ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

С.М. Евдокимов[2]

В работе рассматривается система автоматического управления вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma = ay + bx$. Предполагается, что $\alpha > 0, \quad \beta > 0$ и $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, т.е. при $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] \equiv 0$ система (1) является асимптотически устойчивой и передаточная функция системы является невырожденной.

$\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$ – релейно-гистерезисная функция, состоящая из двух ветвей однозначных функций $\varphi_1\,(t, \sigma)$ и $\varphi_2\,(t, \sigma)$, изображенная на рис. 1.

Строгое общее определение гистерезисных нелинейностей введено в работах В.А. Якубовича [12], М.А. Красносельского и А.В. Покровского [7]. Значение функции $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$ зависит от t, функции $\sigma\,(t)$ и от начального значения φ_0.

В нашем случае гистерезисная функция $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$ состоит из двух ветвей однозначных функций $\varphi_1\,(t, \sigma)$ и $\varphi_2\,(t, \sigma)$:

$$\begin{cases} \varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] = \varphi_1\,(t,\,\sigma)\,, & \text{если}\ \ \sigma \geq -\delta, \\ \varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] = \varphi_2\,(t,\,\sigma)\,, & \text{если}\ \ \sigma \leq \delta \quad (\delta > 0)\,, \end{cases} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ-954.2008.1, Математико-механический факультет Санкт-Петербургского Государственного Университета).

направление обхода петли гистерезиса указано на рис. 1 стрелками.

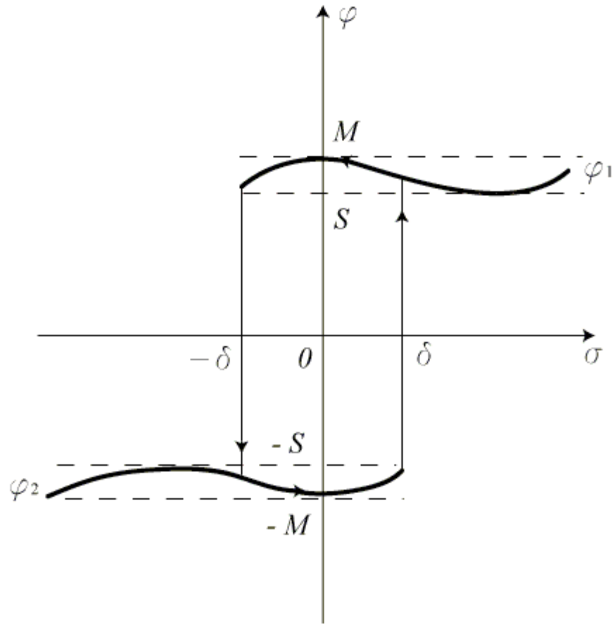

Рис. 1

Если $\sigma_0 > \delta$, то $\varphi_0 = \varphi_1(0, \sigma_0)$; если $\sigma_0 < -\delta$, то $\varphi_0 = \varphi_2(0, \sigma_0)$; в случае $-\delta \le \sigma_0 \le \delta$ множество начальных значений состоит из двух точек: $\varphi_0 \in \{\varphi_1(0, \sigma_0),\ \varphi_2(0, \sigma_0)\}$. $S \le \varphi_1(t, \sigma) \le M, \quad -M \le \varphi_2(t, \sigma) \le -S$, где $S,\ M$ - некоторые константы, $0 < S < M$.

Двумерные системы вида (1) с различными нелинейностями $\varphi[t, \sigma, \varphi_0]$ возникают во многих прикладных задачах теории управления и достаточно хорошо изучены, их исследованию посвящено большое количество работ и монографий (например, [1-4, 6, 10-11]). Одной из основных задач является определение значений параметров системы, при которых положения равновесия или стационарные множества системы являются устойчивыми.

Понятие абсолютной устойчивости систем автоматического управления с нелинейностью $\varphi(t, \sigma)$, удовлетворяющей секторному условию $0 \le \varphi(t, \sigma)\,\sigma \le k\sigma^2$ для $\forall t \in \mathrm{R},\ \forall \sigma \in \mathrm{R}$, было впервые введено в работе [9]. Исследование устойчивости таких систем проводилось с помощью построения функций Ляпунова или с помощью частотных методов (например, [6, 9]), которые позволяют получить лишь достаточные условия абсолютной устойчивости. Г.А. Леоновым в работе [8] с помощью метода систем сравнения получены эффективные и легко проверяемые необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости таких систем.

Системы с неединственным состоянием равновесия и с нелинейностью, не удовлетворяющей секторному условию, также достаточно широко изучены (например, [4, 6, 13]). Большое число работ посвящено исследованию систем с различными релейными нелинейностями (например, [11, 13]), и в частности, с релейно-гистерезисной нелинейностью вида $\varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]$, где

$$\begin{cases} \varphi\,[t,\sigma,\varphi_0] = M, \ \text{ если } \ \sigma \geq -\delta, \\ \varphi\,[t,\sigma,\varphi_0] = -M, \ \text{ если } \ \sigma \leq \delta \ \ (M,\ \delta > 0)\,, \end{cases} \tag{3}$$

которая является частным случаем нелинейности (2).

Понятие абсолютной устойчивости для систем вида (1) с нелинейностью (2) строго не сформулировано, хотя и используется в литературе (например, [2, 3]).

В данной работе вводится определение абсолютной устойчивости двумерных систем вида (1) с релейно-гистерезисной нелинейностью (2) и через коэффициенты системы даются необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости таких систем. Эти условия получены с помощью метода систем сравнения. В качестве систем сравнения рассматриваются системы вида (1) с нелинейностью вида (3). Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом стационарного множества таких систем приведены в [5]. Результаты работы являются новыми и могут быть использованы для решения ряда теоретических задач и более детального изучения реальных релейных систем, где кусочно-линейные модели становятся слишком упрощенными и требуется учет различных внешних воздействий.

Фазовая поверхность системы (1) с нелинейностью вида (2) состоит из двух листов: $P_1 = \{(x,y):\ \sigma \geq -\delta\}$ и $P_2 = \{(x,y):\ \sigma \leq \delta\}$, перекрывающих друг друга в "зоне неоднозначности" $-\delta \leq \sigma \leq \delta$.

