ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.4 , 2007
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Системы уравнений в частных производных

ИНТЕГРАЛЫ И ПОСЛЕДНИЕ МНОЖИТЕЛИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.Н. Горбузов, С.Н. Даранчук

Беларусь, 230023, Гродно, ул. Ожешко, 22,
Гродненский государственный университет имени Я. Купалы,
e-mail: gorbuzov@grsu.by

Аннотация.

Для линейной однородной системы уравнений в частных производных, построенной на основании дифференциальных операторов с линейными координатными функциями и дифференциальных операторов с квадратичными координатными функциями специального вида, разработан регулярный спектральный метод построения первых интегралов или последних множителей.

1. Введение

Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_j(x)\,y = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

заданную посредством не являющихся линейно связанными [1, с. 105, 115] на пространстве $\mathbb{R}^n$, $m < n$, дифференциальных операторов

$$\mathfrak{L}_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(x)\,\partial_{x_i}, \quad \mathfrak{L}_\beta(x) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(a_{\beta i}(x) - x_i\, a_{\beta,n+1}(x)\bigr)\partial_{x_i} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\alpha = \overline{1,s}$, $0 \leqslant s \leqslant m$, $\beta = \overline{s+1,m}$, линейные неоднородные функции $a_{j\tau}\colon x \to \sum\limits_{\xi=1}^{n} a_{j\tau\xi}x_\xi + a_{j\tau,n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,m}$, $\tau = \overline{1,n}$ при $j = \overline{1,s}$, $\tau = \overline{1,n+1}$ при $j = \overline{s+1,m}$, с вещественными коэффициентами, удовлетворяющими условию $\sum\limits_{i=1}^{n}\bigl|a_{\beta,n+1,i}\bigr| \neq 0$, $\beta = \overline{s+1,m}$.

Операторы $\mathfrak{L}_\alpha$, $\alpha = \overline{1,s}$, индуцируют линейную дифференциальную систему [2, с. 239 – 266; 3 – 9], а операторы $\mathfrak{L}_\beta$, $\beta = \overline{s+1,m}$, — дифференциальную систему Якоби [2, с. 273 – 304; 10 – 18]. Таким образом, система (1) представляет собой линейную систему, возмущенную операторами $\mathfrak{L}_\beta$, $\beta = \overline{s+1,m}$, с нелинейными координатными функциями.

В настоящей статье дано решение задачи Дарбу о построении первых интегралов и последних множителей системы (1) по ее частным интегралам.

С целью решения задачи Дарбу для полиномиальных (обыкновенных и многомерных) дифференциальных систем в [2, с. 161 – 238; 19 – 23] разработан метод частных интегралов. На его основании получены спектральные методы построения базисов первых интегралов линейных обыкновенных [3 – 5; 24] и многомерных [2, с. 239 – 272; 6 – 9; 24 – 26] дифференциальных систем. Также метод частных интегралов был применен к нелинейным дифференциальным системам Дарбу и Якоби, для которых разработаны методы построения интегрального базиса с точностью до последнего множителя [28 – 29] и базисных первых интегралов [2, с. 273 – 311; 10 – 18] соответственно.

Задачу построения базисных первых интегралов и последних множителей системы (1) будем решать на основании метода полиномиальных частных интегралов [2, с. 239 – 272; 22; 23] при условии перестановочности матриц коэффициентов:

$$A_jA_\zeta = A_\zeta A_j, \quad j,\zeta = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где квадратные матрицы $A_j = \bigl\|a_{j\tau\delta}\bigr\|$, $j = \overline{1,m}$, $\delta = \overline{1,n+1}$ — номер строки, $\tau = \overline{1,n+1}$ — номер столбца, элементы $a_{\alpha,n+1,\delta} = 0$, $\alpha = \overline{1,s}$, $\delta = \overline{1,n+1}$.

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что при выполнении равенств (2) имеет место система коммутаторных тождеств $\bigl[\mathfrak{L}_j(x),\mathfrak{L}_\zeta(x)\bigr] = \mathfrak{O}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $j,\zeta = \overline{1,m}$, ($\mathfrak{O}$ — нулевой оператор), выражающая якобиевость [2, с. 38; 30, с. 523] системы (1).

2. Линейный частный интеграл

Лемма 1. *Функция* $p\colon x \to \nu X \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ X = (x_1, \dots, x_n, 1)$, *является линейным частным интегралом системы* (1) *при* (2), *если и только если* ν *— общий собственный вектор перестановочных матриц* $A_j,\ j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1 из [2, с. 240 – 241; 6] устанавливаем, что система тождеств

$$\mathfrak{L}_\alpha p(x) = \lambda^\alpha p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = \overline{1, s}, \tag{3}$$

имеет место тогда и только тогда, когда ν является общим собственным вектором матриц A_α, соответствующим собственным числам λ^α, $\alpha = \overline{1, s}$. А аналогично доказательству леммы 1 из [2, с. 274 – 275; 14] получаем, что функция p будет линейным частным интегралом системы $\mathfrak{L}_\beta(x)y = 0$, $\beta = \overline{s+1, m}$, если и только если вектор ν будет общим собственным вектором матриц A_β, соответствующим собственным числам λ^β, $\beta = \overline{s+1, m}$, при этом

$$\mathfrak{L}_\beta p(x) = \big(- a_{\beta, n+1}(x) + \lambda^\beta \big) p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = \overline{s+1, m}. \ \blacksquare \tag{4}$$

3. Первые интегралы и последние множители

В случае простых элементарных делителей матриц A_j, $j = \overline{1, m}$, первые интегралы или последние множители системы (1) при (2) строим на основании следующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть* $\nu^k,\ k = \overline{1, M}$, *— общие вещественные линейно независимые собственные векторы матриц* A_j, *соответствующие собственным числам* λ_k^j, $j = \overline{1, m}$. *Тогда при* $M = m + 1$ *функция*

$$F\colon x \to \prod_{k=1}^{M} \big| \nu^k X \big|^{h_k} \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \big(X = (x_1, \dots, x_n, 1) \big) \tag{5}$$

будет первым интегралом системы (1), *если числа* $h_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, M}$, *являются нетривиальным решением линейной однородной системы*

$$\sum_{k=1}^{M} h_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^j h_k = 0, \ \ j = \overline{1, m}, \tag{6}$$

а если числа $h_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, M}$, *являются нетривиальным решением линейной неоднородной системы*

$$\sum_{k=1}^{M} h_k = -n-1, \quad \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^j h_k = -\sum_{\tau=1}^{n+1} a_{j\tau\tau}, \ \ j=\overline{1,m}\,, \tag{7}$$

то функция (5) *является последним множителем системы* (1).

