ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы

Динамические системы, порожденные операторами, мажорируемыми снизу тождественными

Флоринский А.А.
Брыгин С.А
Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-Механический факультет
e-mail: florinskiy.a@gmail.com,sergeybrygen@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются нелинейные отображения вещественной прямой или упорядоченного метрического пространства в себя, для которых все траектории порожденных ими дискретных динамических систем являются неубывающими последовательностями чисел(или точек пространства). Такие отображения называются отображениями, мажорируемыми снизу тождественными. Исследуется сохранение ряда свойств траекторий систем,порожденных подобными отображениями:

1) при выполнении операции композиции порождающих их отображений;

2) при замене порождающих отображений на большие;

3) при замене порождающих отображений на меньшие.

Отношение порядка между отображениями определяется поточечно. Последние замены возникают,например, при приближенных вычислениях значений порождающих отображений с округлением в определенную сторону.

В работе получены следующие результаты:

(a) найдено достаточное условие при операции композиции порождающих отображений для сохранения свойства стабилизации всех траекторий системы;

(б) установлено,что на вещественной прямой, при любой замене порождающего систему отображения на большее, сохраняется свойство непустоты множества неограниченных траекторий; при этом свойство неограниченности отдельно взятых траекторий может при подобных заменах не сохраняться;

(в) установлено,что на прямой существуют дискретные системы с неубывающими траекториями у которых, при сколь угодно малых заменах порождающих отображений на меньшие, появляются скрытые аттракторы (в смысле Н.Кузнецова), и, следовательно, заметные хаотические свойства. Построен пример, иллюстрирующий свойство (в).

Ключевые слова: отображения, мажорируемые снизу тождественными, дискретные динамические системs, неограниченные траектории, скрытый аттрактор

Abstract

Dynamical system generated by a nonlinear operator acting on the real line or an ordered metric space and having increasing trajectories is considered. Such an operator is said to be mapping (operator), majorized below by identity map. The effect of changing the generating operator by the operator with lesser or greater values is studied. The main results of the work are the following:

(a) For the composition of generating mappings the sufficient condition to reserve the property of the stabilization of all system trajectories is obtained;

(b) It is proved that if the set of all unbounded trajectories of the operator acting on the real line is not empty, than any greater operator has the same property (with respect to the pointwise order relation);

(c) It is proved that there are systems on real line with increasing trajectories, such that we may change their generating operators by arbitrary close ones (by subtracting small constants from their values), and obtain the systems having hidden attractors (in the sense of N.Kuznetsov).

The example illustrating (c) is given.

Keywords: mappings majorized by the identity map, discrete dynamical systems, unbounded trajectories, hidden attractor

1 Введение. Некоторые определения и описание результатов.

Настоящая работа посвящена изучению непрерывных отображений класса M (мажорируемых снизу тождественными), действующих в некотором упорядоченном метрическом пространстве X. В основном, мы будем интересоваться свойствами порожденных такими отображениями дискретных динамических систем, то есть последоательностей вида $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$, состоящих из степеней отображения f относительно операции композиции. Траекторией указанной динамической системы или, коротко, траекторией самого отображения f, мы, как обычно, будем называть множество вида $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $x \in X$ - фиксированная точка; это же множество называется также орбитой точки x относительно отображения f. Принадлежность отображения f классу M означает по определению, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq x$. Это свойство очевидно эквивалентно неубыванию всех траекторий отображения f. В работе изучается существование или отсутствие у отображенияf стационарных, сходящихся или имеющих бесконечный предел траекторий и связь подобных явлений с другими динамическими и порядковыми свойствами рассматриваемого отображения. Заметим, что несмотря на монотонность всех траеторий отображения f, само отображение f может быть, например, нигде не монотонной функцией,заданной на вещественной прямой; это влечет возможность хаотических элементов во взаимном расположении его траекторий, возможную крайнюю неустойчивость его динамики при приближенном вычислении его значений и другие явления; например, легко строится отображение класса M, множеством неподвижных точек которого является произвольное замкнутое подмножество вещественной прямой. Отображения класса M и вопросы, связанные с их динамикой представляют интерес для теории игр (см. [**?**]), теории округлений (см. [**?**]) и хаотической динамики(см. [**?**]). В настоящей работе, кроме упомянутых выше вопросов о неограниченных, ограниченных и стационарных траекториях рассматриваются вопросы, связанные с изменением динамики отображения f при вычислении его значений с избытком или недостатком; последние, в случае $X = \mathbb{R}$, представляют собой некоторые порядковые разновидности классических вопросов теории устойчивости.

