

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2018

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Управление в нелинейных системах

# Оценка топологической энтропии в коциклах с клеточным автоматом в качестве базисной СИСТЕМЫ

В. Е. Егорова, Ф. Райтманн

Математико-механический факультет,  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Россия  
e-mails: [egorova\\_ve2107@mail.ru](mailto:egorova_ve2107@mail.ru), [vreitmann@aol.com](mailto:vreitmann@aol.com)

## Аннотация

В работе исследуется дискретная неавтономная система управления. Показано, что клеточный автомат имеет структуру динамической системы, поэтому его можно рассматривать как базисную систему. Для дискретной неавтономной системы управления построен коцикл, состоящий из базисной системы и эволюционной системы. Получена верхняя оценка топологической энтропии коцикла дискретной неавтономной системы управления над базисной системой, порожденной клеточным автоматом. В качестве примера исследована неавтономная система Хенона, на параметры которой действует клеточный автомат, в котором состояние клетки определяется дизъюнкцией самой клетки и двух соседних клеток. Получены неравенства для оценки показателей роста отображения Хенона. Кроме того, получена оценка фрактальной размерности компактного инвариантного множества системы Хенона. Продемонстрировано поведение траекторий неавтономной системы Хенона с некоторыми конкретными параметрами и определенными начальными данными.

**Ключевые слова:** топологическая энтропия, дискретные системы управления, коциклы, клеточные автоматы, неавтономная система Хенона.

### Abstract

We study a discrete non-autonomous control system. It is shown that the cellular automaton has the structure of a dynamical system, therefore it can be considered as a base system. For a discrete non-autonomous control system, a cocycle consisting of a base system and an evolutionary system is constructed. An upper bound for the topological entropy for a cocycle of a discrete non-autonomous control system over a base system generated by a cellular automaton is obtained. As an example, we study the non-autonomous Henon system, whose parameters depends on the cellular automaton, for which the state of the cell is determined by the disjunction of the cell itself and two neighboring cells. The inequality for estimating the growth exponents of the Henon mapping is obtained. In addition, we obtain an estimate for the fractal dimension of the compact invariant set of the Henon system. The behavior of the trajectories of the non-autonomous Henon system with some certain parameters and certain initial data is demonstrated.

**Keywords:** topological entropy, discrete control systems, cocycles, cellular automata, non-autonomous Hénon system.

## Введение

В данной работе рассматриваются неавтономные дискретные системы управления, порождающие дискретные по времени коциклы, которые могут быть исследованы с помощью теории коциклов. Построение коцикла для неавтономной динамической системы и нахождение его аттрактора, а также случай дискретной системы управления и существование глобального  $B$  – *pullback*-аттрактора, рассматривались в работах [9], [11].

Топологическая энтропия является количественным критерием хаоса. Существует несколько подходов для определения топологической энтропии динамической системы. Впервые понятие топологической энтропии было введено Р. Л. Адлером, А. Г. Конхеймом и М. Х. МакЭндрю в работе [1] как аналог метрической энтропии, введенной ранее А. Н. Колмогоровым ([17]) и Я. Г. Синаем ([22]). Эквивалентное определение топологической энтропии для метрических пространств было введено Р. Боуэном в 1971 году (см. [3], [2]). Топологическая энтропия для неавтономных динамических систем изучена в работах [8], [10]. После построения коцикла может быть введено понятие топологической энтропии для коцикла и произведена верхняя оценка топологической энтропии коцикла.

Таким образом, полная система состоит из базисной (управляющей) систе-

мы и коцикла над этой базисной системой. В качестве управляющей системы взят клеточный автомат, имеющий все свойства динамической системы. Концепция клеточного автомата была рассмотрена впервые в 1950-х годах и изложена в работах [14], [15], [16]. Различные модификации клеточных автоматов и понятие топологической энтропии клеточного автомата исследованы в работах [12], [18], [19], [4].

Итак, данная работа организована следующим образом. В главе 1 вводятся основные понятия из теории динамических систем и теории коциклов, которые понадобятся в дальнейшем. Также рассматривается структура клеточного автомата и показывается, что клеточный автомат является динамической системой. В главе 2 вводится понятие топологической энтропии динамической системы, происходит построение коцикла для неавтономной дискретной системы управления над базисной системой, и определяется топологическая энтропия уже для коцикла. Также получена верхняя оценка топологической энтропии дискретной неавтономной динамической системы через показатели роста, связанные с константами Липшица эволюционного отображения, и через верхнюю оценку фрактальной размерности фазового пространства динамической системы. В главе 3 проиллюстрировано применение полученной оценки к системе Хенона, которая была введена в работе [6] и исследована в работах [20], [7], [5].

## 1 Основные понятия и определения

В данной главе вводятся основные понятия и определения теории динамических систем и теории коциклов, которые будут использоваться в дальнейшем. Также рассматривается структура, называемая клеточным автоматом.

### 1.1 Элементы теории коциклов

Пусть  $(\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}})$  - полное метрическое пространство с метрикой  $\rho_{\mathcal{Q}}$ .

**Определение 1.** *Дискретным базисным потоком (базисной системой) на метрическом пространстве  $(\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}})$  называется пара  $(\{\sigma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}}))$ , где*

$$\sigma^{(\cdot)}(\cdot) : \mathbb{Z} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$$

- отображение, удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1)  $\sigma^0(\cdot) = id_{\mathcal{Q}}$ ;
- 2)  $\sigma^{k+j}(\cdot) = \sigma^k(\cdot) \circ \sigma^j(\cdot)$  для всех  $k, j \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $(\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}})$  - другое метрическое пространство с метрикой  $\rho_{\mathcal{Q}}$ . Назовем его фазовым пространством.

**Определение 2.** Дискретным коциклом на метрическом пространстве  $(\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}})$  над дискретным базисным потоком  $(\{\sigma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}}))$  называется пара

$$(\{\psi^k(q, \cdot)\}_{k \in \mathbb{Z}_+, q \in \mathcal{Q}}, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}})),$$

где отображение  $\psi$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\psi^k(q, \cdot) : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  для всех  $k \in \mathbb{Z}_+$  и всех  $q \in \mathcal{Q}$ ;
- 2)  $\psi^0(q, \cdot) = id_{\mathcal{N}}$  для всех  $q \in \mathcal{Q}$ ;
- 3)  $\psi^{k+j}(q, \cdot) = \psi^k(\sigma^j(q), \psi^j(q, \cdot))$  для всех  $k, j \in \mathbb{Z}_+$  и всех  $q \in \mathcal{Q}$ .