Доказательство осуществляется на основании определений первого интеграла [2, с. 35] и последнего множителя [2, с. 121]. При этом учитываем тождества вида (3) и (4) для частных интегралов $x \to \nu^k X \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $k=\overline{1,M}$, и то, что при $\alpha=\overline{1,s}$, $\beta=\overline{s+1,m}$ на $\mathbb{R}^n$ расходимости

$$\operatorname{div}\mathfrak{L}_\alpha(x) = \sum_{\tau=1}^{n+1} a_{\alpha\tau\tau}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{L}_\beta(x) = -(n+1)a_{\beta,n+1}(x) + \sum_{\tau=1}^{n+1} a_{\beta\tau\tau}. \tag{8}$$

Следствие 1. *Если выполняются условия теоремы* 1 *при* $M=m+2$, *то функция* (5) *при* (6) *будет первым интегралом системы* (1).

Например, для якобиевой системы уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_1(x)\,y \equiv x_1\,\partial_{x_1}y + (-5x_1+x_3+3x_4+2)\,\partial_{x_2}y +$$

$$+(-2x_1+x_3+2x_4+2)\,\partial_{x_3}y + (2x_1-x_4)\,\partial_{x_4}y = 0,$$

$$\mathfrak{L}_2(x)\,y \equiv \big(x_3+x_4+2-x_1\,a(x)\big)\partial_{x_1}y + \big(-2x_2-x_3-3x_4-8-x_2\,a(x)\big)\partial_{x_2}y +$$

$$+\big(x_1-2x_2+x_3-2x_4-4-x_3\,a(x)\big)\partial_{x_3}y + \big(x_1+x_3+2-x_4\,a(x)\big)\partial_{x_4}y = 0,$$

где $a(x) \equiv x_1+x_2-x_3+x_4+1$, по собственным векторам $\nu^1=(-2,0,1,1,2)$, $\nu^2=(-1,0,0,1,0)$, $\nu^3=(1,1,-1,1,0)$, $\nu^4=(1,1,-1,1,1)$, $\nu^5=(2,0,1,1,2)$, соответствующим собственным числам $\lambda_1^1=1$, $\lambda_2^1=-1$, $\lambda_3^1=\lambda_4^1=0$, $\lambda_5^1=1$ и $\lambda_1^2=-2$, $\lambda_2^2=-1$, $\lambda_3^2=0$, $\lambda_4^2=1$, $\lambda_5^2=2$, строим (следствие 1) интегральный базис

$$F_1\colon x \to \frac{\nu^1X\ \nu^2X\,(\nu^4X)^3}{(\nu^3X)^5} \quad \text{и} \quad F_2\colon x \to \frac{\nu^2X\ \nu^5X}{\nu^3X\ \nu^4X}$$

на любой области $\mathcal{X} \subset \{x\colon \nu^3X\ \nu^4X \neq 0\}$, $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,1)$.

Теорема 2. *Пусть векторы* $\nu^k = \widehat{\nu}^{\,k} + \widetilde{\nu}^{\,k}\,i$, $k=\overline{1,r}\,$, $r \leqslant M/2$, *и* ν^θ, $\theta = \overline{r+1,M-r}\,$, — *общие комплексные* (*среди которых нет комплексно сопряженных*) *и вещественные собственные векторы матриц* A_j, $j=\overline{1,m}\,$, *соответствующие собственным числам* $\lambda_k^j = \widehat{\lambda}_k^j + \widetilde{\lambda}_k^j\,i$, $k=\overline{1,r}$, *и* λ_θ^j, $\theta = \overline{r+1,M-r}$, $j=\overline{1,m}$. *Тогда при* $M=m+1$ *функция*

$$F\colon x\to\prod_{k=1}^{r}\big(P_k(x)\big)^{\widehat{h}_k}\exp\big(-2\,\widetilde{h}_k\varphi_k(x)\big)\prod_{\theta=r+1}^{M-r}\big|\nu^\theta X\big|^{h_\theta}\quad\forall x\in\mathcal{X},\tag{9}$$

где $X=(x_1,\ldots,x_n,1)$, *функции*

$$P_k\colon x\to\big(\widehat{\nu}^{\,k}X\big)^2+\big(\widetilde{\nu}^{\,k}X\big)^2,\quad \varphi_k\colon x\to\operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}^{\,k}X}{\widehat{\nu}^{\,k}X}\quad\forall x\in\mathcal{X},\tag{10}$$

будет первым интегралом системы (1)*, если вещественные числа* $\widehat{h}_k,\ \widetilde{h}_k,\ h_\theta,$ $k=\overline{1,r},\ \theta=\overline{r+1,M-r}$, *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы*

$$2\sum_{k=1}^{r}\widehat{h}_k+\sum_{\theta=r+1}^{M-r}h_\theta=0,\quad 2\sum_{k=1}^{r}\big(\widehat{\lambda}_k^j\,\widehat{h}_k-\widetilde{\lambda}_k^j\,\widetilde{h}_k\big)+\sum_{\theta=r+1}^{M-r}\lambda_\theta^j h_\theta=0,\ \ j=\overline{1,m},\tag{11}$$