Перейдем к краткому описанию результатов настоящей работы. Заключительные, третий и четвертый параграфы работы посвящены изучению связанных с операцией округления вопросов устойчивости для динамических систем, порожденных отображениями типа M, заданных на вещественной прямой. В парагафе 3 устанавливается общая теорема (теорема 2) о верхних и нижних пределах орбит отображений f и g , связанных межлу собой неравенством $f(x) \geq g(x) \forall x \in \mathbb{R}$; в случае справедливости указанного неравенства мы будем говорить, что отображение f мажорируется отображением g снизу. Из теоремы 2 выводится, что свойство отображения класса M иметь орбиту, стремящуюся к бесконечности, является устойчивым при округлении вверх всех значений отображения f; в то же самое время, для любой фиксированной точки x , свойство стремления ее орбиты к бесконечности не является, вообще говоря, устойчивым при округлении значений отображения f вверх. В парагафе 4 рассматривается вопрос об усложнении динамики отображения класса M в результате округления всех его значений вниз. В частности, строится отображение, у которого при сколь угодно малом округлении его значений вниз может появляться скрытый аттрактор. Наличие скрытого аттрактора является важным показателем хаотичности динамики отображения; оно систематически изучалось в работах Н.В. Кузнецова и Г.А. Леонова (см. [?]). Парагаф 2 посвящен отображениям класса M, действующим в упорядоченном метрическом пространстве X; в нем вводятся и изучаются различные подклассы класса M, отвечающие различным дополнительным свойствам траекторий входящих в них отображений. Подобные подклассы встречаются в теории округлений и теории игр (см. [?], [?]). Представляет интерес вопрос об (алгебраической) устойчивости вводимых подклассов относительно операции композиции. Основным результатом этого параграфа является теорема 1, устанавливающая некоторые соотношения касающиеся композиций элементов упомянутых подклассов и связь между самим подклассами.

2 Некоторые подклассы класса M и их устойчивость относительно композиции.

Пусть X – упорядоченное метрическое пространство. Это означает, что на X определены отношение частичного порядка $\leq$ и метрика $d(x, y)$ причем функция $d(x, y)$ возрастает с возрастанием x при любом фиксированном y. Отображение f пространства X в себя класса M мы будем называть коротко M-отображением. Мы определим подклассы класса всех M-отображений следующим образом:

M_1–отображения - отображения с ограниченными (сверху) траекториями

M_2–отображения - возрастающие M-отображения

M_3-отображения - итеративно идемпотентные M-отображения

M_4- отображения - равномерно идемпотентные M-отображения.

При этом, отображение будем называеть (итеративно) идемпотентным, если для каждого $x \in X$ существует натуральное число $N(x)$ такое, что $f^n(x) = f^{n+1}(x)$ для любого натурального $n \geq N(x)$.

Отображение f будем называеть равномерно идемпотентным, если в предыдущем определении можно выбрать общее N для всех x; наименьшее такое N мы будем называть порядком идемпотентности отображения f.

Далее, пусть $f - M$-отображение из X в себя, со свойством: существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого x справедливо хотя бы одно из двух условий:

1. $d(f(x), x) > \varepsilon$.
2. $f(x)$ - неподвижная точка отображения f.

Тогда отображение f мы будем называть M_5-отображением.

Если же заменить второе условие более сильным:

каждая точка $t \geq f(x)$ - неподвижная точка отображения f , то мы будем говорить, что отображение f является M_6-отображением. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 Пусть X - компактное метрическое упорядоченное пространство. Тогда:

1. Каждое M_5-отображение является также и M_4-отображением.
2. Композиция (в любом порядке) отображения g типа M_6 с отображением f одного из типов M_6, M_4, M_3 имеет тот же тип, что и отображение f.
3. Если $X = [a; b]$ - промежуток на вещественной прямой, то классы отображений, имеющих, соответственно, типы M_4, M_5, M_6 совпадают. (В общем случае эти классы, вообще говоря, различны, как показывают простые примеры).