Для краткости коцикл  $(\{\psi^k(q, \cdot)\}_{k \in \mathbb{Z}_+, q \in \mathcal{Q}}, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$  над дискретным базисным потоком  $(\{\sigma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}}))$  обозначим через  $(\sigma, \psi)$ .

**Определение 3.** Коцикл  $(\sigma, \psi)$  равномерно диссипативен, если существуют компактное множество  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$  и  $k_0$  такие, что  $\psi^k(q, v) \subset \mathcal{Z}$  для любых  $k \geq k_0, k \in \mathbb{Z}$ , любых  $q \in \mathcal{Q}, v \in \mathcal{N}$ , где  $\mathcal{Z}$  - область равномерной диссипативности коцикла  $(\sigma, \psi)$ .

Рассмотрим коцикл и базисный поток, над которым он построен, в паре. Пусть  $\mathcal{W} := \mathcal{Q} \times \mathcal{N}$ . Обозначим через  $\rho_{\mathcal{W}}$  метрику на  $\mathcal{W}$ , которая задается следующим образом: для любых  $(q_1, v_1), (q_2, v_2) \in \mathcal{W}$  определим  $\rho_{\mathcal{W}}((q_1, v_1), (q_2, v_2)) := \sqrt{\rho_{\mathcal{Q}}^2(q_1, q_2) + \rho_{\mathcal{N}}^2(v_1, v_2)}$ .

**Определение 4.** Динамической системой типа косога произведения называется пара  $(\{\pi^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{W}, \rho_{\mathcal{W}}))$ , где отображение  $\pi^k : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  непрерывно, и  $\pi^k(q, v) = (\sigma^k(q), \psi^k(q, v))$  для любых  $(q, v) \in \mathcal{W}$  и любых  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 1.2 Клеточные автоматы

Мы будем рассматривать в качестве базисной системы структуру, которая называется клеточным автоматом. Клеточные автоматы подробно исследованы в работах [14] и [15], а представление этой структуры в виде динамической системы приведено в работе [16].

Одномерный клеточный автомат (КА) - это конечная линейная последовательность (строка) клеток, каждая из которых имеет некоторое состояние из множества состояний  $X_0$ . Эволюция (то есть переход КА от одного состояния к другому) одномерного КА обычно начинается со строки, состоящей либо из одной клетки с ненулевым значением, расположенной в центре строки, либо из последовательности клеток, состояния которых заданы случайно. КА эволюционирует дискретно во времени, на каждом шаге переходя к новой строке клеток. Состояние каждой клетки в новой строке определяется применением конкретного правила к значению клетки в предыдущей строке, лежащей непосредственно выше новой клетки. Правило применяется ко всем клеткам в строке одновременно.

Одномерный КА определяется числом  $p$  различных состояний  $(0, \dots, p-1)$  и количеством  $2r+1$  ( $r$  - радиус правила) клеток-соседей, взаимодействующих с данной клеткой ( $r$  ближайших клеток справа и слева, и сама клетка). В правиле, которое задает новое состояние клетки, используются предыдущее состояние клетки и состояние ее  $2r$  соседей.

Пусть задано конечное множество  $X_0$ . Для простоты будем считать, что  $X_0 = \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,  $p \geq 2$ . Положим  $X_j = X_0$  для каждого  $j \in \mathbb{Z}^d$  ( $d \geq 1$ ) и введем в рассмотрение множество  $\Omega^{(d)} = \prod_{j \in \mathbb{Z}^d} X_j$  называемое пространством конфигураций. Считая множества  $X_j$  снабженными дискретной топологией, будем рассматривать  $\Omega^{(d)}$  как произведение топологических пространств с тихоновской топологией. По теореме Тихонова  $\Omega^{(d)}$  - компакт. Для  $j = (j_\nu)_{\nu=1}^d \in \mathbb{Z}^d$  положим  $|j| = \max_{1 \leq \nu \leq d} |j_\nu|$ , и для  $\bar{x} = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}, \bar{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega^{(d)}$  пусть  $R(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{n \geq 0 : x_j = y_j \text{ для } |j| < n\}$ . Пространство  $\Omega^{(d)}$  может быть метризовано с помощью метрики  $\rho_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha^{R(\bar{x}, \bar{y})}$  с произвольной константой  $\alpha \in (0, 1)$ .

Обозначим через  $\Omega_r^{(d)}$  ( $r \geq 1$ ) множество  $\prod_{j: |j| \leq r} X_j$ . Заметим при этом, что  $\Omega_r^{(d)}$

не является подмножеством  $\Omega^{(d)}$ . Правилom на множестве  $X_0$  называется всякое отображение  $F : \Omega_r^{(d)} \rightarrow \Omega^{(d)}$ , число  $r$  называется радиусом правила  $F$ .

Введем отображение  $\pi_r : \Omega^{(d)} \rightarrow \Omega_r^{(d)}$ , сопоставляющее функции  $(\bar{x} : \mathbb{Z}^d \rightarrow X_0) \in \Omega^{(d)}$  ее ограничение на множество  $\{j : |j| \leq r\}$ , то есть  $\pi_r(\bar{x}) = \bar{x} |_{\{j: |j| \leq r\}}$ . Трансляцией, определяемой элементом  $a \in \mathbb{Z}^d$ , называют отображение  $\tau_a : \Omega^{(d)} \rightarrow \Omega^{(d)}$ , действующее по формуле  $(\tau_a \bar{x})_j = x_{j+a}$ ,  $\bar{x} = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $j \in \mathbb{Z}^d$ .

**Определение 5.**  *$d$ -мерным клеточным автоматом, ассоциированным с*

правилом  $F$  радиуса  $r$ , называется отображение метрического компакта  $\Omega^{(d)}$  в себя  $T_F : \Omega^{(d)} \rightarrow \Omega^{(d)}$  определяемое формулой

$$(T_F \bar{x})_j = F(\pi_r(\tau_j \bar{x})), \bar{x} \in \Omega^{(d)}, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Для одномерного КА ( $d = 1$ ):  $(T_F \bar{x})_j = F(x_{j-r}, \dots, x_j, \dots, x_{j+r})$ .