а если вещественные числа $\widehat{h}_k,\ \widetilde{h}_k,\ h_\theta,\ k=\overline{1,r},\ \theta=\overline{r+1,M-r}$, *составляют нетривиальное решение линейной неоднородной системы*

$$2\sum_{k=1}^{r}\widehat{h}_k+\sum_{\theta=r+1}^{M-r}h_\theta=-n-1,$$

$$2\sum_{k=1}^{r}\big(\widehat{\lambda}_k^j\,\widehat{h}_k-\widetilde{\lambda}_k^j\,\widetilde{h}_k\big)+\sum_{\theta=r+1}^{M-r}\lambda_\theta^j h_\theta=-\sum_{\tau=1}^{n+1}a_{j\tau\tau},\quad j=\overline{1,m}\,,$$

то функция (9) *является последним множителем системы* (1).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из [2, с. 246 – 249, 282 – 284; 6; 14] с учетом системы тождеств (8).

Следствие 2. *Если выполняются условия теоремы* 2 *при* $M=m+2$, *то функция* (9) *при* (11) *будет первым интегралом системы* (1).

Например, для якобиевой системы уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_1(x)\,y\equiv(x_1-x_3-x_4-2)\,\partial_{x_1}y+(-4x_1+4x_3+6x_4+8)\,\partial_{x_2}y+$$
$$+(-x_1+2x_3+3x_4+4)\,\partial_{x_3}y+(2x_1-x_3-2x_4-2)\,\partial_{x_4}y=0,$$

$$\mathfrak{L}_2(x)\,y\equiv\big(-x_3-x_4-2-x_1\,a(x)\big)\partial_{x_1}y+\big(8x_1+5x_2-2x_3+6x_4+8-x_2\,a(x)\big)\partial_{x_2}y+$$
$$+\big(6x_1+4x_2-3x_3+4x_4+4-x_3\,a(x)\big)\partial_{x_3}y+\big(-x_1-x_3-2-x_4\,a(x)\big)\partial_{x_4}y=0,$$

где $a(x)\equiv -2x_1-2x_2+2x_3-2x_4-1$, по собственным векторам $\nu^1\equiv \widehat{\nu}^{\,1}+\widetilde{\nu}^{\,1}i = (0,0,1,1,2)+(-1,0,0,0,0)i$, $\nu^3=(1,1,-1,1,1)$, $\nu^4=(1,1,-1,1,0)$, $\nu^5 = (1,0,0,-1,0)$ строим (следствие 2) интегральный базис

$$F_1\colon x\to \frac{(\widehat{\nu}^{\,1}X)^2+(\widetilde{\nu}^{\,1}X)^2}{\exp\Bigl(2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\widetilde{\nu}^{\,1}X}{\widehat{\nu}^{\,1}X}\Bigr)(\nu^3X)^2} \quad \text{и} \quad F_2\colon x\to \frac{\bigl((\widehat{\nu}^{\,1}X)^2+(\widetilde{\nu}^{\,1}X)^2\bigr)(\nu^5X)^4}{\exp\Bigl(-2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\widetilde{\nu}^{\,1}X}{\widehat{\nu}^{\,1}X}\Bigr)(\nu^4X)^6}$$

на любой области $\mathcal{X}\subset\{x\colon \widehat{\nu}^{\,1}X\ \nu^3X\ \nu^4X\neq 0\}$, $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,1)$.

Теорема 3. *Пусть векторы* $\nu^{2k-1}=\widehat{\nu}^{\,k}+\widetilde{\nu}^{\,k}\,i$, $\nu^{2k}=\widehat{\nu}^{\,k}-\widetilde{\nu}^{\,k}\,i$, $k=\overline{1,r}$, $r\leqslant (M-1)/2$, $\nu^{2r+1}=\widehat{\nu}^{\,2r+1}+\widetilde{\nu}^{\,2r+1}\,i$ *и* ν^θ, $\theta=\overline{2r+2,M}$, *— общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$, *соответствующие собственным числам* $\lambda^j_{2k-1}=\widehat{\lambda}^j_k+\widetilde{\lambda}^j_k\,i$, $\lambda^j_{2k}=\widehat{\lambda}^j_k-\widetilde{\lambda}^j_k\,i$, $k=\overline{1,r}$, $\lambda^j_{2r+1}=\widehat{\lambda}^j_{2r+1}+\widetilde{\lambda}^j_{2r+1}\,i$ *и* λ^j_θ, $\theta=\overline{2r+2,M}$. *Тогда при* $M=m+1$ *функции*

$$\begin{gathered} F_1\colon x\to \prod_{k=1}^{r}\bigl(P_k(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{2k-1}+\widetilde{h}_{2k}}\exp\bigl(2\bigl(\,\widehat{h}_{2k-1}-\widehat{h}_{2k}\bigr)\varphi_k(x)\bigr)\,\cdot \\ \cdot\bigl(P_{2r+1}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{2r+1}}\exp\bigl(2\,\widehat{h}_{2r+1}\varphi_{2r+1}(x)\bigr)\prod_{\theta=2r+2}^{M}\bigl(\nu^\theta X\bigr)^{2\widetilde{h}_\theta}\quad \forall x\in\mathcal{X} \end{gathered} \tag{12}$$

и

$$\begin{gathered} F_2\colon x\to \prod_{k=1}^{r}\bigl(P_k(x)\bigr)^{\frac12(\widehat{h}_{2k-1}+\widehat{h}_{2k})}\exp\bigl(-\bigl(\,\widetilde{h}_{2k-1}-\widetilde{h}_{2k}\bigr)\varphi_k(x)\bigr)\,\cdot \\ \cdot\bigl(P_{2r+1}(x)\bigr)^{\frac12\widehat{h}_{2r+1}}\exp\bigl(-\widetilde{h}_{2r+1}\varphi_{2r+1}(x)\bigr)\prod_{\theta=2r+2}^{M}\bigl|\nu^\theta X\bigr|^{\widehat{h}_\theta}\quad \forall x\in\mathcal{X}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $X=(x_1,\dots,x_n,1)$, *скалярные функции* P_k *и* φ_k, $k=\overline{1,r}$, $k=2r+1$, *определяются формулами* (10), *будут первыми интегралами системы* (1), *если числа* $h_k=\widehat{h}_k+\widetilde{h}_k\,i$, $k=\overline{1,M}$, *составляют нетривиальное решение системы* (6), *а если числа* $h_k=\widehat{h}_k+\widetilde{h}_k\,i$, $k=\overline{1,M}$, *составляют нетривиальное решение системы* (7), *то функции* (12) *и* (13) *являются соответственно первым интегралом и последним множителем системы* (1).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [2, с. 249 – 251, 285 – 287; 6; 14] с учетом системы тождеств (8).