Доказательство Теоремы 1

1. Пусть $f - M_5$-отображение, $\varepsilon > 0$ – число из определения класса M_5. Рассмотрим произвольную орбиту $\{x_n\} \in X$ отображения f. В силу

компактности пространства X найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что каждое ε-дискретное подмножество X состоит не более чем из N точек. Если среди точек $x_1, .. , x_{N+1}$ нет неподвижных точек f, то $d(x_{n-1}, x_n) \geq \varepsilon$ по условию.

Кроме того, в силу того, что f - отображение класса M, последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Следовательно, для каждых $k < n \leq N+1$ имеем $x_n \geq x_{n-1} \geq x_k$, откуда $d(x_n, x_k \geq \varepsilon)$, то есть, $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ - ε-дискретное семейство в X, что невозможно. Таким образом доказано, что существует $n \leq N+1$ такое, что $x_{n+1} = x_n$, это, и, тем более, $x_{k+1} = x_k$ при $k > n$. Тем самым f является M_4-отображением.

2. Пусть $g \in M_6$. Рассмотрим $h(x) = f(g(x))$; и пусть $\{x_n\}$ – некоторая орбита отображения h. Пусть число $\varepsilon > 0$ выбрано из определения подкласса M_6. Зафиксируем натуральное число n. Если $d(g(x_k), x_k) > \varepsilon$ при всех $k \leq n$, то $h(x_k) = f(g(x_k)) \geq g(x_k) \geq x_k$, откуда $d(h(x_k), x_k) = d(x_{k+1}, x_k) > \varepsilon$ при всех $k \leq n$. Кроме того, последовательность x_k возрастает и значит - ε-дискретна при $k \leq n$. Следовательно, для некоторого n мы получаем из определения M_6: каждое $t \geq g(x_n)$ – неподвижная точка для g. Следовательно, при $k > n$ получаем, что x_k будет неподвижной точкой для g, ибо $x_k \geq g(x_n) = x_n$. Таким образом, $h(x_k) = f(x_k)$ при $k > n$ и поэтому свойства M_4 и M_3 для h следуют из одноименных свойств для f . Случай композиции в другом порядке аналогичен. Замкнутость относительно композиции самого класса M_6 очевидна.

3. Для доказательства утверждения заметим, что достаточно установить, что из свойства M_4 следует M_6.

   Пусть x_0 неподвижная точка функции f; если существует $x_1 > x_0$,такое, что $f(x_1) > x_1$, то мы можем, не умаляя общности, считать, что между x_0 и x_1 неподвижных точек у функции f нет. Выбирая точку t_0 между точками x_0 и x_1 достаточно близко к x_0, мы добьемся того, что любое наперед заданное количество начальных точек орбиты этой будет лежать между x_0 и x_1 и, следовательно, образовывать строго возрастающую последовательность сколь угодно большой длины. Мы получаем, что отображение f имеет сколь угодно длинные нестационарные орбиты, что противоречит условию M_4. Таким образом доказано, для любая точка $x_1 > x_0$ является неподвижной точкой отображения f.

   Таким образом, обозначая далее через x_0 наименьшую неподвижную точку отображенияf мы получим, что $f(x) = x$ при $x > x_0$ и $f(x) > x$