Переход фазовой точки с первого листа на второй происходит по лучу $L_1 = \{(x,y) : \sigma = -\delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma\to-\delta+0} \leq 0\}$, переход со второго листа на первый - по лучу $L_2 = \{(x,y) : \sigma = \delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma\to\delta-0} \geq 0\}$ (рис. 1).

Решением системы (1) с нелинейностью (2) на листе P_1 является решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi_1\,(t,\,\sigma)\,, \end{cases} \tag{4}$$

на листе P_2 - решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi_2\,(t,\,\sigma)\,. \end{cases} \tag{5}$$

Предполагаем, что функции $\varphi_i(t, \sigma) : \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $(i = 1,\ 2)$ таковы, что на листе P_1 выполнены условия существования и единственности решения системы (4), на листе P_2 - условия существования и единственности решения системы (5).

Решение системы (4) на листе P_1, достигающее в момент времени $t = \tau_1$ луча L_1 в некоторой точке $(x_1,\ y_1)$, продолжается при $t > \tau_1$ на лист P_2 и является решением системы (5) с начальными данными $(\tau_1,\ x_1,\ y_1)$.

Аналогично, решение (5) на листе P_2, достигающее в момент $t = \tau_2$ луча L_2 в точке $(x_2,\ y_2)$, продолжается при $t > \tau_2$ на лист P_1 и является решением системы (4) с начальными условиями $(\tau_2,\ x_2,\ y_2)$.

Определение 1. Будем говорить, что гистерезисная функция $\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0]$, удовлетворяющая описанным выше условиям, является *функцией класса* $K_{S,M}$.

Не умаляя общности рассуждений можно считать, что $a \geq 0$. Для доказательства этого факта в системе достаточно сделать замену $x \to -x,\ \ y \to -y$ и заметить, что функция $-\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0]$ тоже принадлежит классу $K_{S,M}$.

Рассмотрим случай $a > 0$ (случай $a = 0$ рассматривается аналогично).

Введем в рассмотрение два отрезка:

$J_1 = \{(x, y) :\ -M/\beta \leq x \leq -S/\beta,\ y = 0\}$ и

$J_2 = \{(x, y) :\ S/\beta \leq x \leq M/\beta,\ y = 0\}$.

Заметим, что если при $x = x_0,\ \ y = y_0$ и некотором $t = t_0$ правые части системы (4) обращаются в ноль, то точка $(x_0,\ y_0)$ принадлежит множеству J_1. И каждая точка отрезка J_1 является особой точкой системы (4) при $\varphi_1(t,\ \sigma) = c = const$, где $S \leq c \leq M$.

Аналогично, если при $x = x_0,\ \ y = y_0$ и некотором $t = t_0$ правые части системы (5) обращаются в ноль, то $(x_0,\ y_0) \in J_2$. И каждая точка J_2 является особой точкой системы (5) при $\varphi_2(t,\ \sigma) = c = const$, где $-M \leq c \leq -S$.

Если выполнено неравенство $\delta\beta - Mb \geq 0$, то отрезок J_1 целиком лежит в P_1, а отрезок J_2 целиком лежит в P_2.

Определение 2. Множество $\Theta = J_1 \cup J_2$ назовем *сингулярным множеством* для системы (1) с функцией $\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0]$ класса $K_{S,M}$.

Определение 3. Множество Θ называется *устойчивым множеством* системы (1) с функцией $\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0]$ класса $K_{S,M}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого решения $(x(t),\ y(t))$ системы с начальными условиями $(t_0,\ x_0,\ y_0)$ выполнение неравенства $\rho\left((x(t_0),\ y(t_0)),\ \Theta\right) < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $\rho\left(\left(x\left(t\right),\ y\left(t\right)\right),\ \Theta\right) < \varepsilon$ для всех $t > t_0$.

Определение 4. Множество Θ называется *устойчивым в целом множеством* системы (1) с функцией $\varphi\left[t,\sigma,\varphi_0\right]$ класса $K_{S,M}$, если оно устойчиво и для каждого решения $\left(x\left(t\right),\ y\left(t\right)\right)$ системы $\rho\left(\left(x\left(t\right),\ y\left(t\right)\right),\ \Theta\right) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Определение 5. Система (1) называется *абсолютно устойчивой* в классе нелинейностей $K_{S,M}$, если для любой функции $\varphi\left[t,\sigma,\varphi_0\right]$ из этого класса множество Θ является для системы (1) устойчивым в целом.

Изучим теперь поведение решений системы (1) с нелинейностью класса $K_{S,M}$.

Введем в рассмотрение системы сравнения.

На листе P_1:
при $y > 0$

$$\frac{-\alpha y - \beta x - (M+\varepsilon)}{y} < \frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha y - \beta x - \varphi_1\left(t,\sigma\right)}{y} < \frac{-\alpha y - \beta x - (S-\varepsilon)}{y},$$

при $y < 0$

$$\frac{-\alpha y - \beta x - (S-\varepsilon)}{y} < \frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha y - \beta x - \varphi_1\left(t,\sigma\right)}{y} < \frac{-\alpha y - \beta x - (M+\varepsilon)}{y}$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

Обозначим $M+\varepsilon = \bar{M}$, $S-\varepsilon = \bar{S}$.

Из неравенств следует, что при $y > 0$ решения системы (4) пересекают "снаружи вовнутрь" решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \bar{S}, \end{cases} \tag{6}$$

и пересекают "изнутри наружу" решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \bar{M}. \end{cases} \tag{7}$$

При $y < 0$ решения системы (4) пересекают "снаружи вовнутрь" решения системы (7) и пересекают "изнутри наружу" решения системы (6).

На листе P_2:
при $y > 0$

$$\frac{-\alpha y - \beta x + (S-\varepsilon)}{y} < \frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha y - \beta x - \varphi_2\left(t,\sigma\right)}{y} < \frac{-\alpha y - \beta x + (M+\varepsilon)}{y},$$

при $y < 0$

$$\frac{-\alpha y-\beta x+(M+\varepsilon)}{y}<\frac{dy}{dx}=\frac{-\alpha y-\beta x-\varphi_2(t,\sigma)}{y}<\frac{-\alpha y-\beta x+(S-\varepsilon)}{y}$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

Поэтому при $y > 0$ решения системы (5) пересекают "изнутри наружу" решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\alpha y-\beta x+\bar{S}, \end{cases} \tag{8}$$

и пересекают "снаружи вовнутрь" решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\alpha y-\beta x+\bar{M}. \end{cases} \tag{9}$$

При $y < 0$ решения (5) пересекают "снаружи вовнутрь" решения системы (8) и пересекают "изнутри наружу" решения системы (9).