Следствие 3. *Если выполняются условия теоремы* 3 *при* $M = m+2$, *то функции* (12) *и* (13) *при* (6) *будут первыми интегралами системы* (1).

В случае существования у матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, кратных элементарных делителей из системы (1) произвольным образом выделим уравнение

$$\mathfrak{L}_\zeta(x)\, y = 0, \quad \zeta \in \{1,\ldots,m\}, \tag{1.ζ}$$

со свойством: у матрицы A_ζ число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j, $j=\overline{1,m}$.

Пусть λ_l^ζ — собственное число матрицы A_ζ, которому соответствует элементарный делитель кратности $\varkappa$ и собственный вектор ν^{0l}. Вектор ν^{kl}, координатами которого являются решения системы уравнений

$$\bigl(A_\zeta - \lambda_l^\zeta E\bigr)\,(\nu^{kl})^T = k\,(\nu^{k-1,l})^T, \quad k=\overline{1,\varkappa-1},$$

где T — знак транспонирования, назовем k-*м присоединенным вектором* [2, с. 252, 288; 6; 14] матрицы A_ζ, соответствующим собственному числу λ_l^ζ.

Аналогично доказательству теоремы 4 из [2, с. 252 – 256, 289 – 292; 6] с учетом тождеств (8) доказываем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* ν^{0l} *и* $\nu^{\theta l}$, $\theta=\overline{1,s_l-1}$, $l=\overline{1,r}$, — *линейно независимые вещественные общие собственные векторы матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$, *и присоединенные векторы матрицы* A_ζ, *соответствующие собственным числам* λ_l^ζ, $l=\overline{1,r}$, *с элементарными делителями кратностей* s_l, $\sum\limits_{l=1}^{r} s_l \geqslant M$, *а уравнение* (1.$\zeta$) *не имеет первых интегралов* $F_{\theta l}^j\colon x \to \mathfrak{L}_j v_{\theta l}(x)$ $\forall x\in\mathcal{X}$, $j=\overline{1,m}$, $j\neq\zeta$, *где функции* $v_{\theta l}\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$, $\theta=\overline{1,s_l-1}$, $l=\overline{1,r}$, *такие, что*

$$\nu^{\theta l}X = \sum_{q=1}^{\theta} \tbinom{\theta-1}{q-1} v_{ql}(x)\,\nu^{\theta-q,\,l}X \quad \forall x\in\mathcal{X}. \tag{14}$$

Тогда при $M=m+1$ *функция*

$$F\colon x \to \prod_{\xi=1}^{k} \bigl|\nu^{0\xi}X\bigr|^{h_{0\xi}} \exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi} v_{q\xi}(x) \quad \forall x\in\mathcal{X}, \tag{15}$$

где $X=(x_1,\ldots,x_n,1)$, $\sum\limits_{\xi=1}^{k}(\varepsilon_\xi+1)=M$, $\varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1$, $\xi=\overline{1,k}$, $k\leqslant r$, *будет первым интегралом системы* (1) *при* (2), *если числа* $h_{q\xi}\in\mathbb{R}$, $q=\overline{0,\varepsilon_\xi}$, $\xi=\overline{1,k}$, *есть нетривиальное решение линейной однородной системы*

$$\sum_{\xi=1}^{k} h_{0\xi} = 0, \quad \sum_{\xi=1}^{k} \left(\lambda_{\xi}^{j} h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^{j} h_{q\xi}\right) = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{16}$$

а если числа $h_{q\xi} \in \mathbb{R}$, $q = \overline{0,\varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1,k}$, *есть нетривиальное решение линейной неоднородной системы*

$$\sum_{\xi=1}^{k} h_{0\xi} = -n-1, \ \ \sum_{\xi=1}^{k} \left(\lambda_{\xi}^{j} h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^{j} h_{q\xi}\right) = -\sum_{\tau=1}^{n+1} a_{j\tau\tau}, \quad j = \overline{1,m},$$

то функция (15) *является последним множителем системы* (1) *при* (2). *При этом функции-решения* $v_{q\xi}$ *системы* (14) *такие, что* $\mathfrak{L}_j v_{q\xi}(x) \equiv \mu_{q\xi}^{j} = \mathrm{const}$, $q = \overline{1,\varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$, *а* λ_ξ^j, $\xi = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$, *— вещественные собственные числа матриц* A_j, $j = \overline{1,m}$, *соответствующие собственным векторам* $\nu^{0\xi}$, $\xi = \overline{1,k}$.

Из теоремы 4 получаем

Следствие 4. *Если выполняются условия теоремы* 4 *при* $M = m+2$, *то функция* (15) *при* (16) *будет первым интегралом системы* (1) *при* (2).