при $x < x_0$. Далее, найдется $\delta > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполнено $f(x) \geq x_0$. Пусть это не справедливо. Тогда легко проверить по индукции, что тогда для любого $\delta > 0$ и любого n найдется орбита отображения f лежащая в промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ и содержащая не менее чем n различных начальных точек. Для $n = 1$ это очевидно. Предположим (индукционное предположение), что для n-точечных орбит утверждение доказано. Возьмем $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ такое, что $f(x_1) < x_0$. Если $f(x) < x_0$ для всех $x \in (x_1, x_0)$, то орбита точки x_1 бесконечная. Если существует $x_2 \in (x_1, x_0)$ такое, что $f(x_2) = x_0$, то мы возьмем $x_2^{'} \in (x_1, x_0)$ по крайней мере с n-точечной орбитой и найдем $x_1^{'} \in (x_1, x_2)$ такое, что $f(x_1^{'}) < x_2^{'}$. Тогда орбита $x_1^{'}$ содержит по крайней мере $n+1$-точечную орбиту. Это противоречит условию M_4, значит при $(x_0 - \delta, x_0)$ выполненоо $f(x) \geq x_0$. Значит, $f(x)$ – неподвижная точка для f. Наконец, при $x \leq x_0 - \delta$, имеем $f(x) > x$ и, значит, число $\varepsilon = min(f(x) - x, x)$, где $x \leq x_0 - \delta$, положительно. Если $x \leq x_0 - \delta$, имеем $f(x) - x > \varepsilon$, и если $x \geq x_0 - \delta$ то $f(x) \geq x_0$ и значит число $f(x)$ является, как и любое $t \geq f(x)$, неподвижной точкой функции f. Это и означает что f из M_6.

Теорема доказана.

3 Динамика отображений класса M и вычисление их значений с избытком

Мы будем рассматривать в этом и следующем параграфах функции, заданные и непрерывные на вещественной прямой, т.е. принадлежащие классу $C(\mathbb{R})$. Как уже отмечалось во введении, условие $f \in M$ очевидно равносильно неубыванию всех орбит функции f и, как следствие, влечет наличие у всех орбит функции f конечного или бесконечного предела. Однако, взаимное расположение орбит различного типа функции класса M может быть достаточно сложным. Так, даже если рассматривать только неубывающие функции класса M, имеющие только ограниченные траектории, то, как легко видеть, множеством неподвижных точек такой функции может служить произвольное замкнутое неограниченное сверху множество $E \subset \mathbb{R}$.

При вычислении значения отображения f с избытком, то есть, фактически при переходе от отображения f к отображению g такому, что $g(x) \geq f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ мы, очевидно, остаемся в пределах класса M. Таким образом все орбиты отображения g имеют конечный или бесконечный предел.

Заметим однако, что из условий $g \geq f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = \infty$ не следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(x_0) = \infty$.

Достаточно рассмотреть следующие кусочнолинейные функции f и g с узлами в целых и полуцелых точках и заданные,в указанных узлах формулами:

$$f(n) = n + 1; f(n + \frac{1}{2}) = n + \frac{1}{2}$$
$$g(n) = n + \frac{3}{2}; g(n + \frac{1}{2}) = n + \frac{1}{2}$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Легко видеть, что f-орбита любой целой точки стремится к бесконечности, в то время как g-орбита такой точки ограничена, хотя $g \geq f$. Однако сказанное выше не означает, что у функции g нет другой орбиты, которая стремится к ∞.

Таким образом, хотя при вычислении с избытком значений отображения класса M траектория стремящаяся к бесконечности может исчезнуть, остается не сразу ясным вопрос, могут ли исчезнуть все траектории стремящиеся к бесконечности.

Ответу на последний вопрос посвящен настоящий параграф.

Мы начнем с доказательства следующего общего утверждения.

Теорема 2 Пусть $g, f \in C(\mathbb{R})$ и выполнено условие $f \geq g$. Тогда для любой орбиты $\{g^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ функции g найдется орбита $\{f^n(x^*)\}_{n=1}^{\infty}$ функции f такая, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f^n(x^*) \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} g^n(x_0)$

Доказательство. Зафиксируем x_0 из формулировки теоремы. Ясно, что если $f^{n_0}(x) > p_0$ для некоторых n_0, p_0 и любого x, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f^n(x) \geq p_0 \; \forall x$. Поэтому, не умаляя общности, $\exists p_0 < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} g^n(x_0)$ такое, что неравенство $f^n(x) < p_0$ имеет решение при любом n. Так же можно считать, что $g^n(x_0) > p_0 \forall n$ (заменив в случае необходимости x_0 на $g^m(x_0)$ при достаточно большом m). Итак, не умаляя общности, неравенсто $f^n(x) < g^m(x_0)$ имеет решение при любых натуральных n и m.