Отображение  $T_F$  непрерывно и порождает на  $\Omega^{(d)}$  динамическую систему с дискретным временем - полугруппу непрерывных отображений  $\{T_F^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ , если  $T_F$  необратимо, или группу гомеоморфизмов  $\{T_F^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , если  $T_F$  обратимо.

## 2 Верхняя оценка топологической энтропии коцикла дискретной неавтономной системы управления

В этой главе вводится понятие топологической энтропии коцикла. Далее рассматривается дискретная неавтономная система управления, для которой будет построен коцикл над базисной системой. Также вводится понятие топологической энтропии для коцикла, и производится ее верхняя оценка.

### 2.1 Понятие топологической энтропии динамической системы

Топологическая энтропия - в теории динамических систем неотрицательное вещественное число, которое является мерой сложности системы. Существует несколько подходов для определения топологической энтропии динамической системы. Впервые понятие топологической энтропии было введено Р. Л. Адлером, А. Г. Конхеймом и М. Х. МакЭндрю в работе [1] как аналог метрической энтропии, введенной ранее А. Н. Колмогоровым ([17]) и Я. Г. Синаем ([22]).

Приведем здесь это определение на языке открытых покрытий для компактного фазового пространства (см. [1], [2]). Пусть  $(\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}, (\mathcal{M}, \rho))$  - динамическая система, фазовое пространство  $(\mathcal{M}, \rho)$  компактно. Пусть  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  - конечные открытые покрытия  $\mathcal{M}$  (т. е. семейства открытых множеств, таких, что их объединение содержит  $\mathcal{M}$ ) и  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  - непрерывное отображение. Введем понятия произведения покрытий  $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$  и прообраза покрытия  $\mathfrak{A}$  относительно  $\varphi$  следующим образом:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} := \{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}\},$$

$$\varphi^{-1}\mathfrak{A} := \{\varphi^{-1}\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}.$$

Произведение и прообраз открытых покрытий также являются открытыми покрытиями. Наименьшее число элементов  $\mathfrak{A}$ , необходимых для покрытия  $\mathcal{M}$  обозначим через  $N(\mathfrak{A})$ . Тогда величину  $h_{top}(\varphi)$  можно определить по следующей формуле:

$$h_{top}(\varphi) = \sup_{\mathfrak{A}} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log N \left( \mathfrak{A} \vee \varphi^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee \varphi^{-(m-1)}\mathfrak{A} \right).$$

Эквивалентное определение топологической энтропии для метрических пространств, использующее отделенные (separated) и порождающие (spanning) множества, было введено Р. Боуэном в 1971 году (см. [3], [2]).

Пусть опять  $(\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}, (\mathcal{M}, \rho))$  - динамическая система с компактным фазовым пространством. Считаем, что отображение  $\varphi$  непрерывно на  $\mathcal{M}$ .

Обозначим через  $\mathcal{B}_r(x)$  шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$  в пространстве  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{B}_r(x) = \{y \in \mathcal{M} \mid \rho(x, y) < r\}.$$

Для любого целого числа  $m > 0$  определим в  $\mathcal{M}$  шар Боуэна с центром в точке  $x$ :

$$\mathcal{B}_r(x, m) = \{y \in \mathcal{M} \mid \max_{0 \leq j \leq m-1} \rho(\varphi^j(x), \varphi^j(y)) < r\}.$$

Множество  $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$  называется  $(m, \varepsilon)$ -порождающим множеством для  $\mathcal{M}$  относительно  $\varphi$ , если для любого  $x \in \mathcal{M}$  существует  $y \in \mathcal{P}$ , такое что  $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(y, m)$ . Множество  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  называется  $(m, \varepsilon)$ -отделенным множеством для  $\mathcal{M}$  относительно  $\varphi$ , если для любых  $x, y \in \mathcal{R}$ ,  $x \neq y$  выполняется неравенство

$$\max_{0 \leq j \leq m-1} \rho(\varphi^j(x), \varphi^j(y)) > \varepsilon.$$

Для компактного множества  $\mathcal{M}$  определим через  $r_m(\varepsilon, \mathcal{M})$  наименьшую мощность множеств  $\mathcal{P}$ , которые  $(m, \varepsilon)$ -порождают  $\mathcal{M}$ . Через  $s_m(\varepsilon, \mathcal{M})$  обозначим наибольшую мощность  $(m, \varepsilon)$ -отделенных множеств  $\mathcal{R}$ , содержащихся в  $\mathcal{M}$ . В силу компактности множества  $\mathcal{M}$  и равномерной непрерывности  $\varphi$  величины  $r_m(\varepsilon, \mathcal{M})$  и  $s_m(\varepsilon, \mathcal{M})$  конечны. Таким образом, определение следующей

величины корректно:

$$h_{top}(\varphi, \mathcal{M}) \equiv h_{top}(\varphi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log r_m(\varepsilon, \mathcal{M}) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log s_m(\varepsilon, \mathcal{M}).$$

## 2.2 Построение коцикла дискретной неавтономной системы управления

Далее в работе будет рассматриваться неавтономная дискретная по времени система. Такого рода системы могут возникнуть, если, например, ввести управление в автономных дискретных по времени системах.

Итак, рассмотрим систему управления (эволюционную систему)

$$v_{k+1} = Av_k + bg(k, w_k), \quad w_k = c^*v_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $A$  - постоянная матрица порядка  $n \times n$ ,  $b$  и  $c$  -  $n$ -мерные векторы,  $g(k, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ) - непрерывная функция.

Этой системе соответствует неавтономное разностное уравнение

$$v_{k+1} = F(k, v_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2)$$

где  $F : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  - непрерывное (относительно второго аргумента) отображение.

Теперь проведем процедуру построения дискретного по времени коцикла для эволюционной системы (1) с разностным уравнением (2), приведенную в работе [11].

Рассмотрим пространство  $\mathcal{Q} := \{(q_j)_{j \in \mathbb{Z}} : q_j \in X_0\}$  - пространство конфигураций одномерного клеточного автомата из главы 1.2. Далее введем отображение  $T_F : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ :  $(T_F \bar{q})_j = F(q_{j-r}, \dots, q_j, \dots, q_{j+r})$  (см. раздел 1.2). Таким образом мы получили базисную систему  $(\{\sigma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}}))$ , где  $\sigma := T_F$ . Переобозначение введено для того, чтобы обозначения далее совпадали с обозначениями раздела 1.1.