Например, для якобиевой системы уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_1(x)y \equiv (x_1+x_2-x_3-1)\,\partial_{x_1}y + (-x_2+x_3)\partial_{x_2}y + (x_1-1)\,\partial_{x_3}y = 0,$$

$$\mathfrak{L}_2(x)y \equiv \big(2x_2-2x_3-x_1\,a(x)\big)\partial_{x_1}y + \big(-x_1-4x_2+2x_3-1-x_2\,a(x)\big)\partial_{x_2}y +$$

$$+\big(-x_2-x_3-2-x_3\,a(x)\big)\partial_{x_3}y = 0, \quad a(x) \equiv x_1+x_2-x_3-1,$$

по собственному вектору $\nu^{01} = (1,1,-1,-1)$, соответствующему собственным числам $\lambda_3^1 = \lambda_2^1 = \lambda_1^1 = 0$ и $\lambda_3^2 = \lambda_2^2 = \lambda_1^2 = -2$, и присоединенным векторам $\nu^{11} = (1,0,0,-1)$, $\nu^{21} = (2,2,0,0)$, соответствующим собственному числу $\lambda_1^2 = -2$, по теореме 4 строим базис первых интегралов

$$v_{21}\colon x \to \frac{\nu^{01}X\ \nu^{21}X - (\nu^{11}X)^2}{(\nu^{01}X)^2} \quad \forall x \in \mathcal{X} \subset \{x\colon \nu^{01}X \neq 0\},\ X = (x_1,x_2,x_3,1).$$

Доказательство теоремы 4 предусматривает также случай, когда матрицы A_j, $j = \overline{1,m}$, имеют некоторое число общих комплексных собственных векторов ν^{0l} (при этом в (15) достаточно опустить знак модуля для комплекснозначных функций), соответствующих собственным числам λ_l^ζ с элементарными делителями кратностей s_l.

В данном случае на основании группировки M функций из v_{ql}, $l=\overline{1,r}$, $q=\overline{0,s_l-1}$, всегда получим одну из двух возможностей: 1) наряду с каждой комплекснозначной функцией вещественного аргумента в этом наборе функций содержится и комплексно сопряженная; 2) существует одна комплекснозначная функция, не имеющая комплексно сопряженной.

В каждом из этих случаев система (1) при (2) будет иметь следующие первые интегралы или последние множители.

В первом случае при $M=m+1$ функция

$$F\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\widehat{h}_{0\xi}}\exp\Bigl(-2\widetilde{h}_{0\xi}\,\varphi_{0\xi}(x)+ \\ +\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\bigl(\widehat{h}_{q\xi}\,\widehat{v}_{q\xi}(x)-\widetilde{h}_{q\xi}\,\widetilde{v}_{q\xi}(x)\bigr)\Bigr)\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl|\nu^{0\theta}X\bigr|^{h_{0\theta}}\exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}h_{q\theta}v_{q\theta}(x)\quad\forall x\in\mathcal{X}, \tag{17}$$

где $X=(x_1,\ldots,x_n,1)$, функции

$$P_{0\xi}\colon x\to\bigl(\widehat{\nu}^{\,0\xi}X\bigr)^2+\bigl(\widetilde{\nu}^{\,0\xi}X\bigr)^2,\quad \varphi_{0\xi}\colon x\to\operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}^{\,0\xi}X}{\widehat{\nu}^{\,0\xi}X}\quad\forall x\in\mathcal{X}, \tag{18}$$

будет первым интегралом системы (1) при (2), если числа $\widehat{h}_{q\xi},\widetilde{h}_{q\xi},h_{q\theta}\in\mathbb{R}$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, есть нетривиальное решение линейной однородной системы

$$2\sum_{\xi=1}^{k_1}\widehat{h}_{0\xi}+\sum_{\theta=1}^{k_2}h_{0\theta}=0,\quad \sum_{\xi=1}^{k_1}\Bigl(2\bigl(\widehat{\lambda}_\xi^j\,\widehat{h}_{0\xi}-\widetilde{\lambda}_\xi^j\,\widetilde{h}_{0\xi}\bigr)+ \\ +\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\bigl(\widehat{\mu}_{q\xi}^j\,\widehat{h}_{q\xi}-\widetilde{\mu}_{q\xi}^j\,\widetilde{h}_{q\xi}\bigr)\Bigr)+\sum_{\theta=1}^{k_2}\Bigl(\lambda_\theta^j\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j\,h_{q\theta}\Bigr)=0,\quad j=\overline{1,m}, \tag{19}$$

а если числа $\widehat{h}_{q\xi},\widetilde{h}_{q\xi},h_{q\theta}\in\mathbb{R}$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, есть нетривиальное решение линейной неоднородной системы

$$2\sum_{\xi=1}^{k_1}\widehat{h}_{0\xi}+\sum_{\theta=1}^{k_2}h_{0\theta}=-n-1,$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1}\biggl(2\bigl(\widehat{\lambda}_\xi^j\,\widehat{h}_{0\xi}-\widetilde{\lambda}_\xi^j\,\widetilde{h}_{0\xi}\bigr)+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\bigl(\widehat{\mu}_{q\xi}^j\,\widehat{h}_{q\xi}-\widetilde{\mu}_{q\xi}^j\,\widetilde{h}_{q\xi}\bigr)\biggr)+$$

$$+\sum_{\theta=1}^{k_2}\biggl(\lambda_\theta^j\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j\,h_{q\theta}\biggr)=-\sum_{\tau=1}^{n+1}a_{j\tau\tau},\quad j=\overline{1,m}\,,$$

то функция (17) будет последним множителем системы (1) при (2). При этом $\lambda_\xi^j=\widehat{\lambda}_\xi^j+\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i$, $\xi=\overline{1,k_1}$, и λ_θ^j, $\theta=\overline{1,k_2}$, есть комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi}=\widehat{\nu}^{0\xi}+\widetilde{\nu}^{0\xi}\,i$, $\xi=\overline{1,k_1}$, (среди которых нет комплексно сопряженных) и $\nu^{0\theta}$, $\theta=\overline{1,k_2}$. Числа $\widehat{\mu}_{q\xi}^j=\operatorname{Re}\mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x)$, $\widetilde{\mu}_{q\xi}^j=\operatorname{Im}\mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x)$, $\mu_{q\theta}^j=$ $=\mathfrak{p}_j v_{q\theta}(x)\ \ \forall x\in\mathcal{X}$, $j=\overline{1,m}$, функции $v_{q\xi}=\widehat{v}_{q\xi}+\widetilde{v}_{q\xi}\,i$ и $v_{q\theta}$, $q=\overline{1,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, находятся из системы (14), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось числовое равенство $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\bigl(\varepsilon_\xi+1\bigr)+\sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\varepsilon_\theta+1\bigr)=M$ при $2k_1+k_2\leqslant r$, $\varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1$, $\theta=\overline{1,k_2}$, здесь и далее k_1 — количество пар комплексно сопряженных общих собственных векторов, k_2 — количество вещественных общих собственных векторов матриц A_j, $j=\overline{1,m}$.