Рассмотрим теперь $k_0 \in \mathbb{N}$ - наибольшее, удовлетворяющее условию $f^{k_0}(x_0) \geq g^{k_0}(x_0)$. Тогда $f^{k_0}(x_0) > g^{k_0}(x_0)$. Пользуясь непрерывностью f возьмем ближайшее x_1 к x_0 такое, что $f^{k_0}(x_1) = g^{k_0}(x_0)$. Тогда $f^{k_0}(x) > g^{k_0}(x)$

на $[x_0, x_1)$. Для $k = k_0 + 1$ имеем $f^k(x_1) = f(g^{k_0}(x_0)) \geq g(g^{k_0}(x_0)) = g^k(x_0)$. Берем наибольшее k со свойствами $f^k(x_1) \geq g^k(x_0)$ и обозначаем его k_1.

И так $f^{k_1}(x_1) > g^{k_1}(x_0)$ и $f^{k_1}(x_0) < g^{k_1}(x_0)$. Между x_1 и x_0 берем x_2 так, чтобы на $[x_1, x_2)$ было $f^{k_1}(x) > g^{k_1}(x_0)$, а при $x = x_2$ достигалось равенство.

Имеем $f^k(x_2) \geq g^k(x_0)$ при $k = k_1 + 1$; k_2 - максимальное такое k. Тогда $f^{k_2}(x_2) > g^{k_2}(x_0)$ и $f^{k_2}(x_1) < g^{k_2}(x_0)$ так как $k_2 > k_1$. Между x_2 и x_1 берем x_3 ближайшее к x_2 со свойством $f^{k_2}(x_3) = g^{k_2}(x_0)$. И так далее. На каждом из вложенных промежутков $[x_{n-1}, x_n]$ имеем $f^{n-1}(x) \geq g^{n-1}(x_0)$. Тогда $x' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[x_{n-1}, x_n]$ искомая.Теорема доказана.

Для отображений f и g мажорируемых снизу тождественным получаем в качестве простого следствия следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $f(x) \geq g(x) \geq x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда, если у функции g существует орбита стремящаяся к $+\infty$, то и у функции f существует орбита стремящаяся к бесконечности.

Ясно, что аналогичное утверждение справедливо и для случая, если все неравенства в теореме, заменить на противоположные и рассматривать орбиты, стремящаяся к $-\infty$.

4 Динамика отображения класса M и вычисление значение отображения с недостатком

В отличие от случая вычисления значений отображения класса M с избытком, при вычислении его значений с недостатком полученное отображение может выйти из класса M. Свойство сходимости орбит при этом может не нарушится. Однако возможно и появление у отображения заметных хаотических свойств.

Напомним (более подробные и общие определения можно найти в работе [**?**] и указанной там литературе) простейшую форму определения скрытого аттрактора отображения f. Будем говорить, что компактное множество $A \subset \mathbb{R}$ - аттрактор отображения $f \in C(\mathbb{R})$, если:

1. $f(A) = A$.
2. $\exists U \subset \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} f^n(U) = A$, где U -некоторая замкнутая окрестность множества A.

. Предел в пункте 2, учитывая компактность A, можно понимать как притяжение аттрактором A каждой точки $x \in U$, то есть как стремление к нулю расстояний от множества A до орбиты точки x, рассматриваемой начиная с некоторого номера n (при стремлении этого номера n к бесконечности). Будем говорить, что аттрактор отображения f является скрытым (hidden attractor), если для любой неподвижной точки x_0 отображения f существует окрестность U_0 точки x_0 такая, что ни одна из точек $x \in U_0$ не притягивается аттрактором.

Цель этого параграфа заключается в доказательсвте следующей теоремы.

Теорема 4 Существует отображение $f \in M$ такое, что для некоторой стремящейся к нулю последовательности значений $\varepsilon > 0$ отображение $f(x) - \varepsilon$ имеет скрытый аттрактор.

Доказательство. Зафиксируем два положительных числа $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{1}{6}$.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ конечна, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$. Обозначим $\sum_{i=1}^{j} a_i = S_j$.

Введем последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_i = 6.5S_i$.