Если $b\left(b^2-\alpha ab+\beta a^2\right) > 0$, то лучи L_1 и L_2 определяются следующим образом: $L_1 = \{(x,y):\ ay+bx=-\delta,\ y\le-\gamma_1\}$, $L_2 = \{(x,y):\ ay+bx=\delta,\ y\ge\gamma_2\}$, $\gamma_1 = \frac{a(\delta\beta-\varphi_1(t_0,-\delta)b)}{b^2-\alpha ab+\beta a^2}$, $\gamma_2 = \frac{a(\delta\beta+\varphi_2(t_0,\delta)b)}{b^2-\alpha ab+\beta a^2}$, и $\gamma_{\bar{M}} \le \gamma_{1,2} \le \gamma_{\bar{S}}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$, где $\gamma_{\bar{M}} = \frac{a\left(\delta\beta-\bar{M}b\right)}{b^2-\alpha ab+\beta a^2}$, $\gamma_{\bar{S}} = \frac{a\left(\delta\beta-\bar{S}b\right)}{b^2-\alpha ab+\beta a^2}$.

Если $b\left(b^2-\alpha ab+\beta a^2\right) < 0$, то $L_1 = \{(x,y):\ ay+bx=-\delta,\ y\ge-\gamma_1\}$, $L_2 = \{(x,y):\ ay+bx=\delta,\ y\le\gamma_2\}$ и $\gamma_{\bar{S}} \le \gamma_{1,2} \le \gamma_{\bar{M}}$.

Если $b = 0$, то $L_1 = \{(x,y):\ ay=-\delta,\ x\ge-\eta_1\}$, $L_2 = \{(x,y):\ ay=\delta,\ x\le\eta_2\}$, где $\eta_1 = \frac{\varphi_1(t_0,-\delta)a-\delta\alpha}{\beta a}$, $\eta_2 = \frac{-\varphi_2(t_0,\delta)a-\delta\alpha}{\beta a}$, и $\eta_{\bar{S}} \le \eta_{1,2} \le \eta_{\bar{M}}$, где $\eta_{\bar{M}} = \frac{\bar{M}a-\delta\alpha}{\beta a}$, $\eta_{\bar{S}} = \frac{\bar{S}a-\delta\alpha}{\beta a}$.

Теорема 1. *Пусть* $b > 0$, $\delta\beta - Mb > 0$ *и выполнено одно из следующих условий 1 - 7:*

1) $\alpha^2-4\beta>0,\ \ \lambda_2>-b/a$;

2) $\alpha^2-4\beta>0,\ \ \lambda_2<-b/a$ *и* $a\lambda_2(M+S)+(\delta\beta+Sb)\ge0$;

3) $\alpha^2-4\beta>0,\ \ \lambda_2<-b/a$, $a\lambda_2(M+S)+(\delta\beta+Sb)<0$ *и*

$$\left(\frac{a\lambda_1(M+S)+(\delta\beta+Sb)}{a\lambda_2(M+S)+(\delta\beta+Sb)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\left(a\lambda_1(M+S)+(\delta\beta+Sb)\right)>$$

$$> (Mb - \delta\beta) - \left(\frac{a\lambda_1 + b}{a\lambda_2 + b}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} (M - S)(a\lambda_1 + b); \qquad (10)$$

4) $\alpha^2 - 4\beta = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > -b/a;$

5) $\alpha^2 - 4\beta = 0, \quad \lambda < -b/a$ *и* $a\lambda(M+S) + (\delta\beta + Sb) \geq 0;$

6) $\alpha^2 - 4\beta = 0, \quad \lambda < -b/a, \; a\lambda(M+S) + (\delta\beta + Sb) < 0$ *и*

$$\exp\left(-\frac{a\lambda(M+S)}{a\lambda(M+S) + (\delta\beta + Sb)}\right) \cdot (a\lambda(M+S) + (\delta\beta + Sb)) >$$

$$> (Mb - \delta\beta) - \exp\left(-\frac{a\lambda}{a\lambda + b}\right) \cdot (M - S)(a\lambda + b); \qquad (11)$$

7) $\alpha^2 - 4\beta < 0, \quad \lambda_{1,2} = v \pm iw$ *и*

$$\exp\left(\frac{v}{w}(\theta_1 + \theta_2)\right) \cdot \sqrt{(av(M+S) + (\delta\beta + Sb))^2 + (aw(M+S))^2} <$$

$$< (\delta\beta - Mb) - \exp\left(\frac{v}{w}\theta_2\right) \cdot (M - S)\sqrt{a^2\beta + 2abv + b^2}, \qquad (12)$$

где $\theta_1 = arctg\left(\frac{aw(\delta\beta - Mb)}{\xi}\right) + \pi r_1$, $\theta_2 = arctg\left(\frac{-aw}{av+b}\right) + \pi r_2$,

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi > 0, \\ 1, & \text{если } \xi < 0; \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } av + b < 0, \\ 1, & \text{если } av + b > 0; \end{cases}$$

$$\xi = a(a\beta + bv)(M+S) + (\delta\beta + Sb)(av + b).$$

Тогда система (1) абсолютно устойчива в классе нелинейностей $K_{S,M}$.

Доказательство.

1) Пусть $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_2 > -b/a$.

Рассмотрим сначала случай $\lambda_2 > \lambda_1 > -b/a$.

Положения равновесия систем (6)-(9) $\left(\pm\bar{S}/\beta;\ 0\right)$ и $\left(\pm\bar{M}/\beta;\ 0\right)$ являются устойчивыми узлами и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ расположены в зоне неоднозначности $-\delta \leq \sigma \leq \delta$.

На листе $\sigma \geq -\delta$ при $y > 0$ решения системы (4) пересекают "снаружи вовнутрь" решения системы (6) и пересекают "изнутри наружу" решения (7). Если $y < 0$, то решения (4) пересекают "снаружи вовнутрь" решения системы (7) и пересекают "изнутри наружу" решения (6). Поэтому при $t \to +\infty$ решения системы (4) на первом листе попадают в "коридоры", составленные из решений систем (6), (7), и стремятся к точкам отрезка

$\bar{J}_1 = \left\{(x, y):\ -\bar{M}/\beta \le x \le -\bar{S}/\beta,\ y = 0\right\}$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ (рис. 2).