Если $M=m+2$, то функция (17) при (19) будет первым интегралом системы (1) при условии (2).

Во втором случае будем различать две возможности.

Случай 2а. Общий собственный вектор матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, не имеет комплексно сопряженного. Тогда при $M=m+1$ функции

$$\begin{aligned}F_1\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{0,2\xi-1}+\widetilde{h}_{0,2\xi}}\exp\biggl(&2\bigl(\widehat{h}_{0,2\xi-1}-\widehat{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_{0\xi}(x)+\\+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\Bigl(\bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi-1}+\widetilde{h}_{q,2\xi}\bigr)\widehat{v}_{q\xi}(x)&+\bigl(\widehat{h}_{q,2\xi-1}-\widehat{h}_{q,2\xi}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr)\biggr)\cdot\\\cdot\bigl(P_{0,2k_1+1}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{0,2k_1+1}}&\exp\bigl(2\,\widehat{h}_{0,2k_1+1}\,\varphi_{0,2k_1+1}(x)\bigr)\cdot\\\cdot\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\nu^{0\theta}X\bigr)^{2\widetilde{h}_{0\theta}}&\exp\biggl(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\widetilde{h}_{q\theta}v_{q\theta}(x)\biggr)\quad\forall x\in\mathcal{X},\end{aligned}\tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
F_2\colon x \to \prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\frac{1}{2}\,(\widehat{h}_{0,2\xi-1}+\widehat{h}_{0,2\xi})}\exp\biggl(-\bigl(\widetilde{h}_{0,2\xi-1}-\widetilde{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_{0\xi}(x)+\\
+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\Bigl(\bigl(\widehat{h}_{q,2\xi-1}+\widehat{h}_{q,2\xi}\bigr)\widehat{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi}-\widetilde{h}_{q,2\xi-1}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr)\biggr)\cdot\\
\cdot\bigl(P_{0,2k_1+1}(x)\bigr)^{\frac{1}{2}\,\widehat{h}_{0,2k_1+1}}\exp\bigl(-\widetilde{h}_{0,2k_1+1}\varphi_{0,2k_1+1}(x)\bigr)\cdot\\
\cdot\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl|\nu^{0\theta}X\bigr|^{\widehat{h}_{0\theta}}\exp\biggl(\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\widehat{h}_{q\theta}v_{q\theta}(x)\biggr)\quad \forall x\in\mathcal{X},
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $X=(x_1,\ldots,x_n,1)$, функции $P_{0\xi}$ и $\varphi_{0\xi}$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\xi=2k_1+1$, определяются формулами (18), будут первыми интегралами системы (1) при (2), если числа $h_{q\xi}=\widehat{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{\xi q}\,i,\ h_{q\theta}=\widehat{h}_{q\theta}+\widetilde{h}_{q\theta}\,i$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,2k_1+1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, есть нетривиальное решение однородной системы

$$
\begin{aligned}
\sum_{\xi=1}^{2k_1}h_{0\xi}+h_{0,2k_1+1}+\sum_{\theta=1}^{k_2}h_{0\theta}=0,\quad \sum_{\xi=1}^{2k_1}\biggl(\lambda_\xi^j\,h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\biggr)+\\
+\lambda_{2k_1+1}^j h_{0,2k_1+1}+\sum_{\theta=1}^{k_2}\biggl(\lambda_\theta^j\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j\,h_{q\theta}\biggr)=0,\quad j=\overline{1,m}\,,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

а если числа $h_{q\xi}=\widehat{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{\xi q}\,i,\ h_{q\theta}=\widehat{h}_{q\theta}+\widetilde{h}_{q\theta}\,i$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,2k_1+1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, есть нетривиальное решение неоднородной системы

$$
\begin{aligned}
\sum_{\xi=1}^{2k_1}h_{0\xi}+h_{0,2k_1+1}+\sum_{\theta=1}^{k_2}h_{0\theta}=-n-1,\quad \sum_{\xi=1}^{2k_1}\biggl(\lambda_\xi^j\,h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\biggr)+\\
+\lambda_{2k_1+1}^j h_{0,2k_1+1}+\sum_{\theta=1}^{k_2}\biggl(\lambda_\theta^j\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j\,h_{q\theta}\biggr)=-\sum_{\tau=1}^{n+1}a_{j\tau\tau}\,,\quad j=\overline{1,m}\,,
\end{aligned}
$$

то функции (20) и (21) будут соответственно первым интегралом и последним множителем системы (1) при условии (2). При этом $\lambda_{2\xi-1}^j=\widehat{\lambda}_\xi^j+\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i$,