Определим функцию f на интервалах $[b_i; b_{i+1}]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4(S - S_i), & x \in [b_i; b_i + \frac{5}{2}a_{i+1}] \\ -2x + b^{''}, & x \in [b_i + \frac{5}{2}a_{i+1}; b_i + (\frac{19}{6} + \varepsilon_1)a_{i+1}] \\ -x + b^{'}, & x \in [b_i + (\frac{19}{6} + \varepsilon_2)a_{i+1}; b_i + 4a_{i+1}] \\ x + 4(S - S_{i+1}), & x \in [b_i + 4a_{i+1}; b_i + (\frac{25}{6} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)a_{i+1}] \\ b_i + \frac{25}{6}a_{i+1} + 4(S - S_{i+1}), & x \in [b_i + (\frac{25}{6} - 2\varepsilon_1)a_{i+1}; b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}] \\ x + 4(S - S_{i+1}), & x \in [b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}; b_{i+1}] \end{cases}$$

где $b^{'} = 2b_i + 8a_{i+1} + 4(S - S_{i+1})$, $b^{''} = 3b_i + \frac{15}{2}a_{i+1} + 4(S - S_i)$. На интервалах $[b_i + (\frac{19}{6} + \varepsilon_1)a_{i+1}; b_i + (\frac{19}{6} + \varepsilon_2)a_{i+1}]$ и $[b_i + (\frac{25}{6} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)a_{i+1}; b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}]$ положим функцию линейной и непрерывно соединяющей построеные части.

Левее b_1 продолжаем функцию линейно с угловым коэфицентом 1, правее $6.5S$ полагаем $f(x) = x$.

Лемма 1. Отображение f мажорируемо снизу тождественным.

Достаточно заметить, что $x + 4(S - S_i) > x$ и на каждом участке $[b_1; b_{i+1}]$ имеем $f(x) \in [x + 4(S - S_i); x + 4(S - S_{i+1})]$.

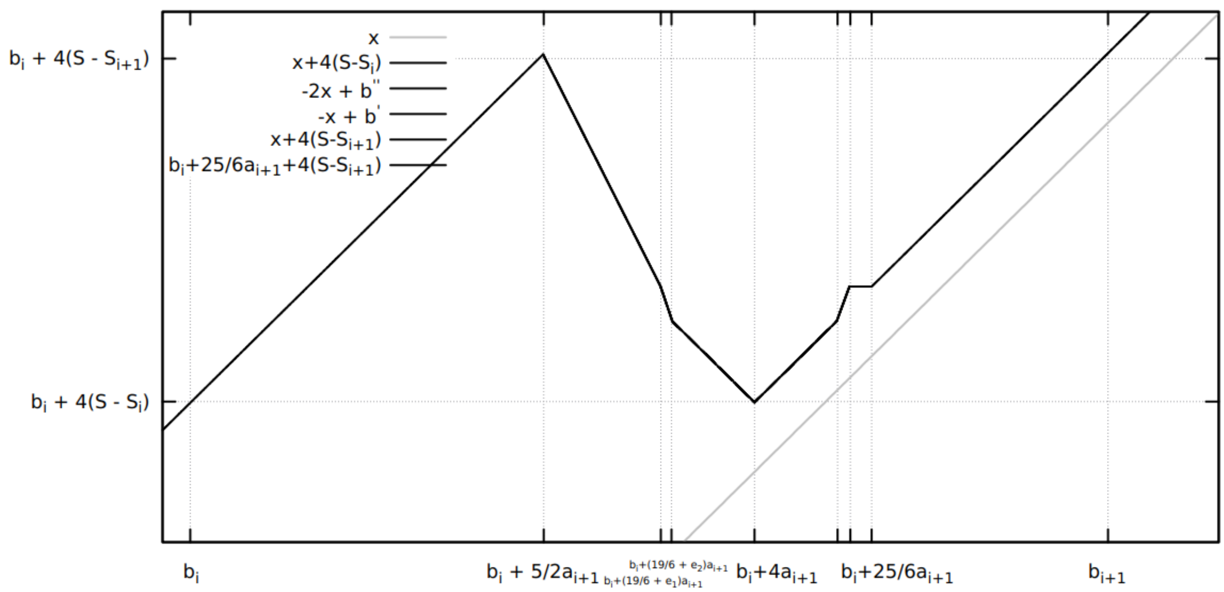

Рис. 1: Функция f на интервале $[b_i; b_{i+1}]$

Лемма 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$, такое, что у $f(x) - \delta$ есть скрытый аттрактор.