Аналогично на листе $\sigma \le \delta$ решения (5) при $t \to +\infty$ стремятся к точкам отрезка $\bar{J}_2 = \left\{(x, y):\ \bar{S}/\beta \le x \le \bar{M}/\beta,\ y = 0\right\}$ по "коридорам", составленным из решений систем (8), (9) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Аналогично рассматривается случай $\lambda_1 < -b/a < \lambda_2$.

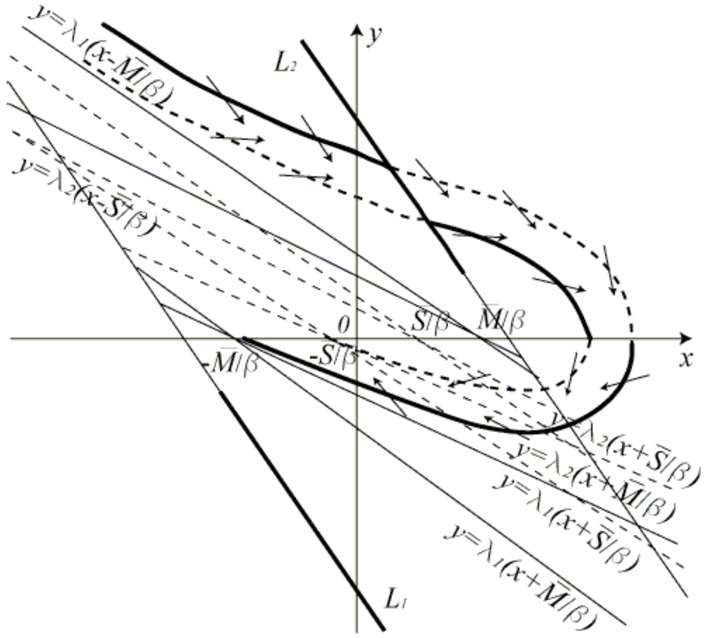

Рис. 2

2) Пусть $\alpha^2 - 4\beta > 0,\ \ \lambda_1 < \lambda_2 < -b/a$.

Здесь $L_1 = \{(x, y):\ \ ay + bx = -\delta,\ \ y \le -\gamma_1\}$,

$L_2 = \{(x, y):\ \ ay + bx = \delta,\ \ y \ge \gamma_2\}$ и $\gamma_{\bar{M}} \le \gamma_{1,2} \le \gamma_{\bar{S}}$.

Обозначим через $(\tilde{x}_{\bar{S}},\ \tilde{y}_{\bar{S}})$ точку пересечения траектории системы (6) $y = \lambda_1\left(x + \bar{S}/\beta\right)$, $y > 0$, и прямой $ay + bx = \delta$.

Если $\tilde{y}_{\bar{S}} \le \gamma_2$, то точка $(\tilde{x}_{\bar{S}},\ \tilde{y}_{\bar{S}})$ лежит вне луча L_2 или совпадает с началом луча L_2. При этом все решения системы (5), выходящие на луч L_2, переходят в решения системы (4), которые при возрастании времени попадают в "коридоры", составленные из решений системы (6) и решений системы (7). Траектории (7) стремятся к положению равновесия $\left(-\bar{M}/\beta,\ 0\right)$, траектории (6) - к положению равновесия $\left(-\bar{S}/\beta,\ 0\right)$, и решения (4) в этом случае стремятся к точкам отрезка $\bar{J}_1$. Аналогично, решения системы (4), выходящие на луч L_1, переходят в решения системы (5), которые при возрастании времени стремятся к точкам отрезка $\bar{J}_2$ (рис. 3).

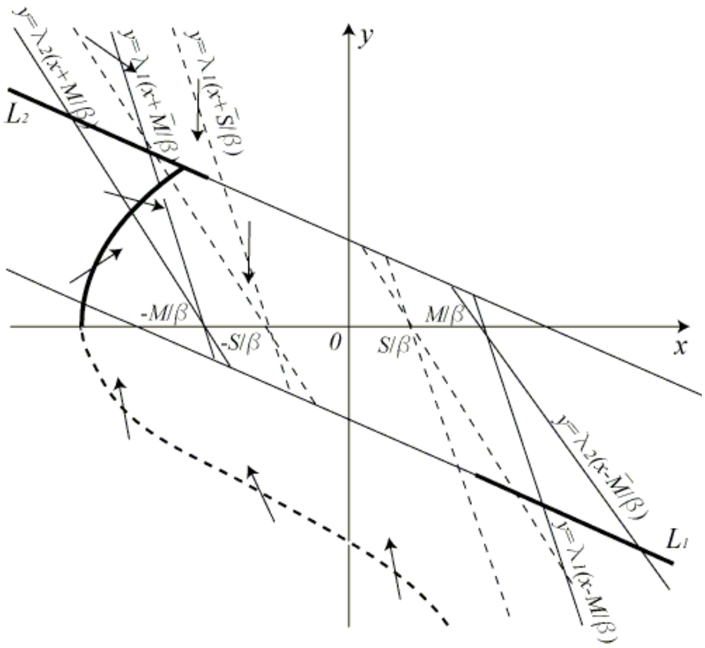

Рис. 3

Неравенство $\tilde{y}_{\bar{S}} \leq \gamma_2$ выполнено, если $\tilde{y}_{\bar{S}} \leq \gamma_{\bar{M}}$, т.е. если $\delta \geq -\frac{a\lambda_2\left(\bar{S}+\bar{M}\right)+\bar{S}b}{\beta}$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что при $\delta \geq -\frac{a\lambda_2(S+M)+Sb}{\beta}$ все траектории системы (1) при $t \to +\infty$ стремятся к точкам отрезков J_1 и J_2.

Рассмотрим теперь случай $\tilde{y}_{\bar{S}} > \gamma_{\bar{M}}$, т.е. случай $\delta < -\frac{a\lambda_2\left(\bar{S}+\bar{M}\right)+\bar{S}b}{\beta}$.

Обозначим через $(x_{\bar{S}},\ 0)$ координаты точки пересечения траектории системы (6), проходящей через точку $\left(\eta_{\bar{M}},\ \gamma_{\bar{M}}\right)$ на прямой $ay+bx=\delta$, с осью Ox.