Теперь вместе с системой (2) рассмотрим семейство систем

$$v_{k+1} = \hat{F}(\sigma^k(q), v_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $q \in \mathcal{Q}$  и  $\hat{F} : \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  продолжение функции  $F$  непрерывное относительно второго аргумента (см. [9]).



Предположим, что  $\{v_k^{(q)}(0, v_0)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  - решение уравнения (3), которое удовлетворяет условию  $v_0^{(q)}(0, v_0) = v_0$ . Тогда можно определить отображение

$$\psi^k(q, v_0) := v_k^{(q)}(0, v_0), \quad v_0 \in \mathbb{R}^n, q \in \mathcal{Q}, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, уравнение (3) определяет коцикл  $(\{\psi^k(q, \cdot)\}_{k \in \mathbb{Z}, q \in \mathcal{Q}}, (\mathbb{R}^n, \rho))$ , порожденный уравнением (2) над клеточным автоматом в качестве базисной системы. Здесь  $\rho$  - евклидова метрика. Обозначим коцикл для краткости  $(\sigma, \psi)$ .

Таким образом вместе с системой (1) имеем

$$v_{k+1} = Av_k + b\hat{g}(\sigma^k(q), w_k), \quad w_k = c^*v_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\hat{g}$  - продолжение  $g$  в смысле [9].

Теперь, когда мы имеем построенный коцикл, необходимо, исходя из понятия диссипативности в обычном смысле, сформулировать условия, гарантирующие равномерную диссипативность нашего коцикла. Свойство равномерной диссипативности позволит рассматривать некоторое компактное множество (область равномерной диссипативности) в качестве фазового пространства. Результаты, полученные в в работе [11] гарантируют это свойство.

Итак, свойство диссипативности позволяет рассматривать некоторое компактное инвариантное множество  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  (область диссипативности) в качестве фазового пространства:  $(\{\psi^k(q, \cdot)\}_{k \in \mathbb{Z}, q \in \mathcal{Q}}, (\mathcal{K}, \rho_{\mathcal{K}}))$ .

### 2.3 Верхняя оценка топологической энтропии коцикла дискретной неавтономной системы управления

После построения коцикла  $(\{\psi^k(q, \cdot)\}_{k \in \mathbb{Z}, q \in \mathcal{Q}}, (\mathcal{K}, \rho_{\mathcal{K}}))$  над базисной системой  $(\{\sigma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}}))$  необходимо ввести понятие его топологической энтропии, используя результаты, приведенные в главе 2.1.

Для начала введем определение на языке открытых покрытий:

$$h_{top}(\psi, q) = \sup_{\mathfrak{A}} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log N \left( \bigvee_{k=0}^{m-1} \psi^{-k}(q, \cdot) \mathfrak{A} \right), \quad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

Теперь дадим определение на языке Боуэна.

Для каждого  $q \in \mathcal{Q}$  введем

$$\rho'_m(x, y) := \max_{0 \leq k \leq m-1} \rho_{\mathcal{K}}(\psi^k(q, x), \psi^k(q, y)), x, y \in \mathcal{K}.$$

Множество  $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$  называется  $(\varepsilon, m)$ -порождающим множеством  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ , если для всякого  $x \in \mathcal{K}$  найдется  $y \in \mathcal{K}'$ , такой что  $\rho'_m(x, y) < \varepsilon$ . Множество  $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$  называется  $(\varepsilon, m)$ -отделенным множеством, если для любых различных  $x, y \in \mathcal{R}$  выполняется  $\rho'_m(x, y) > \varepsilon$ . Пусть  $s_\varepsilon(m, q)$  - наименьшая мощность  $(\varepsilon, m)$ -порождающего множества и  $r_\varepsilon(m, q)$  - наибольшая мощность  $(\varepsilon, m)$ -отделенного множества. Величина  $h_{top}(\psi, q)$  - топологическая энтропия расширенной динамической системы. Таким образом, по [8] и [10]

$$h_{span}(\psi, q) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log s_\varepsilon(m, q),$$

$$h_{sep}(\psi, q) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log r_\varepsilon(m, q)$$

равны между собой и совпадают с  $h_{top}(\psi, q)$  для каждого  $q \in \mathcal{Q}$ .

Верхняя оценка топологической энтропии будет производиться с помощью двух величин. С одной стороны, это показатели роста  $\lambda$ , которые будут определены далее, с другой - фрактальная размерность, которая также будет оценена сверху, основываясь на известных результатах.

Введем понятие фрактальной размерности. Имеем  $(\mathcal{K}, \rho_{\mathcal{K}})$  - компактное метрическое пространство, а  $N_\varepsilon(\mathcal{K})$  - наименьшее число метрических шаров радиуса не более  $\varepsilon$ , которыми можно покрыть  $\mathcal{K}$ .

Верхней емкостью называется величина

$$\overline{C}(\mathcal{K}) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{K})}{\log 1/\varepsilon}.$$

Нижней емкостью называется величина

$$\underline{C}(\mathcal{K}) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{K})}{\log 1/\varepsilon}.$$

В случае, когда верхняя и нижняя емкости совпадают, величина

$$\dim_F \mathcal{K} := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{K})}{\log 1/\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{K})}{\log 1/\varepsilon}.$$

называется фрактальной размерностью пространства  $(\mathcal{K}, \rho_{\mathcal{K}})$ .

Итак, докажем теорему, которая является аналогом теоремы об оценке топологической энтропии липшицева отображения через константу Липшица и фрактальную размерность. Коцикл  $(\sigma, \psi)$  называется липшицевым, если для любого  $q \in \mathcal{Q}$  найдутся положительные числа  $\lambda_k$ , такие что выполняется неравенство  $\rho_{\mathcal{K}}(\psi(\sigma^k(q), x), \psi(\sigma^k(q), y)) \leq \lambda_k \rho_{\mathcal{K}}(x, y)$  для любых  $x, y \in \mathcal{K}$  и  $k = 0, 1, \dots$ .

**Теорема 1.** Пусть для всякого  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $\dim_F(\mathcal{K}) < \infty$  и коцикл липшицев с константами  $\lambda_k$ . Пусть также  $\lambda := \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \prod_{k=0}^{m-1} \max\{\lambda_k, 1\}$ .