$\lambda_{2\xi}^j = \widehat{\lambda}_\xi^j - \widetilde{\lambda}_\xi^j\, i,\ \xi = \overline{1, k_1}\,,\ \lambda_{2k_1+1}^j = \widehat{\lambda}_{2k_1+1}^j + \widetilde{\lambda}_{2k_1+1}^j\, i$ и $\lambda_\theta^j,\ \theta = \overline{1, k_2}\,,\ j = \overline{1, m}\,,$ — комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j = \overline{1, m}\,,$ соответствующие комплексным $\nu^{0,2\xi-1} = \widehat{\nu}^{\,0\xi} + \widetilde{\nu}^{\,0\xi}\, i,\ \nu^{0,2\xi} = \overline{\nu^{0,2\xi-1}}\,,\ \xi = \overline{1, k_1}\,,$ $\nu^{0,2k_1+1} = \widehat{\nu}^{\,0,2k_1+1} + \widetilde{\nu}^{\,0,2k_1+1}\, i$ и вещественным $\nu^{0\theta},\ \theta = \overline{1, k_2}\,,$ собственным векторам. Числа $\mu_{q,2\xi-1}^j \equiv \mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x),\ \mu_{q,2\xi}^j \equiv \mathfrak{p}_j \overline{v_{q\xi}(x)}\,,\ \mu_{q\theta}^j \equiv \mathfrak{p}_j v_{q\theta}(x),\ j = \overline{1, m}\,,$ функции $v_{q\xi} = \widehat{v}_{q\xi} + \widetilde{v}_{q\xi}\, i$ и $v_{q\theta},\ q = \overline{1, \varepsilon_k}\,,\ k = \xi$ или $k = \theta,\ \xi = \overline{1, k_1}\,,\ \theta = \overline{1, k_2}\,,$ находятся из системы (14), причем $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\bigl(\varepsilon_\xi + 1\bigr) + 1 + \sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\varepsilon_\theta + 1\bigr) = M$ при $2k_1 + 1 + k_2 \leqslant r,\ \varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1,\ \xi = \overline{1, k_1}\,,\ \varepsilon_\theta \leqslant s_\theta - 1,\ \theta = \overline{1, k_2}\,.$

Если $M = m + 2$, то функции (20) и (21) при (22) будут первыми интегралами системы (1) при условии (2).

Случай 2б. Функция $v_{l\gamma},\ \gamma \in \{1, \ldots, k_1\},\ l \in \{1, \ldots, \varepsilon_\gamma\}$, не имеет комплексно сопряженной функции. Тогда при $M = m + 1$ функции

$$
\begin{aligned}
F_1\colon x \to \prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{0,2\xi-1} + \widetilde{h}_{0,2\xi}} \exp\biggl(2\bigl(\widehat{h}_{0,2\xi-1} - \widehat{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_{0\xi}(x) + \\
+ \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\bigl(1 - \delta_{ql}\,\delta_{\xi\gamma}\bigr)\Bigl(\bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi-1} + \widetilde{h}_{q,2\xi}\bigr)\widehat{v}_{q\xi}(x) + \\
+ \bigl(\widehat{h}_{q,2\xi-1} - \widehat{h}_{q,2\xi}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr) + 2\bigl(\widehat{h}_{l\gamma}\,\widetilde{v}_{l\gamma}(x) + \widetilde{h}_{l\gamma}\,\widehat{v}_{l\gamma}(x)\bigr)\biggr)\cdot \\
\cdot \prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\nu^{0\theta} X\bigr)^{2\,\widetilde{h}_{0\theta}} \exp\biggl(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\widetilde{h}_{q\theta}\, v_{q\theta}(x)\biggr) \quad \forall x \in \mathcal{X}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

и

$$
\begin{aligned}
F_2\colon x \to \prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\frac{1}{2}\,(\widehat{h}_{0,2\xi-1} + \widehat{h}_{0,2\xi})} \exp\biggl(-\bigl(\widetilde{h}_{0,2\xi-1} - \widetilde{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_{0\xi}(x) + \\
+ \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\bigl(1 - \delta_{ql}\,\delta_{\xi\gamma}\bigr)\Bigl(\bigl(\widehat{h}_{q,2\xi-1} + \widehat{h}_{q,2\xi}\bigr)\widehat{v}_{q\xi}(x) + \\
+ \bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi} - \widetilde{h}_{q,2\xi-1}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr) + \widehat{h}_{l\gamma}\,\widehat{v}_{l\gamma}(x) - \widetilde{h}_{l\gamma}\,\widetilde{v}_{l\gamma}(x)\biggr)\cdot
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$\cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} \left|\nu^{0\theta} X\right|^{\widehat{h}_{0\theta}} \exp\Bigl(\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \widehat{h}_{q\theta} \upsilon_{q\theta}(x)\Bigr) \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n, 1)$, функции $P_{0\xi}$ и $\varphi_{0\xi}$, $\xi = \overline{1, k_1}$, определяются формулами (18), будут первыми интегралами системы (1) при (2), если числа $h_{q\xi} = \widehat{h}_{q\xi} + \widetilde{h}_{q\xi}\, i$, $h_{q\theta} = \widehat{h}_{q\theta} + \widetilde{h}_{q\theta}\, i$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, 2k_1}$, $\xi \neq \gamma + 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1} h_{0\xi} + \sum_{\theta=1}^{k_2} h_{0\theta} = 0, \quad \sum_{\xi=1}^{2k_1} \Bigl(\lambda_\xi^j\, h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^j\, h_{q\xi}\Bigr) - \mu_{l,\gamma+1}^j\, h_{l,\gamma+1} +$$
$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2} \Bigl(\lambda_\theta^j\, h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_{q\theta}^j\, h_{q\theta}\Bigr) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{25}$$

а если числа $h_{q\xi} = \widehat{h}_{q\xi} + \widetilde{h}_{q\xi}\, i$, $h_{q\theta} = \widehat{h}_{q\theta} + \widetilde{h}_{q\theta}\, i$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, 2k_1}$, $\xi \neq \gamma + 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной неоднородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1} h_{0\xi} + \sum_{\theta=1}^{k_2} h_{0\theta} = -n - 1, \quad \sum_{\xi=1}^{2k_1} \Bigl(\lambda_\xi^j\, h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^j\, h_{q\xi}\Bigr) - \mu_{l,\gamma+1}^j\, h_{l,\gamma+1} +$$
$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2} \Bigl(\lambda_\theta^j\, h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_{q\theta}^j\, h_{q\theta}\Bigr) = -\sum_{\tau=1}^{n+1} a_{j\tau\tau}, \quad j = \overline{1, m},$$