Для доказательства зафиксируем $\varepsilon > 0$.

Тогда существует такое натуральное i, что

$$\delta = 4(S - S_{i+1}) + a_{i+1} < 4(S - S_{i+1}) + 4a_{i+1} < 4(S - S_i) < \varepsilon$$

Далее, считая указанное значение i фиксированным, рассмотрим функцию $f - \delta$ на интервале $[b_i; b_{i+1}]$:

$$f(x) - \delta = \begin{cases} x + 3a_{i+1}, & x \in [b_i; b_i + \frac{5}{2}a_{i+1}] \\ -2x + 3b_i + \frac{21}{2}a_{i+1}, & x \in [b_i + \frac{5}{2}a_{i+1}; b_i + (\frac{19}{6} + \varepsilon_1)a_{i+1}] \\ -x + 2b_i + 7a_{i+1}, & x \in [b_i + (\frac{19}{6} + \varepsilon_2)a_{i+1}; b_i + 4a_{i+1}] \\ x - a_{i+1}, & x \in [b_i + 4a_{i+1}; b_i + (\frac{25}{6} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)a_{i+1}] \\ b_i + \frac{19}{6}a_{i+1}, & x \in [b_i + (\frac{25}{6} - 2\varepsilon_1)a_{i+1}; b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}] \\ x - a_{i+1}, & x \in [b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}; b_{i+1}] \end{cases}$$

На интервалах $[b_i+(\frac{19}{6}+\varepsilon_1)a_{i+1}; b_i+(\frac{19}{6}+\varepsilon_2)a_{i+1}]$ и $[b_i+(\frac{25}{6}-\varepsilon_1-\varepsilon_2)a_{i+1}; b_i+$

$\frac{25}{6}a_{i+1}]$ функция также остается линейной и непрерывно соединяющей построеные части.

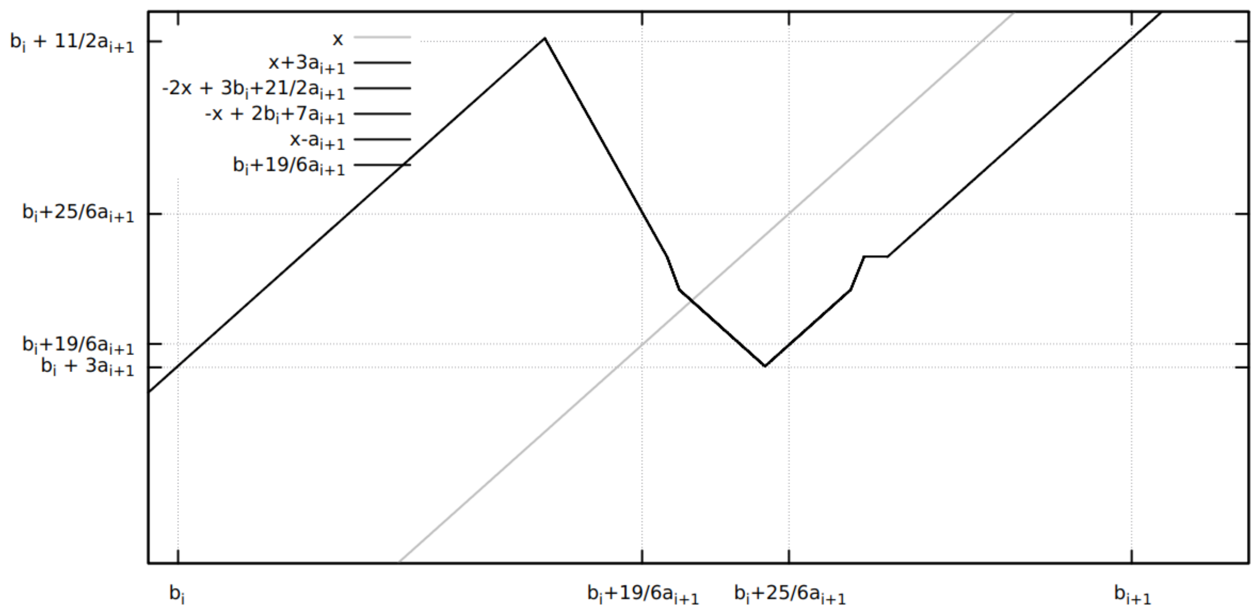

Рис. 2: Функция $f(x) - \delta$ на интервале $[b_i; b_{i+1}]$

Рассмотрим состояние равновесия:

$f(b_i + \frac{7}{2}a_{i+1}) = -(b_i + \frac{7}{2}a_{i+1}) + 2b_i + 7a_{i+1} = b_i + \frac{7}{2}a_{i+1}.$

Вне отрезка $[b_i; b_{i+1}]$ неподвижных точек нет, в силу того, что график функции лежит между прямыми параллельными прямой $y = x$, и расположенными по одну сторону от нее.

На промежутке $[b_i; b_{i+1}]$, на участке от $b_i + \frac{5}{2}a_{i+1}$ до $b_i + 4a_{i+1}$ монотонно убывает, а значит существует не более одного состояния равновесия.

Покажем что на интервале $[b_i + 4a_{i+1}; b_{i+1}]$ нет состояний равновесий. Достаточно проверить, что значения функции на интервале $[b_i + (\frac{25}{6} - 2\varepsilon_1)a_{i+1}; b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}]$ не превосходят аргумента. Действительно:

$b_i + \frac{25}{6}a_{i+1} > b_i + (\frac{25}{6} - 2\varepsilon_1)a_{i+1} > b_i + \frac{23}{6}a_{i+1} > b_i + \frac{19}{6}a_{i+1}$

Так же заметим, что $b_i + (\frac{19}{6} + \varepsilon_2)a_{i+1} < b_i + \frac{7}{2}a_{i+1} < b_i + 4a_{i+1}$, а значит орбита точек из окрестности состояния равновесия является циклической с периодом 2.

Рассмотрим орбиту точки $b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}$:

$b_i + \frac{25}{6}a_{i+1} \xrightarrow{x-a_{i+1}} b_i + \frac{19}{6}a_{i+1} \xrightarrow{-2x+3b_i+\frac{21}{2}a_{i+1}} b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}.$

Значит $I = \{b_i + \frac{19}{6}a_{i+1}, b_i + \frac{25}{6}a_{i+1}\}$ инвариантное множество отображения $f(x) - \delta$.

Пусть $0 < \beta < \varepsilon_1$ тогда:

$b_i + \frac{25}{6}a_{i+1} + \beta \xrightarrow{x-a_{i+1}} b_i + \frac{19}{6}a_{i+1} + \beta \xrightarrow{-2x+3b_i+\frac{21}{2}a_{i+1}} b_i + \frac{25}{6}a_{i+1} - 2\beta \xrightarrow{b_i+\frac{19}{6}a_{i+1}} b_i + \frac{19}{6}a_{i+1}.$

$b_i + \frac{25}{6}a_{i+1} - \beta \xrightarrow{b_i+\frac{19}{6}a_{i+1}} b_i + \frac{19}{6}a_{i+1}.$

Таким образом, I скрытый аттрактор.

Теорема доказана.

Замечание к теореме 4. При построении функции f можно рассматривать также последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ со следующим свойством: $b_{i+1} \geq b_i + 6.5a_{i+1}$.

Тогда, если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \infty$, то функция$f$ является отображением, строго мажорируемым снизу тождественным.

В заключение авторы выражают благодарность Н.В. Кузнецову, С.В.Чистякову, М.А. Скопиной и Н.Б. Ампиловой за полезные обсуждения различных аспектов этой работы.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ № НШ-2858.2018.1 для государственной поддержки ведущих научных школ 2018-2019гг.

Список литературы

[1] Н.В. Кузнецов, Аналитико-численные методы исследования скрытых колебаний, Диссертация на соискание уч.степени доктора физико-математических наук / С.-Петерб. гос. ун-т., Санкт-Петербург, 2016

[2] С.В. Чистяков, Элементы динамической теории классических кооперативных игр. СПб, РОПИ Изд-ва С.-Петерб. ун-та, 2001. 30 с.

[3] A.L. Kryukova, On idempotent elements of semigroup of increasing monotonous mappings, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2011, Volume 11, Issue 4, Pages 27–33.