Тогда

$$h_{top}(\psi, q) \leq \lambda \cdot \dim_F(\mathcal{K}).$$

*Доказательство.*

Возьмем число  $\mu > \dim_F(\mathcal{K})$ , такое что для всех достаточно малых  $\delta$  выполняется неравенство  $\frac{\log N_{\delta}(\mathcal{K})}{\log 1/\delta} < \mu$ .

Заметим, что число  $s_{\varepsilon}(m, q)$ , определенное выше, можно рассматривать как наименьшее число шаров в метрике  $\rho'_m$  радиуса  $\varepsilon$ , необходимых для покрытия  $\mathcal{K}$ . Из свойств коцикла имеем для всякого  $q \in \mathcal{Q}$

$$\psi^k(q, \cdot) = \psi^1(\sigma^{k-1}(q), \psi^{k-1}(q, \cdot)) = \psi^1(\sigma^{k-1}(q), \cdot) \circ \dots \circ \psi^1(q, \cdot).$$

Поэтому  $\rho_{\mathcal{K}}(\psi^k(q, x), \psi^k(q, y)) \leq \lambda_{k-1} \cdot \dots \cdot \lambda_0 \rho_{\mathcal{K}}(x, y)$ , для  $x, y \in \mathcal{K}$ .

В частности, пусть  $m$  - целое положительное число и  $\lambda'_m := \prod_{k=0}^{m-1} \max\{\lambda_k, 1\} + 2^{-m}$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  имеем  $B_{\delta} \subset B_{\varepsilon}(m, q)$  для всякого  $q$ , где  $B_{\delta}$  и  $B_{\varepsilon}(m, q)$  - шары в метриках  $\rho_{\mathcal{K}}$  и  $\rho'_m$  соответственно, а  $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda'_m}$ . Отсюда получаем неравенство

$$\frac{\log s_{\varepsilon}(m, q)}{m} \leq \frac{\log N_{\delta}(\mathcal{K})}{m} = \frac{\log N_{\delta}(\mathcal{K})}{\log 1/\delta} \cdot \frac{\log 1/\delta}{m}.$$

С учетом малости  $\varepsilon > 0$  (и, соответственно,  $\delta$ ) имеем  $\frac{\log N_{\delta}(\mathcal{K})}{\log 1/\delta} < \mu$ . Отсюда

$$\frac{\log s_{\varepsilon}(m, q)}{m} \leq \mu \cdot \left( \frac{\log \lambda'_m}{m} + \frac{\log 1/\varepsilon}{m} \right).$$

Переходим к верхнему пределу при  $m \rightarrow +\infty$  и получаем

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log s_{\varepsilon}(m, q)}{m} \leq \mu \cdot \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \prod_{k=0}^{m-1} \max\{\lambda_k, 1\}.$$

Теперь переходим к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  и учитываем произвольную близость  $\mu$  к  $\dim_F(\mathcal{K})$ . Получаем для каждого  $q \in \mathcal{Q}$

$$h_{top}(\psi, q) \leq \lambda \cdot \dim_F(\mathcal{K}).$$

□

Теперь необходимо произвести верхнюю оценку фрактальной размерности. Имеем отображение  $\psi^k(q, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , рассматриваемое на некотором компактном инвариантном множестве  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ .

Обозначим через  $\alpha_1(q, v) \geq \dots \geq \alpha_n(q, v)$  сингулярные числа матрицы Якоби  $d_v \psi(q, \cdot)$  отображения  $\psi$  в точке  $v \in \mathcal{K}$ . Верна следующая теорема (см.[2]).

**Теорема 2.** *Предположим, что*

$$\alpha_1(q, v) \cdots \alpha_n(q, v) \equiv const \neq 0, \forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q},$$

*и существуют вещественное число  $s \in [0, 1]$  и непрерывная положительная на  $\mathcal{K}$  функция  $\varrho(q, \cdot)$  ("варьируемая функция"), такая что*

$$\alpha_1(q, v) \cdots \alpha_{n-1}(q, v) \alpha_n^s(q, v) \leq \frac{\varrho(q, v)}{\varrho(\psi(q, v))}, \forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q}.$$

*Тогда  $\dim_F \mathcal{K} \leq n - 1 + s$ .*

Таким образом, окончательный результат можно представить в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Предположим, что*

$$\alpha_1(q, v) \cdots \alpha_n(q, v) \equiv const \neq 0, \forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q},$$

*и существуют вещественное число  $s \in [0, 1]$  и непрерывная положительная на  $\mathcal{K}$  варьируемая функция  $\varrho(q, \cdot)$ , такая что*

$$\alpha_1(q, v) \cdots \alpha_{n-1}(q, v) \alpha_n^s(q, v) \leq \frac{\varrho(q, v)}{\varrho(\psi(q, v))}, \forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q}.$$

*Для всякого  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $\dim_F(\mathcal{K}) < \infty$  и коцикл липшицев с константами  $\lambda_k$ .*

*Пусть  $\lambda := \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \prod_{k=0}^{m-1} \max\{\lambda_k, 1\}$ .*

*Тогда*

$$h_{top}(\psi, q) \leq \lambda \cdot (n - 1 + s).$$

### 3 Верхняя оценка топологической энтропии коцикла системы Хенона для случая параметров, зависящих от базисной системы

В этой главе продемонстрировано применение полученной теоремы к конкретной системе - системе Хенона для случая параметров, зависящих от некоторой базисной системы на метрическом пространстве.

#### 3.1 Система Хенона для случая параметров, зависящих от базисной системы

Система Хенона для случая постоянных параметров выглядит следующим образом (см. [6]):

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - ax_k^2, \\ y_{k+1} = bx_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $a$  и  $b$  - положительные параметры, и задается отображением Хенона

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (1 + y - ax^2, bx).$$

Исследования таких систем, в частности оценка размерности Хаусдорфа и размерности Ляпунова, произведены в [21], [20] и [13].

Неавтономная система Хенона для случая параметров, зависящих от базисной системы, в свою очередь выглядит так:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - a_k x_k^2, \\ y_{k+1} = b_k x_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Здесь  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$  - последовательности, имеющие вид  $a_k = a + \tilde{a}_k$  и  $b_k = b + \tilde{b}_k$  соответственно,  $a$  и  $b$  - положительные параметры,  $\{\tilde{a}_k\}$  и  $\{\tilde{b}_k\}$  - ограниченные последовательности, такие что  $|\tilde{a}_k| \leq \varepsilon a$ ,  $|\tilde{b}_k| \leq \varepsilon b$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , где  $\varepsilon \in (0, 1)$  - малый параметр.