Если траектория системы (7), проходящая через $(x_{\bar{S}},\ 0)$, стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия $\left(-\bar{M}/\beta,\ 0\right)$ не достигая прямой $ay+bx=-\delta$, то решение системы (4), проходящее через точки луча L_2, будет стремиться к точкам отрезка $\bar{J}_1$ при $t \to +\infty$ по "коридорам", составленным из решений систем (6) и (7) (рис. 4).

Решение системы (6) имеет вид:

$$\begin{cases} x+\bar{S}/\beta = c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{13}$$

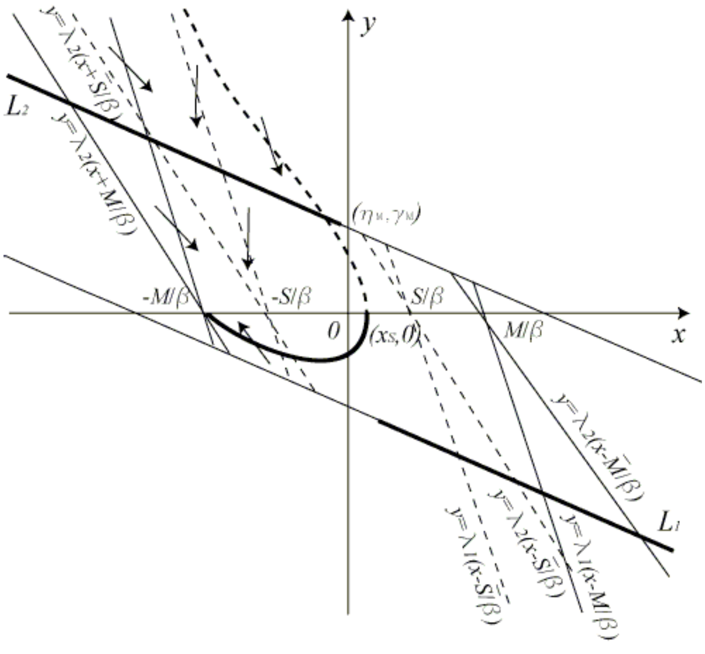

Рис. 4

Рассмотрим решение (13), проходящее при $t = 0$ через точку $(\eta_{\bar{M}},\ \gamma_{\bar{M}})$.

Для этого решения:

$$c_1 = -\frac{\gamma_{\bar{M}} - \lambda_2\left(\eta_{\bar{M}} + \bar{S}/\beta\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad c_2 = \frac{\gamma_{\bar{M}} - \lambda_1\left(\eta_{\bar{M}} + \bar{S}/\beta\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{14}$$

Пусть при $t = t_{\bar{S}}$ решение пересекает ось Ox в точке $(x_{\bar{S}},\ 0)$.

Полагая в (13) $y_{\bar{S}} = 0$, находим:

$$t_{\bar{S}} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ln\left(-\frac{c_1\lambda_1}{c_2\lambda_2}\right);$$

$$x_{\bar{S}} + \bar{S}/\beta =$$

$$= \left(\frac{\left(a\lambda_1\left(\bar{S} + \bar{M}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)\right)(a\lambda_2 + b)}{\left(a\lambda_2\left(\bar{S} + \bar{M}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)\right)(a\lambda_1 + b)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \cdot \frac{a\lambda_1\left(\bar{S} + \bar{M}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}{\beta\,(a\lambda_1 + b)}. \tag{15}$$

Пусть теперь при $t = 0$ решение системы (7) проходит через точку $(x_{\bar{S}},\ 0)$. Решение системы (7) имеет вид:

$$\begin{cases} x + \bar{M}/\beta = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = d_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + d_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{16}$$

Для этого решения

$$d_1 = \frac{\left(x_{\bar{S}} + \bar{M}/\beta\right)\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad d_2 = -\frac{\left(x_{\bar{S}} + \bar{M}/\beta\right)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{17}$$

Пусть при $t = t_{\bar{M}}$ это решение имеет в точке $(x_{\bar{M}},\ y_{\bar{M}})$ касательную, параллельную прямой $ay + bx = -\delta$.

Из условия $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_{\bar{M}}} = -\frac{b}{a}$ находим:

$$t_{\bar{M}} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ln\left(\frac{a\lambda_1 + b}{a\lambda_2 + b}\right) \tag{18}$$

Подставим в выражение $ay_{\bar{M}} + bx_{\bar{M}}$ значения параметров $d_1,\ d_2$, $x_{\bar{S}}$ и $t_{\bar{M}}$ из (15), (17), (18):

$$ay_{\bar{M}} + bx_{\bar{M}} = \left(\frac{a\lambda_1\left(\bar{S}+\bar{M}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}{a\lambda_2\left(\bar{S}+\bar{M}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}} \cdot \frac{a\lambda_1\left(\bar{S}+\bar{M}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}{\beta} +$$

$$+\left(\frac{a\lambda_1 + b}{a\lambda_2 + b}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}} \cdot \frac{\left(\bar{M}-\bar{S}\right)\left(a\lambda_1 + b\right)}{\beta} - \frac{\bar{M}b}{\beta}. \tag{19}$$

Если $ay_{\bar{M}} + bx_{\bar{M}} > -\delta$, то есть выполнено неравенство

$$\left(\frac{a\lambda_1\left(\bar{M}+\bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}{a\lambda_2\left(\bar{M}+\bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}} \left(a\lambda_1\left(\bar{M}+\bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)\right) >$$

$$> \left(\bar{M}b - \delta\beta\right) - \left(\frac{a\lambda_1 + b}{a\lambda_2 + b}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}} \left(\bar{M}-\bar{S}\right)\left(a\lambda_1 + b\right), \tag{20}$$

то траектория системы (6), проходящая через точку $(\eta_{\bar{M}},\ \gamma_{\bar{M}})$, “сшитая” с траекторией системы (7) в точке $(x_{\bar{S}},\ 0)$, будет стремиться при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия $\left(-\bar{M}/\beta,\ 0\right)$ не достигая прямой $ay + bx = -\delta$ (рис.4). И любое решение системы (4), проходящее через точки луча L_2, будет стремиться к точкам отрезка $\bar{J}_1$ при $t \to +\infty$ по “коридорам”, составленным из решений систем (6) и (7).

