpha_1, \alpha_7, \alpha_{10}, \alpha_{13} - free;$$

остальные $\alpha_j = 0$. Тогда окончательно уравнение многообразий примет вид

$$\tau x - y + C_3\tau^2 - C_2\tau = 0, \tag{14}$$

где произвол по третьей константе согласуется с решением по

$$\phi(\tau) = \tau^3 - 3C_3\tau + C_2.$$

Синтезируемые уравнения наследуют также и другие групповые свойства, найденные для одного из них (в частности, допускают дискретные операторы, хотя и входят в разные классы уравнений). Так, например, дискретная образующая $s \in C_2$, действуя на пару $(\phi, \psi) \to (s\phi, s\psi)$, при $C_1 = 1$, переводит решения, многообразия и уравнения следующим образом

$$\left(\tau^3 - 3\tau + C_2, (\tau^2-1)^2\right) \xrightarrow{s} \left(\frac{1}{\tau^3 - 3\tau + C_2}, \frac{(\tau^2-1)^2}{\tau^3 - 3\tau + C_2}\right),$$

$$\left\{\tau x - y + \tau^2 - C_2\tau + 1 = 0\right\} \xrightarrow{s} \left\{\tau^4 + \tau^3 x - \tau^3 y - 3\tau x + 3\tau y + C_2(x-y) - 2\tau^2 = 0\right\},$$

$$y' = \pm\frac{4}{3}\sqrt{1 \pm \sqrt{y}} \xrightarrow{s} y' = \mp\frac{4}{3}\frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{y/x}} + y}{x},$$

$$y'' = \pm\frac{4}{9}y^{-1/2} \xrightarrow{s} y'' = \mp\frac{4}{9}x^{-5/2}y^{-1/2}, \tag{15}$$

$$y''' = \mp\frac{2}{9}y^{-3/2}y' \xrightarrow{s} y''' = \pm\frac{2}{9}x^{-5/2}y^{-1/2}\left(\frac{1}{x} - \frac{y'}{y}\right),$$

$$y^v = \pm\frac{40}{81}y'y^{-3} \mp \frac{5}{6}y^{-7/2}(y')^3 \xrightarrow{s} y^v = \frac{1}{9}\left[\frac{8}{9}x^{-5}y^{-2} \pm x^{-5/2}y^{-1/2}\left(3\frac{1}{y^2}y'^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 4y'\frac{1}{xy} - 7x^{-2}\right)\right],$$

причем, только преобразование (15) является базисным для ОУЭФ.

3. Индуцируемые симметрии синтезируемых уравнений.

Если исходное многообразие M или младшее дифференциальное уравнение из D–комплекса на многообразии M допускает группу Ли X, то и все уравнения комплекса также будут допускать эту группу, в силу очевидной коммутации оператора дифференцирования и оператора X. С повышением порядка уравнений возрастает возможность появления новых операторов симметрии Ли X_k.

Действие дискретной группы преобразований G, связывающее многообразие M с многообразием M_1, естественным образом индуцирует лиевские симметрии для преобразованных уравнений, которые аналогичным образом распределяются по всему преобразованному комплексу. Из структуры G легко получить вид преобразованных операторов симметрий. Так, например, для дискретной образующей s оператор переноса перейдет в проективный оператор

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{s} X_1 = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1},$$

для образующей g в оператор Ли-Беклунда, а оператор растяжения $X_p = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ останется инвариантным.

Поиск допускаемых системами дифференциальных уравнений (2) групп и анализ структуры допускаемых симметрий осуществлялся с помощью самостоятельной программы LIE [11]. Эта программа написана в нотации системы muMATH [3] и состоит (основные блоки) из генератора определяющих уравнений, решателя определяющих уравнений, генератора векторов алгебры Ли и ненулевых коммутаторов. Для преобразованного уравнения (15) программа дает следующий результат

```
ECHO:FALSE
?
? DOLIE();
Program LIE  v. 4.2 (c) 1994  A K Head

(11)
(11)
(4 11)
```

```
@: Def Eqns =  (4, 11)

? A#;
@: {DIF (F# (2, U1, X1), U1, 2),
    DIF (F# (1, U1, X1), U1, 2) - 2*DIF (F# (2, U1, X1), U1, X1),
    6*U1^(1/2)*X1^(5/2)*DIF (F# (1, U1, X1), U1, X1)
      - 3*U1^(1/2)*X1^(5/2)*DIF
(F# (2, U1, X1), X1, 2) - 4*DIF (F# (2, U1, X1), U1),
    4*U1*X1*DIF (F# (1, U1, X1), U1) -
    8*U1*X1*DIF (F# (2, U1, X1), X1) + 10*U1
*F# (2, U1, X1) + 2*X1*F# (1, U1, X1) +
    9*U1^(3/2)*X1^(7/2)*DIF (F# (1, U1, X1)
, X1, 2),
    UUU#1 == F# (1, U1, X1),
    XXX#1 == F# (2, U1, X1)}

? DOSOLV();

(3 13 3 1)
(3 15 4 1)
(3 21 3 1)
(5 21 1 1)
(7 21 1 4)
(12 21 1 7)
(10 18 2 2)
(9 13 2 3)
(8 12 2 3)
(4 8 2 3)
(3 6 2 2)
(2 6 3 1)
(2 8 4 1)
(1 3 2 1)
(2 3 1 1)
(1 2 2 1)
(0 0 2 1)

@: {UUU#1 == U1*X1*F# (10) + U1*F# (12)/3,
    XXX#1 == -X1*F# (12) + X1^2*F# (10)}.
```

Т.о., программа LIE благополучно разрешает систему из 4 уравнений с 11 неизвестными, получая и проективный оператор и оператор растяжения. Для уравнений более старших порядков возрастает и вычислительная сложность, так для преобразованного уравнения 5 порядка, приведенного выше, приходится анализировать определяющее уравнения из 63 термов, что окончательно приведет к решению системы из 15 уравнений с 36 неизвестными.

4. Инвариантные кольца и процедура синтеза.

Рассмотрим теперь дифференциальное кольцо полиномов. В работах [3,4,9] даны основные определения и теоремы по инвариантности дифференциальных колец относительно дискретной группы преобразований, которые приводят к процедуре синтеза дифференциальных уравнений.

Пусть пара полиномов $(\varphi(\tau), \quad \psi(\tau))$ составляет полиномиальный базис кольца

$$(P_{i_1}, P_{j_1}). \tag{16}$$

В силу инвариантности $\{P_i\}$, структура кольца имеет вид

$$\{P_{i_1}, P_{j_1}, P_{i_1 g_k}, P_{j_1 g_k}\}.$$

Из дифференциальных свойств кольца очевидна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть полиномиальный базис (16) удовлетворяет какому-либо дифференциальному уравнению*

$$\Phi_1(P_{i_1}, P_{j_1}, P'_{j_1}, P^n_{j_1}) = 0. \tag{17}$$

Тогда дискретная группа G порождает семейство дифференциальных уравнений в неявной форме

$$\Big\{\Phi_k(P_{i_1 g_k}, P_{j_1 g_k}, a_1 P_p, ..., a_1 a_2 ... a_n P_q) = 0\Big\}, \tag{18}$$

где P_p, P_q – элементы кольца, $a_k = const$, $k = 1, ..., n$.

Пример 4.1. Рассмотрим полиномиальный субкласс уравнений ОУЭФ с базисной парой (4). Уравнение (17) и одно из уравнений семейства (18) будут иметь вид:

$$\Phi\Big((\tau^3 - 3\tau + C_2), \quad (\tau^2-1)^2, \quad \frac{4}{3}\tau, \quad \frac{4}{9(\tau^2-1)}\Big) = 0, \tag{19}$$

$$\Phi_k\Big((\tau^3-3\tau+C_2)^{-1},\quad (\tau^2-1)^2(\tau^3-3\tau+C_2)^{-1},$$

$$(\tau^2-1)^2-\frac{4}{3}\tau(\tau^3-3\tau+C_2),\quad \frac{4}{9}(\tau^3-3\tau+C_2)^3(\tau^2-1)^{-1}\Big) \tag{20}$$

Для синтеза модельных уравнений в явной форме необходимо разрешить получившееся семейство (18), исключив параметр. Представив полиномиальный базис в общем виде

$$\varphi(\tau)=\sum_{k=0}^{k_1} a_{1k}\tau^k,\qquad \psi(\tau)=\sum_{k=0}^{k_2} a_{2k}\tau^k, \tag{21}$$

получим для дифференциального уравнения (17) n-ого порядка из каждого элемента семейства (18) нелинейную систему $n+2$ уравнений с k_1+k_2+1 неизвестными параметрами $(a_{11},...,a_{1k_1};a_{21},...,a_{2k_2};\tau)$.

Пример 4.2. Разрешая уравнение (19), сразу получаем первое дифференциальное уравнение в виде

$$y''=\frac{4}{9}\Big(\Big(\frac{3}{4}y'\Big)^2-1\Big)^{-1}, \tag{22}$$

которое не является ОУЭФ, но сводится к базисному уравнению класса ОУЭФ (второе модельное уравнение (15)).

Пример 4.3. Решая определяющую функциональную систему для уравнения (20), получим единственное дифференциальное уравнение в виде

$$y''=\pm\frac{4}{9}x^{-5/2}y^{-1/2}.$$

Определение 1. *Уравнение, получающееся в результате подстановки пары полиномов вида (21) из полиномиального кольца в соответствующее уравнение семейства (18), называется полиномиальным определяющим уравнением (ПОУ).*

Определение 2. *Уравнения, которые получаются после расщепления по степеням ПОУ, образуют алгебраическую определяющую систему (АОС).*

Для ОУЭФ структура ПОУ имеет вид:

$$\Big(\sum_{k=2}^{k_2} k(k-1)a_{2k}\tau^{k-2}\sum_{k=1}^{k_1} ka_{1k}\tau^{k-1}-\sum_{k=1}^{k_2} ka_{2k}\tau^{k-1}\sum_{k=2}^{k_1} k(k-1)a_{1k}\tau^{k-2}\Big)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{k_1} k a_{1k}\tau^{k-1}\right)^l = A\left(\sum_{k=0}^{k_1} a_{1k}\tau^k\right)^n\left(\sum_{k=0}^{k_2} a_{2k}\tau^k\right)^m\left(\sum_{k=1}^{k_2} k a_{2k}\tau^{k-1}\right)^l\left(\sum_{k=1}^{k_1} k a_{1k}\tau^{k-1}\right)^3 \tag{23}$$

Теорема 2. *Модельные уравнения (18) допускают решения в виде (21) тогда и только тогда, когда соответствующая АОС имеет хотя бы одно решение.*

Анализ подобных АОС целесообразно проводить с помощью компьютерных методов аналитических вычислений.

Наложение дополнительных симметрийных условий на полиномиальный базис существенно упрощает процедуру решения АОС. Так, например, для модельного уравнения (9) поиск базисной пары в виде (21) при $k_1 = k_2 = 4$ и требовании биквадратности в представлении ψ приводит, с необходимостью, к условию $a_{12} = 0$.

С другой стороны, структура полиномиального кольца, предложенная в работе [3], в виде всевозможных произведений полиномов как раз и является дополнительным фундаментальным симметрийным условием. В этом случае, мы переходим просто к построению элементарных симметрических многочленов. Базисная пара тогда ищется в виде:

$$\varphi(\tau) = \prod_i P_i^{k_{1i}}, \qquad \psi(\tau) = \prod_i P_i^{k_{2i}}, \tag{24}$$

а соответствующее (22) ПОУ будет иметь вид:

$$\prod_i P_i^{(n+1)k_{1i}+mk_{2i}+lk_{3i}-1}\left(\sum_i k_{1i}P_i'\prod_{\sigma\neq i} P_i\right) = A\prod_i P_i^{k_{3i}-1}\left(\sum_i k_{3i}P_i'\prod_{\sigma\neq i} P_i\right).$$

Список литературы

[1] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: ЛИИАН, 1991. 240с.

[2] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Конечные системы полиномиальных функций, замкнутые на некотором классе преобразований обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера// В кн. Методы и средства информационной технологии в науке и производстве. СПб.: Наука, 1992. С. 67-73.

[3] Лопатин А.К. О разрешимости дифференциальных уравнений в классе алгебраических функций// Труды семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. Вып.1, Киев : ИМАН УССР, 1969 -с.273-280.

[4] Флегонтов А.В. Инвариантный синтез модельных уравнений// Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений. Орел : ОГУ, 1996 - с.64-66.

[5] Флегонтов А.В. Применение компьютерного справочника DIGRAN и системы Reduce для симметрийного анализа дифференциальных уравнений// В кн. Моделирование процессов управления и обработки информации. М.: МФТИ, 1994. С. 200-216

[6] Head A.K. LIE, a PC program for Lie analysis of differential equations// Computer Physics Communications, vol. 71 (1993) pp.241-248.