Вместе с системой (4) рассмотрим семейство систем с параметрами, зависящими от клеточного автомата. То есть  $(\{\sigma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}}))$  - базисная система на компактном метрическом пространстве  $(\mathcal{Q}, \rho_{\mathcal{Q}})$  (клеточный автомат), а  $\hat{a}, \hat{b} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$  - непрерывные функции. Для краткости  $a_q(k) = \hat{a}(\sigma^k(q))$  и

$$b_q(k) = \hat{b}(\sigma^k(q)):$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - a_q(k)x_k^2, \\ y_{k+1} = b_q(k)x_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

Далее в этой главе будут рассмотрены конкретные клеточные автоматы.

Пусть  $(\sigma, \psi)$  - коцикл, порожденный системой (4) и базисной системой, который вводится как в главе 2.2.

Имеем отображение  $\psi^k(q, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , такое что  $\psi(q, v) = \psi(q, (x, y)) = (1 + y - a_q x^2, b_q x)$ .

Предположим, что существует компактное инвариантное множество  $\mathcal{K}$  для  $(\sigma, \psi)$ .

### 3.2 Верхняя оценка топологической энтропии коцикла системы Хенона

Оценим сверху топологическую энтропию, используя теорему 3. Для этого требуется проверить выполнение всех условий теоремы.

Для начала найдем сингулярные числа. Матрица Якоби отображения  $\psi(q, \cdot)$  в точке  $v = (x, y)$  имеет вид:

$$d_v \psi(q, \cdot) = \begin{pmatrix} -2a_q & 1 \\ b_q & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $|\det d_v \psi(q, \cdot)| = b_q \equiv const = \alpha_1(q, v)\alpha_2(q, v) \neq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q}$ . Таким образом, первое условие теоремы выполнено. Заметим также, что сингулярные числа не зависят от  $y$ .

Сингулярным числом матрицы  $A$  является квадратный корень из собственного значения матрицы  $A^*A$ , где "\*" - операция транспонирования в нашем, вещественном, случае. Рассмотрим:

$$d_v^* \psi(q, \cdot) d_v \psi(q, \cdot) = \begin{pmatrix} -2a_q & 1 \\ b_q & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2a_q & b_q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_q^2 x^2 + 1 & -2a_q b_q x \\ -2a_q b_q x & b_q^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда собственные числа имеют вид:

$$\frac{4a_q^2 x^2 + b_q^2 + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(4a_q^2 x^2 + b_q^2 + 1)^2}{4} - b_q^2}.$$

Тогда для максимального сингулярного числа  $\alpha_1(q, v) \forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q}$ :

$$\alpha_1^2(q, v) = \frac{4a_q^2x^2 + b_q^2 + 1}{2} + \sqrt{\frac{(4a_q^2x^2 + b_q^2 + 1)^2}{4} - b_q^2},$$

и для второго сингулярного числа

$$\alpha_2^2(q, v) = \frac{4a_q^2x^2 + b_q^2 + 1}{2} - \sqrt{\frac{(4a_q^2x^2 + b_q^2 + 1)^2}{4} - b_q^2}.$$

Как было указано ранее,  $b_q = \alpha_1(q, v)\alpha_2(q, v)$ , следовательно,  $\alpha_2(q, v) = b_q\alpha_1^{-1}(q, v)$ . Откуда

$$\alpha_1(q, v)\alpha_2^s(q, v) = b_q^s\alpha_1(q, v)\alpha_1^{-s}(q, v) = b_q^s\alpha_1^{1-s}(q, v).$$

Тогда второе условие из теоремы для  $\forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q}$  можно записать следующим образом:

$$b_q^s\alpha_1^{1-s}(q, v) \leq \frac{\varrho(q, v)}{\varrho(\psi(q, v))}, \forall v \in \mathcal{K}.$$

Иначе можно переписать как

$$b_q^s\alpha_1^{1-s}(q, v) \frac{\varrho(\psi(q, v))}{\varrho(q, v)} \leq 1, \forall v \in \mathcal{K}. \quad (5)$$

Функция  $\varrho$  должна быть непрерывна и положительна.

Рассмотрим случай

$$\varrho(q, v) = \varrho(q, (x, y)) = e^{(1-s)(x+y)}.$$

Тогда

$$\varrho(\psi(q, v)) = \varrho(\psi(q, (x, y))) = e^{(1-s)(b_qx+1-a_qx^2+y)}.$$

И, следовательно,

$$\frac{\varrho(\psi(q, v))}{\varrho(q, v)} = \frac{e^{(1-s)(b_qx+1-a_qx^2+y)}}{e^{(1-s)(x+y)}} = e^{(1-s)(-a_qx^2+(b_q-1)x+1)}.$$

Прологарифмируем неравенство (5):

$$(1-s) \ln \alpha_1(q, v) + s \ln b_q + (1-s)(-a_qx^2 + (b_q - 1)x + 1) \leq 0,$$

$$(1-s)(\ln \alpha_1(q, v) - a_qx^2 + (b_q - 1)x + 1) + s \ln b_q \leq 0.$$

Обозначим  $\xi(q, x) = \ln \alpha_1(q, v) - a_q x^2 + (b_q - 1)x + 1$ , тогда

$$(1 - s)\xi(q, x) + s \ln b_q \leq 0.$$

Итоговое неравенство:

$$s \geq \frac{\xi(q, x)}{\xi(q, x) - \ln b_q}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathcal{Q}.$$

Требуется выполнение этого неравенства на каждом шаге  $k$  для всех  $(x, y) \in \mathcal{K}$  и для всех  $q \in \mathcal{Q}$ . Для этого требуется найти минимум функции  $\frac{\xi(q, x)}{\xi(q, x) - \ln b_q}$  по  $x$  и  $q$  на каждом шаге, а затем выбрать максимальное из них. Таким образом, требуемое для оценки  $s$  будет найдено.