В силу симметрии, любое решение системы (5), проходящее через луч L_1, будет стремиться к точкам отрезка $\bar{J}_2$ при $t \to +\infty$ по “коридорам”, составленным из решений систем (8) и (9).

Переходя в неравенстве (20) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство (10), и утверждение пункта 2 теоремы доказано.

3) $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > -b/a$.

Положения равновесия систем (6)-(9) в этом случае являются устойчивыми вырожденными узлами.

Доказательство здесь аналогично пункту **1**. Решения системы (4) попадают в "коридоры", составленные из решений систем (6), (7), и при $t \to +\infty$ стремятся к точкам отрезка $\bar{J}_1$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Решения системы (5) стремятся при $t \to +\infty$ к точкам отрезка $\bar{J}_2$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

4) $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < -b/a$.

Положения равновесия систем (6)-(9) $\left(\pm\bar{S}/\beta;\ 0\right)$ и $\left(\pm\bar{M}/\beta;\ 0\right)$ являются устойчивыми вырожденными узлами и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ расположены в зоне неоднозначности $-\delta \le \sigma \le \delta$.

Доказательство в этом случае аналогично доказательству пункта **2**, изменяется вид общего решения систем (6)-(9), и, следовательно, изменяются вычисления.

Неравенство $\tilde{y}_{\bar{S}} \le \gamma_2$ выполнено, если $\tilde{y}_{\bar{S}} \le \gamma_{\bar{M}}$, т.е. $\delta \ge -\frac{a\lambda\left(\bar{S}+\bar{M}\right)+\bar{S}b}{\beta}$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что при $\delta \ge -\frac{a\lambda(S+M)+Sb}{\beta}$ все траектории (1) при $t \to +\infty$ стремятся к точкам отрезков J_1 и J_2.

В случае $\tilde{y}_{\bar{S}} > \gamma_{\bar{M}}$ как и в доказательстве пункта 2 обозначим через $(x_{\bar{S}},\ 0)$ координаты точки пересечения траектории системы (6), проходящей через точку $(\eta_{\bar{M}},\ \gamma_{\bar{M}})$ на прямой $ay + bx = \delta$, с осью Ox.

Если траектория системы (7), проходящая через $(x_{\bar{S}},\ 0)$, стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия $\left(-\bar{M}/\beta,\ 0\right)$ не достигая прямой $ay + bx = -\delta$, то решение системы (4), проходящее через луч L_2, будет стремиться к точкам отрезка $\bar{J}_1$ при $t \to +\infty$ по "коридорам", составленным из решений систем (6) и (7).

В этом случае условие $ay_{\bar{M}} + bx_{\bar{M}} > -\delta$ равносильно неравенству

$$\exp\left(-\frac{a\lambda\left(\bar{M}+\bar{S}\right)}{a\lambda\left(\bar{M}+\bar{S}\right)+\left(\delta\beta+\bar{S}b\right)}\right)\cdot\left(a\lambda\left(\bar{M}+\bar{S}\right)+\left(\delta\beta+\bar{S}b\right)\right) >$$

$$> \left(\bar{M}b-\delta\beta\right) - \exp\left(-\frac{a\lambda}{a\lambda+b}\right)\cdot\left(\bar{M}-\bar{S}\right)\left(a\lambda+b\right). \tag{21}$$

Переходя в неравенстве (21) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство (11), и утверждение пункта **4** теоремы доказано.

5) $\alpha^2 - 4\beta < 0, \quad \lambda_{1,2} = v \pm iw.$

Положения равновесия систем (6)-(9) в этом случае являются устойчивыми фокусами. Рассуждения здесь аналогичны случаям **2** и **4**, изменяется вид общего решения систем и изменяются вычисления.

Неравенство $ay_{\bar{M}} + bx_{\bar{M}} > -\delta$ в этом случае равносильно неравенству

$$\exp\left(\frac{v}{w}\left(\bar{\theta}_1 + \theta_2\right)\right) \cdot \sqrt{\left(av\left(\bar{M} + \bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)\right)^2 + \left(aw\left(\bar{M} + \bar{S}\right)\right)^2} <$$

$$< \left(\delta\beta - \bar{M}b\right) - \exp\left(\frac{v}{w}\theta_2\right) \cdot \left(\bar{M} - \bar{S}\right)\sqrt{a^2\beta + 2abv + b^2}, \tag{22}$$

где $\bar{\theta}_1 = arctg\left(\frac{aw\left(\delta\beta - \bar{M}b\right)}{\xi}\right) + \pi r_1$, $\theta_2 = arctg\left(\frac{-aw}{av+b}\right) + \pi r_2$,

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \xi > 0, \\ 1, & \text{если } \ \xi < 0; \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } \ av + b < 0, \\ 1, & \text{если } \ av + b > 0; \end{cases}$$

$$\xi = a\left(a\beta + bv\right)\left(\bar{M} + \bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)\left(av + b\right).$$

Переходя в неравенстве (22) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (12).

Доказательство теоремы 1 закончено.

Теорема 2. *Если ни одно из условий 1-7 теоремы 1 не выполнено, то найдется функция* $\varphi\left[t, \sigma, \varphi_0\right]$ *класса* $K_{S,M}$ *такая, что в системе (1) существует предельный цикл.*

Доказательство. **1)** Рассмотрим случай $\alpha^2 - 4\beta > 0, \quad \lambda_2 < -b/a$, $a\lambda_2\left(M + S\right) + \left(\delta\beta + Sb\right) < 0$.

Пусть неравенство (10) не выполнено.