то функции (23) и (24) будут соответственно первым интегралом и последним множителем системы (1) при условии (2). При этом числа $\lambda_{2\xi-1}^j = \widehat{\lambda}_\xi^j + \widetilde{\lambda}_\xi^j\, i$, $\lambda_{2\xi}^j = \widehat{\lambda}_\xi^j - \widetilde{\lambda}_\xi^j\, i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и λ_θ^j, $\theta = \overline{1, k_2}$, $j = \overline{1, m}$, — комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j = \overline{1, m}$, соответствующие комплексным $\nu^{0,2\xi-1} = \widehat{\nu}^{0\xi} + \widetilde{\nu}^{0\xi}\, i$, $\nu^{0,2\xi} = \overline{\nu^{0,2\xi-1}}$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и вещественным $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, собственным векторам. Числа $\mu_{q\xi}^j$, $\mu_{q\theta}^j$ и функции $\upsilon_{q\xi}$, $\upsilon_{q\theta}$ определены в случае 2a, при этом $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\bigl(\varepsilon_\xi + 1\bigr) - 1 + \sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\varepsilon_\theta + 1\bigr) = M$ при $2k_1 + k_2 \leqslant r$, $\varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\varepsilon_\theta \leqslant s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$.

Если $M = m + 2$, то функции (23) и (24) при (25) будут первыми интегралами системы (1) при условии (2).

Список литературы

1. *Горбузов В.Н.* Математический анализ: теория поля. Гродно: ГрГУ, 2000. 627 с.

2. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем: монография. Гродно: ГрГУ, 2006. 447 с.

3. *Буслюк Д.В., Проневич А.Ф.* Интегральный базис обыкновенной автономной линейной неоднородной дифференциальной системы в комплексной области//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2007. № 2(52). С. 29–35.

4. *Проневич А.Ф.* Базис автономных первых интегралов линейной системы третьего порядка в комплексной области//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2002. № 2(11). С. 23–29.

5. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Построение интегралов линейной дифференциальной системы//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2003. № 2(22). С. 50–60.

6. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных//Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). 2001. № 3. С. 17–45.

7. *Проневич А.Ф.* Интегралы якобиевой системы в комплексной области //Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2002. № 1(9). С. 19–25.

8. *Проневич А.Ф.* Автономные интегралы линейных систем в полных дифференциалах / Ред. журнала «Дифференц. уравнения». Минск, 2002. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 02.10.2002. № 1667-В2002.

9. *Проневич А.Ф.* Интегралы линейной многомерной системы простой матричной структуры//Mathematical research (Saint Petersburg). – 2003. Vol. 10. P. 143–152.

10. *Горбузов В.Н., Даранчук С.Н.* Построение автономного интегрального базиса системы Якоби – Фурье//Герценовские чтения – 2004 «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»: Материалы науч. конф., Санкт Петербург, 12 – 16 апреля 2004 г./ Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. СПб., 2004. С. 18–24.

11. *Даранчук С.Н.* Базис автономных первых интегралов системы Якоби – Фурье в комплексной области//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2005. № 1(31). С. 27–32.

12. *Даранчук С.Н.* Интегральный базис системы Якоби – Гессе в комплексной области//Герценовские чтения – 2005 «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»: Материалы науч. конф., Санкт Петербург, 18 – 22 апреля 2005 г./ Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. СПб., 2005. С. 27–31.

13. *Горбузов В.Н., Даранчук С.Н.* Базис автономных первых интегралов системы Якоби – Фурье//Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2005. № 3. С. 70–74.

14. *Горбузов В.Н., Даранчук С.Н.* Интегральный базис системы Якоби – Гессе в частных производных//Изв. Рос. гос. пед. ун-та. Сер. Естеств. и точ. н. 2005. № 5. С. 65–76.

15. *Даранчук С.Н.* К задаче о построении интегрального базиса системы Якоби-Гессе//Герценовские чтения – 2006 «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»: Материалы науч. конф., Санкт Петербург, 17 – 22 апреля 2006 г./ Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. СПб., 2006. С. 66–72.

16. *Горбузов В.Н., Даранчук С.Н.* Спектральный метод построения первых интегралов системы Якоби//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2007. № 3(57). С. 63–67.

17. *Буслюк Д.В., Горбузов В.Н.* Интегралы системы Якоби в частных производных//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2000. № 1(3). С. 4–11.

18. *Буслюк Д.В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: Дис. канд. ... физ.-мат. наук. Гродно, 2000. 95 с.

19. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Матем. сб. 1992. Т.183, № 3. С. 76–94.

20. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* Интегралы дифференциальных систем с особым типом в проективном фазовом пространстве/ Ред. журнала "Дифференц. уравнения". Минск, 2002. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 02.10.2002. № 1666 – В2002.

21. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы систем в полных дифференциалах//Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1819–1822.

22. *Горбузов В.Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем//Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 4. С. 562–564.

23. *Горбузов В.Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах//Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). 2000. № 2. С. 1–36.

24. *Проневич А.Ф.* $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2005. 95 с.

25. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Интегралы $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах//Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 1. С. 49–52.

26. *Проневич А.Ф.* Интегралы систем уравнений в частных производных с $\mathbb{R}$-линейными коэффициентами//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2005. № 1(31). С. 45–52.

27. *Павлючик П.Б.* Решения, интегралы и последние множители системы Дарбу третьего порядка//Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2002. № 1(9). С. 33–37.

28. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* Решения, интегралы и предельные циклы системы Дарбу n-го порядка//Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru/journal). 2002. № 2. С. 26–46.

29. *Павлючик П.Б.* Интегральные многообразия алгебраически вложимых дифференциальных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2005. 91 с.

30. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. II. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 564 с.