Также можно рассмотреть простейший случай:

$$\varrho(q, v) \equiv 1.$$

Тогда

$$b_q^s \alpha_1^{1-s}(q, v) = b_q^s \alpha_1^{1-s}(q, x) \leq 1.$$

Прологарифмируем неравенство (5):

$$(1 - s) \ln \alpha_1(q, x) + s \ln b_q \leq 0.$$

Откуда

$$s \geq \frac{\ln \alpha_1(q, x)}{\ln \alpha_1(q, x) - \ln b_q}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathcal{Q}.$$

Как и в предыдущем случае, требуется выполнение этого неравенства на каждом шаге  $k$  для всех  $(x, y) \in \mathcal{K}$  и для всех  $q \in \mathcal{Q}$ . То есть требуется найти минимум функции  $\frac{\ln \alpha_1(q, x)}{\ln \alpha_1(q, x) - \ln b_q}$  по  $x$  и  $q$  на каждом шаге, а затем выбрать максимальное из них. Таким образом, аналогично предыдущему случаю необходимое для оценки  $s$  будет найдено.

Теперь рассмотрим выполнение третьего условия - условия Липшица.

Требуется, чтобы выполнялось следующее условие для  $\forall v \in \mathcal{K}, \forall q \in \mathcal{Q}$ :

$$\rho_{\mathcal{K}}(\psi(\sigma^k(q), v), \psi(\sigma^k(q), u)) \leq \lambda_k \rho_{\mathcal{K}}(v, u),$$

где  $\rho_{\mathcal{K}} := \rho$  - стандартная метрика, то есть такая метрика, что для  $v = (x, y)$  и  $u = (x', y')$

$$\rho(v, u) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$



То есть необходимо выполнение неравенства

$$\lambda_k \geq \frac{\rho(\psi(\sigma^k(q), v), \psi(\sigma^k(q), u))}{\rho(v, u)}.$$

Далее обозначим через  $\tilde{q} := \sigma^k(q)$ . Тогда для  $v = (x, y)$  и  $u = (x', y')$

$$\psi(\tilde{q}, v) = (1 - a_{\tilde{q}}x^2 + y, b_{\tilde{q}}x),$$

$$\psi(\tilde{q}, u) = (1 - a_{\tilde{q}}x'^2 + y', b_{\tilde{q}}x').$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho(\psi(\tilde{q}, v), \psi(\tilde{q}, u)) &= \sqrt{(1 - a_{\tilde{q}}x^2 + y - 1 + a_{\tilde{q}}x'^2 - y')^2 + (b_{\tilde{q}}x - b_{\tilde{q}}x')^2} = \\ &= \sqrt{(a_{\tilde{q}}(x'^2 - x^2) + (y - y'))^2 + b_{\tilde{q}}^2(x - x')^2}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\lambda_k \geq \frac{\sqrt{(a_{\tilde{q}}(x'^2 - x^2) + (y - y'))^2 + b_{\tilde{q}}^2(x - x')^2}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}.$$

То есть требуется для каждого шага  $k$  найти соответствующее  $\lambda_k$  - минимум функции  $\frac{\rho(\psi(\sigma^k(q), v), \psi(\sigma^k(q), u))}{\rho(v, u)}$ , а затем получить  $\lambda$ , подставив полученные значения в формулу

$$\lambda = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \prod_{k=0}^{m-1} \max\{\lambda_k, 1\}.$$

После того, как будут проделаны все описанные действия, можно произвести оценку топологической энтропии по формуле

$$h_{top}(\psi) \leq \lambda \cdot (n - 1 + s).$$

### 3.3 Численное исследование траекторий отображения Хенона

Для того, чтобы получить численную оценку, необходимо знать, как выглядит компактное инвариантное множество  $\mathcal{K}$ . Для этого попробуем понять, как ведет себя система Хенона.

Рассмотрим одномерный, состоящий из 5 клеток, клеточный автомат  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ , ассоциированный с правилом  $F$  радиуса  $r = 1$  и определяемый формулой

$$(\sigma(q))_j = F(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = x_{j-1} \vee x_j \vee x_{j+1}.$$

Здесь "  $\vee$  " - операция дизъюнкции, а  $j \in \{1, \dots, 5\}$ . Начальная конфигурация - в клетке посередине - единица, остальные нули.

Положим далее на каждом шаге итерации  $c_1(k) = \sum_{j: (\sigma^k(q))_j=1} (\sigma^k(q))_j$  и  $c_2(k) =$

$\sum_{j: (\sigma^k(q))_j=0} (\sigma^k(q))_j$ . Теперь пусть

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{e^{1(k)}}, \quad \tilde{b}_k = \frac{1}{e^{2(k)}}.$$

В этом случае

$$|\tilde{a}_k|, |\tilde{b}_k| \leq \frac{1}{e^5} \approx 0.006737947.$$

Для часто рассматриваемых (например, в работах [6], [13]) параметров  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  в этом случае действительно выполняются условия  $|\tilde{a}_k| \leq \varepsilon a$ ,  $|\tilde{b}_k| \leq \varepsilon b$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , где  $\varepsilon \in (0, 1)$  - малый параметр. И тогда становятся известны  $a_k = a + \tilde{a}_k$  и  $b_k = b + \tilde{b}_k$  - параметры системы (4).

Посмотрим теперь, как ведет себя система Хенона, отметив на плоскости точки  $x_k$  и  $y_k$ .

Выберем начальную точку  $(x_0, y_0) = (0.01, 0.01)$ . Каждая следующая итерация в нашем конкретном случае вычисляется по формулам:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - (a + \frac{1}{e^{1(k)}})x_k^2, \\ y_{k+1} = (b + \frac{1}{e^{2(k)}})x_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

Приведем график итераций  $k \leq 1000$  для  $(x_0, y_0) = (0.01, 0.01)$  и параметров  $a = 0.5$ ,  $b = 0.5$ : см. рисунок 1. Из графика можно заметить, что траектория системы Хенона "стабилизируется" в области  $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ .

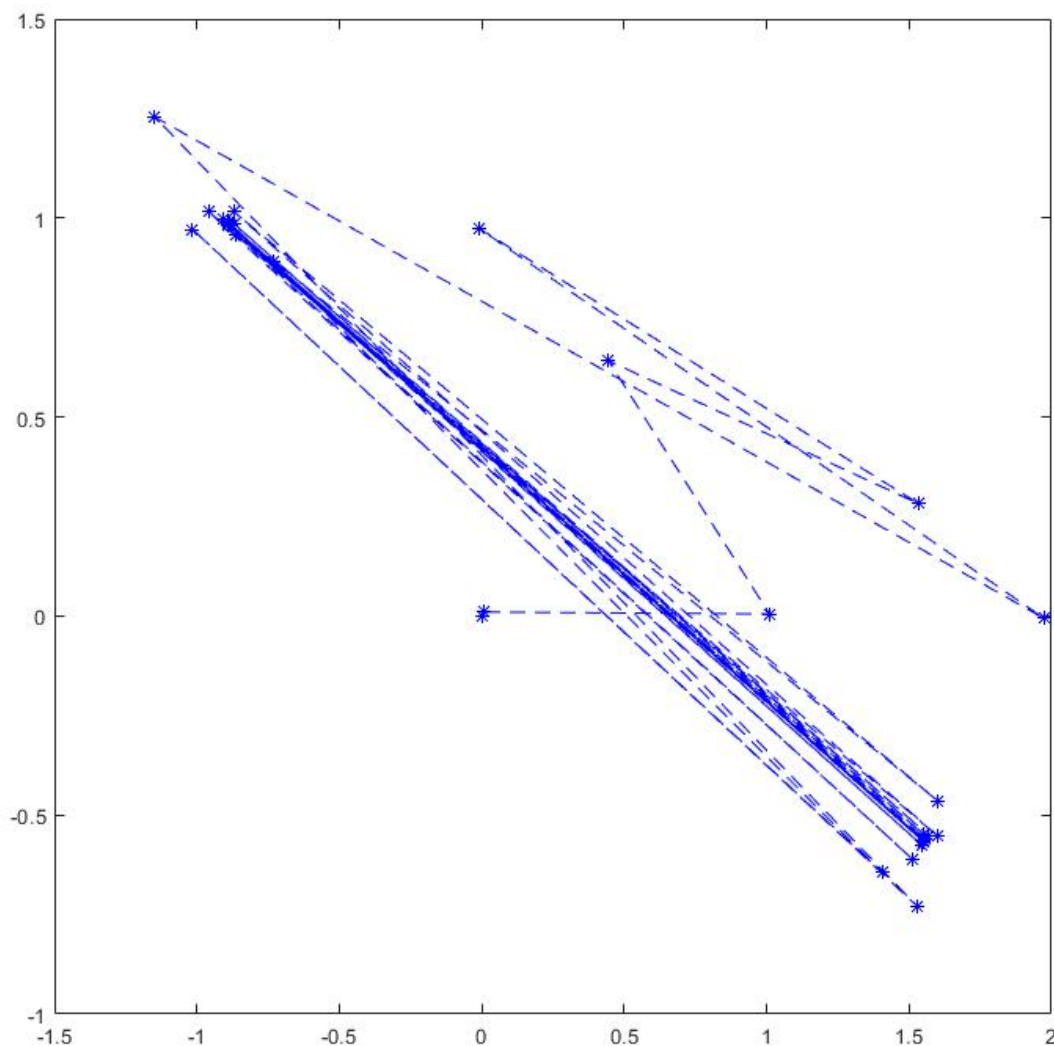


Рис. 1: График итераций системы Хенона с действующим на коэффициенты клеточным автоматом для  $k \leq 1000$ .

## Список литературы

- [1] R. Adler, A. Konheim, and H. McAndrew. Topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 114(2):309–319, 1965.
- [2] V. A Boichenko, G. A. Leonov, and V. Reitmann. *Dimension Theory for Ordinary Differential Equations*. Teubner, Wiesbaden, 2005.
- [3] R Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 153:401–414, 1971.

- [4] M. D'amico, G. Manzini, and L. Margara. On computing the entropy of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 290(3):1629 – 1646, 2003.
- [5] P. Grassberger, H. Kantz, and U. Moenig. On the symbolic dynamics of the h enon map. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(24):5217, 1989.
- [6] M. H enon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. In *The Theory of Chaotic Attractors*, pages 94–102. Springer, 1976.
- [7] B. Hunt. Maximum local lyapunov dimension bounds the box dimension of chaotic attractors. *Nonlinearity*, 9(4):845, 1996.
- [8] C. Kawan. Metric entropy of nonautonomous dynamical systems. *Nonautonomous dynamical systems*, 1(1), 2014.
- [9] P. Kloeden and B. Schmalfu . Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization. *Numerical Algorithms. Springer*, 14(1-3):141–152, 1997.
- [10] S. Kolyada and L. Snoha. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems. *Random and computational dynamics.*, 4(2):205, 1996.
- [11] A. A. Maltseva and V. Reitmann. Existence and dimension properties of a global b-pullback attractor for a cocycle generated by a discrete control system. *Differential Equations*, 53(13):1703–1714, 2017.
- [12] J. Milnor. On the entropy geometry of cellular automata. *Complex Systems*, 2(3):357–385, 1988.
- [13] A Noack. Hausdorff dimension estimates for time-discrete feedback control systems. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift f ur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 77(12):891–899, 1997.
- [14] J. Von Neumann. The general and logical theory of automata. *Cerebral mechanisms in behavior. New York: John Wiley & Sons*, 1(41), 1951.
- [15] S. Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of modern physics. APS*, 55(3):601, 1983.
- [16] В. С Афраймович and М. А. Шерешевский. О топологической динамике клеточных автоматов. *Методы качественной теории и теории бифуркаций. Межвузовский тематический сборник научных трудов. Под*

редакцией Л.П. Шапошникова. Горьк. гос. университет, pages 138–151, 1989.

- [17] А. Н. Колмогоров. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега. *ДАН СССР*, 119(5):861–864, 1958.
- [18] Е. Л. Лакштанов and Е. С. Лангваген. Критерий бесконечности топологической энтропии многомерных клеточных автоматов. *Проблемы передачи информации*, 40(2):70–72, 2004.
- [19] Е. Л. Лакштанов and Е. С. Лангваген. Энтропия многомерных клеточных автоматов. *Проблемы передачи информации*, 42(1):43–51, 2006.
- [20] Г. А. Леонов. Формулы ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца. *Алгебра и анализ*, 13(3):155–170, 2001.
- [21] Ф. Райтманн. *Динамические системы, аттракторы и оценки их размерности: учеб. пособие*. Изд-во С.-Петербур. ун-та, СПб, 2013.
- [22] Я. Г. Синай. О понятии энтропии динамической системы. *ДАН СССР*, 124(4):768–771, 1959.