Предположим сначала, что верно равенство

$$\left(\frac{a\lambda_1\left(M + S\right) + \left(\delta\beta + Sb\right)}{a\lambda_2\left(M + S\right) + \left(\delta\beta + Sb\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \left(a\lambda_1\left(M + S\right) + \left(\delta\beta + Sb\right)\right) =$$

$$= \left(Mb - \delta\beta\right) + \left(\frac{a\lambda_1 + b}{a\lambda_2 + b}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \left(M - S\right)\left(a\lambda_1 + b\right). \tag{23}$$

Равенство (23) получено предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ из равенства

$$\left(\frac{a\lambda_1\left(\bar{M} + \bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}{a\lambda_2\left(\bar{M} + \bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \left(a\lambda_1\left(\bar{M} + \bar{S}\right) + \left(\delta\beta + \bar{S}b\right)\right) =$$

$$= \left(\bar{M}b - \delta\beta\right) + \left(\frac{a\lambda_1 + b}{a\lambda_2 + b}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \left(\bar{M} - \bar{S}\right)\left(a\lambda_1 + b\right). \tag{24}$$

Из рассуждений пункта **2** доказательства теоремы 1 следует, что равенство (24) равносильно условию $ay_{\bar{M}} + bx_{\bar{M}} = -\delta$. И в этом случае траектория системы (6), проходящая через точку $(\eta_{\bar{M}},\ \gamma_{\bar{M}})$, пересекает ось Ox в точке $(x_{\bar{S}},\ 0)$, а траектория системы (7), проходящая через $(x_{\bar{S}},\ 0)$, достигает прямой $ay + bx = -\delta$ в точке $(-\eta_{\bar{M}},\ -\gamma_{\bar{M}})$ (рис. 5).

Указанные траектории систем (6) и (7), “сшитые” в точке $(x_{\bar{S}},\ 0)$, вместе с симметричными им траекториями систем (8) и (9), проходящими через точку $(-x_{\bar{S}},\ 0)$, образуют замкнутый контур.

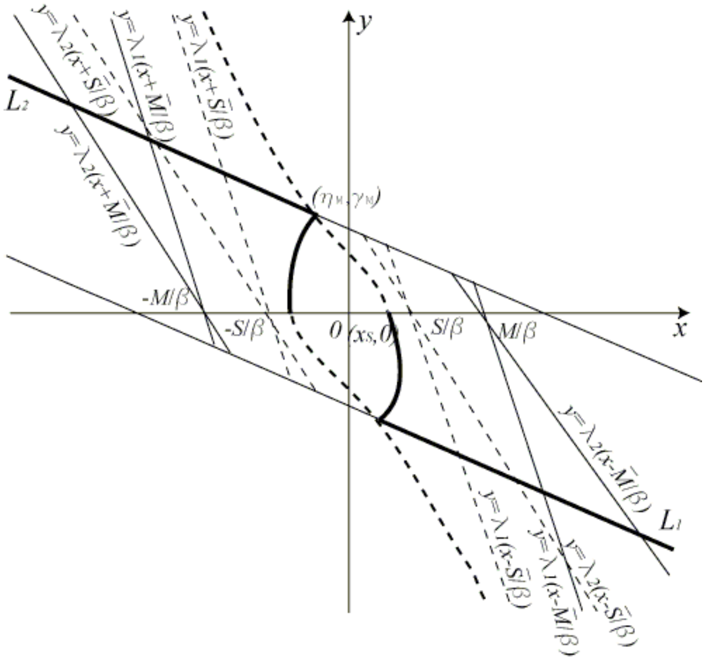

Рис. 5

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим: $\eta_{\bar{M}} \to \eta_M$, $\gamma_{\bar{M}} \to \gamma_M$, $t_{\bar{S}} \to t_S$, $x_{\bar{S}} \to x_S$. И если выполнено равенство (23), то траектория системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - S, \end{cases} \tag{25}$$

проходящая через точку $(\eta_M,\ \gamma_M)$, пересекает ось Ox в точке $(x_S,\ 0)$.

Траектория системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - M, \end{cases} \tag{26}$$

проходящая через $(x_S,\ 0)$, достигает прямой $ay + bx = -\delta$ в точке $(-\eta_M,\ -\gamma_M)$.

Аналогично траектория системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x + S, \end{cases} \tag{27}$$

проходящая через $(-\eta_M,\ -\gamma_M)$, пересекает ось Ox в точке $(-x_S,\ 0)$, и траектория системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x + M, \end{cases} \tag{28}$$

проходящая через $(-x_S,\ 0)$, достигает прямой $ay + bx = \delta$ в точке $(\eta_M,\ \gamma_M)$.

Куски указанных траекторий систем (25)- (28) образуют замкнутый контур.

Введем функцию $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$ следующим образом:

$$\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] = \begin{cases} S, & \text{если} \quad t \in (\tau_{4k},\ \tau_{4k+1})\,; \\ M, & \text{если} \quad t \in (\tau_{4k+1},\ \tau_{4k+2})\,; \\ -S, & \text{если} \quad t \in (\tau_{4k+2},\ \tau_{4k+3})\,; \\ -M, & \text{если} \quad t \in (\tau_{4k+3},\ \tau_{4k+4})\,. \end{cases} \tag{29}$$

Определим моменты времени τ_k:

Пусть $\tau_0 = 0$ и $\tau_1 = t_S$. При $t = \tau_0$ решение системы (25) $(x_S\,(t)\,,\ y_S\,(t))$ проходит через точку $(\eta_M,\ \gamma_M)$, а при $t = \tau_1$ - через точку $(x_S,\ 0)$.

Пусть при $t = \tau_1$ решение системы (26) $(x_M\,(t)\,,\ y_M\,(t))$ проходит через точку $(x_S,\ 0)$. Определим τ_2 как момент времени, при котором это решение попадает в точку с координатами $(-\eta_M,\ -\gamma_M)$ на прямой $ay + bx = -\delta$.

Далее рассмотрим решение системы (27) $(x_{-S}\,(t)\,,\ y_{-S}\,(t))$, которое при $t = \tau_2$ проходит через точку $(-\eta_M,\ -\gamma_M)$. Определим τ_3 как момент времени, при котором это решение попадает в точку $(-x_S,\ 0)$ на оси Ox.

Пусть при $t = \tau_3$ решение системы (28) $(x_{-M}\,(t)\,,\ y_{-M}\,(t))$ проходит через точку $(-x_S,\ 0)$. Тогда τ_4 определяется как момент времени, при котором это решение попадает в точку с координатами $(\eta_M,\ \gamma_M)$ на прямой $ay + bx = \delta$.

Определяя далее числа τ_k аналогичным образом, получим, что при выполнении условия (23) в системе (1) с функцией $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$, заданной равенством (29), существует предельный цикл.

Пусть теперь выполнено неравенство

$$\left(\frac{a\lambda_1(M+S)+(\delta\beta+Sb)}{a\lambda_2(M+S)+(\delta\beta+Sb)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}(a\lambda_1(M+S)+(\delta\beta+Sb))<$$

$$<(Mb-\delta\beta)+\left(\frac{a\lambda_1+b}{a\lambda_2+b}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}(M-S)(a\lambda_1+b),\qquad(30)$$

которое получено предельным переходом при $\varepsilon\to0$ из неравенства

$$\left(\frac{a\lambda_1\left(\bar{M}+\bar{S}\right)+\left(\delta\beta+\bar{S}b\right)}{a\lambda_2\left(\bar{M}+\bar{S}\right)+\left(\delta\beta+\bar{S}b\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\left(a\lambda_1\left(\bar{M}+\bar{S}\right)+\left(\delta\beta+\bar{S}b\right)\right)<$$

$$<\left(\bar{M}b-\delta\beta\right)+\left(\frac{a\lambda_1+b}{a\lambda_2+b}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\left(\bar{M}-\bar{S}\right)(a\lambda_1+b).\qquad(31)$$

Согласно пункту **2** доказательства теоремы 1 неравенство (31) равносильно условию $ay_{\bar{M}}+bx_{\bar{M}}<-\delta$. И в этом случае траектория системы (6), проходящая через точку $(\eta_{\bar{M}},\ \gamma_{\bar{M}})$, "сшивается" в точке $(x_{\bar{S}},\ 0)$ с траекторией системы (7), которая достигает прямой $ay+bx=-\delta$ в некоторой точке $(-x_{\bar{M}},\ -y_{\bar{M}})$, где $-y_{\bar{M}}<-\gamma_{\bar{M}}$.

В силу симметрии траектория системы (8), проходящая через точку $(-\eta_{\bar{M}},\ -\gamma_{\bar{M}})$, "сшивается" в точке $(-x_{\bar{S}},\ 0)$ с траекторией системы (9), которая достигает прямой $ay+bx=\delta$ в точке $(x_{\bar{M}},\ y_{\bar{M}})$.

В этом случае существует точка $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ $(\gamma_{\bar{M}}<\tilde{y}<y_{\bar{M}})$ на луче L_2 такая, что траектория системы (6), проходящая через $(\tilde{x},\ \tilde{y})$, "сшивается" на оси Ox с траекторией системы (7), достигающей луча L_1 в симметричной точке $(-\tilde{x},\ -\tilde{y})$. Существование точки $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ доказывается с помощью построения отображения сжатия по траекториям систем (6)-(9) аналогично [5].

Указанные траектории (6) и (7), "сшитые" в некоторой точке $(\tilde{x}_{\bar{S}},\ 0)$, вместе с симметричными им траекториями систем (8) и (9), "сшитыми" в точке $(-\tilde{x}_{\bar{S}},\ 0)$, образуют замкнутый контур.

Далее переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ и определяя функцию $\varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]$ аналогично предыдущему случаю, получим, что в системе (1) с функцией $\varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]$ существует предельный цикл, если выполнено неравенство (30).

В остальных случаях (если $\alpha^2-4\beta=0,\quad\lambda<-b/a,\ a\lambda(M+S)+(\delta\beta+Sb)<0$ и не выполнено неравенство (11), или $\alpha^2-4\beta<0,\quad\lambda_{1,2}=v\pm iw$, и не выполнено неравенство (12)) доказательство проводится аналогично.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *а) Если $\delta\beta - Mb < 0$, то найдется функция $\varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]$ класса $K_{S,M}$ такая, что в системе (1) существует предельный цикл.*

б) Если $\delta\beta - Mb = 0$, то найдется функция $\varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]$ класса $K_{S,M}$ такая, что в системе (1) существует предельный цикл или замкнутый контур, "сшитый" из кусков траекторий и особых точек системы.

Для доказательства теоремы 3 достаточно положить $\varphi_1(t,\sigma) \equiv M$, $\varphi_2(t,\sigma) \equiv -M$. Если $\delta\beta - Mb < 0$, то в системе (1) существует предельный цикл, если $\delta\beta - Mb = 0$, то существует предельный цикл или замкнутый контур, "сшитый" из кусков траекторий и особых точек системы [5].

Теорема 4. *Пусть $b \le 0$ и выполнено одно из следующих условий 1 - 5:*

1) $\alpha^2 - 4\beta > 0$ и $a\lambda_2(M+S) + (\delta\beta + Sb) \ge 0$;

2) $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $a\lambda_2(M+S) + (\delta\beta + Sb) < 0$ и верно неравенство (10);

3) $\alpha^2 - 4\beta = 0$ и $a\lambda(M+S) + (\delta\beta + Sb) \ge 0$;

4) $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $a\lambda(M+S) + (\delta\beta + Sb) < 0$ и верно неравенство (11);

5) $\alpha^2 - 4\beta < 0$ и верно неравенство (12).

Тогда система (1) абсолютно устойчива в классе нелинейностей $K_{S,M}$.

Если ни одно из условий 1 – 5 не выполняется, то найдется функция $\varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]$ из класса $K_{S,M}$ такая, что в системе (1) существует предельный цикл.

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теорем 1, 2. В случае $b < 0$ меняется наклон лучей L_1 и L_2, в случае $b = 0$ лучи L_1 и L_2 параллельны оси $y = 0$.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., ГИФМЛ, 1959, 916 с.

2. Афонин С.М. Абсолютная устойчивость системы управления деформацией пьезопреобразователя. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005, № 2, с. 112-119.

3. Барабанов Н.Е., Якубович В.А. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью. // Автоматика и телемеханика. 1979, № 12, с. 5-11.

4. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., Наука, 1978, 400 с.

5. Евдокимов С.М. Устойчивость в целом двумерной релейной системы с гистерезисом. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2008, № 2, с. 1-18.

6. Зубов В.И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л., Судостроение, 1966, 352 с.

7. Красносельский М.А. Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М., Наука, 1983, 271 с.

8. Леонов Г.А. Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений. // Вестник С-Петербург. ун-та. 2006, сер. 1, вып. 4, с. 48-78.

9. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем. // Прикладная математика и механика. 1944, т.8, № 3, с. 246-248.

10. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Под ред. Нелепина Р.А. М., Наука, 1975, 448 с.

11. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М., Наука, 1977, 565 с.

12. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. // ДАН СССР. 1963, т. 149, № 2, с. 288-291.

13. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. // Автоматика и телемеханика. 1967, № 5, с. 5-30.

Евдокимов Сергей Маратович — аспирант кафедры прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета