ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Об итерационном способе исследования задачи Коши для сингулярно возмущённого линейного дифференциального уравнения второго порядка [1]

Е. Е. Букжалёв
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация

В работе построена последовательность, сходящаяся (по норме пространства непрерывных функций) к решению задачи Коши для сингулярно возмущённого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка как в обычном, так и в асимптотическом смысле. Аналогичная последовательность построена и для случая линейного однородного уравнения первого порядка, на примере которого продемонстрирована возможность применения такой последовательности к обоснованию асимптотики, получаемой с помощью метода пограничных функций.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций, метод пограничных функций, метод регуляризации сингулярных возмущений.

Abstract

We construct a sequence that converges both in the asymptotic and usual sense (with respect to the norm of the space of continuous functions) to the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed second-order linear homogeneous differential equation. The similar sequence was constructed for a first-order linear homogeneous equation as well. Using this equation as an example we demonstrate the justification of the asymptotics obtained by the method of boundary functions.

Keywords: singular perturbations, Banach fixed-point theorem, method of asymptotic iterations, method of boundary functions, method of regularization of singular perturbations.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00424).

1 Введение

В настоящей работе предлагается алгоритм построения последовательности $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ к классическому решению $y(\cdot;\varepsilon)$ начальной задачи для линейного однородного дифференциального уравнения первого и второго порядков (см. соответственно (1)–(2) и (39)–(40)) по норме $C[0,X]$ пространства функций, непрерывных на $[0,X]$ (для величины ε_0 в явном виде установлена нижняя оценка). Построение и доказательство сходимости последовательности $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ опираются на теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства (см. [1]). Поскольку при этом коэффициент сжатия $k(\varepsilon)$ отображения оказывается величиной порядка ε ($k(\varepsilon) < \varepsilon/\varepsilon_0$), то отклонение $y_n(\cdot;\varepsilon)$ от $y(\cdot;\varepsilon)$ (здесь и ниже под отклонением подразумевается отклонение по норме $C[0,X]$) составляет $O(\varepsilon^{n+1})$ (при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$), а значит, полученный результат носит также и асимптотический характер.

Каждый следующий элемент последовательности $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть результат действия некоторого оператора на предыдущий элемент. Элементы таких последовательностей называют итерациями, а сами последовательности — итерационными. В нашем случае каждая следующая итерация приближается к точному решению в асимптотически большое (обратно пропорциональное ε) число раз. Поэтому предложенный алгоритм построения последовательности $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ относится к классу не только итерационных, но и асимптотических методов исследования сингулярно возмущённых уравнений. Подобный метод иногда называют асимптотически-итерационным методом или методом асимптотических итераций (см., например, [2] и [3]).

Асимптотическое интегрирование задач (1)–(2) и (39)–(40) может быть осуществлено и с помощью других асимптотических методов, например, метода пограничных функций (см. [4] и [5]) и метода регуляризации сингулярных возмущений (см. [6] и [7]). При этом использование метода регуляризации не связано условиями (3) и (41), выполнение которых существенно как для предлагаемого метода асимптотических итераций, так и для метода пограничных функций. Кроме того, метод регуляризации сингулярных возмущений в применении к задачам (1)–(2) и (39)–(40), также как и метод асимптотических итераций, позволяет построить приближения, сходящиеся (при достаточно малых ε) не только в асимптотическом, но и в обычном смысле (по норме $C[0,X]$) — такая двойная сходимость является принципиальным преимуществом этих методов по сравнению с методом пограничных функций, который позволяет построить хоть и асимптотический, но, вообще говоря, расходящийся (в том числе при сколь угодно малых ε) ряд.

Непосредственным сравнением можно убедиться в том, что отклонение $y_n(\cdot;\varepsilon)$ от частичных сумм $Y_n(\cdot;\varepsilon)$ и $S_n(\cdot;\varepsilon)$ рядов, получаемых соответственно с помощью метода пограничных функций и метода регуляризации сингулярных возмущений, составляет $O(\varepsilon^{n+1})$. В первой части статьи (посвящённой уравнению первого порядка) этот факт установлен для отклонения $y_n(\cdot;\varepsilon)$ от $Y_n(\cdot;\varepsilon)$ при n равном нулю и единице (с помощью метода математической индукции доказательство может быть распространено на все целые неотрицательные n). Таким образом, сходимость последовательностей $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{S_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ делает возможным использование метода асимптотических итераций и метода регуляризации сингулярных возмущений для обоснования асимптотического разложения, получаемого с помощью метода пограничных функций (то есть для доказательства того, что отклонение $Y_n(\cdot;\varepsilon)$ от $y(\cdot;\varepsilon)$ составляет $O(\varepsilon^{n+1})$). Подчеркнём, что оценки отклонений $y_n(\cdot;\varepsilon)$ и $S_n(\cdot;\varepsilon)$ от $Y_n(\cdot;\varepsilon)$, составляющие $O(\varepsilon^{n+1})$, не являются равномерными по n, и с ростом n эти отклонения могут не только не стремиться к нулю, но даже неограниченно возрастать.

Идея применения итерационного подхода к возмущённым уравнениям сама по себе не является новой. Например, в работах [8] и [9] с помощью итерационного процесса строятся асимптотические приближения к решению задачи Коши для системы быстрых и медленных уравнений. При этом упрощение, достигаемое за счёт применения итерационного метода состоит в понижении размерности исследуемой системы. В отличие от указанных работ в настоящей статье упрощение связано с автономизацией исходных уравнений. Отметим ещё, что общим преимуществом итерационных процедур являются сравнительно скромные требования гладкости на входные данные задачи. В случае задач (1)–(2) и (39)–(40) для построения всех $y_n(\cdot;\varepsilon)$ достаточно непрерывной дифференцируемости функций a и a_i из правых частей дифференциальных уравнений, а при использовании метода пограничных функций или метода регуляризации сингулярных возмущений для построения всех членов асимптотики требуется бесконечная дифференцируемость этих функций.

Статья состоит из двух частей. В первой части метод асимптотических итераций применяется к задаче Коши для линейного уравнения первого порядка. Поскольку это уравнение интегрируется в квадратурах, то данная часть, разумеется, носит иллюстративный и предварительный характер. Кроме того, именно на примере уравнения первого порядка демонстрируется связь между методом асимптотических итераций и методом пограничных функций. Во второй части рассматривается задача Коши для линейного уравнения второго порядка, являющаяся основным объектом исследования настоящей работы. Применение метода асимптотических итераций к этой задаче состоит в одновременном построении двух асимптотических последовательностей $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{u_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящихся соответственно к решению $y(\cdot;\varepsilon)$ и его производной по первому аргументу (аргументу x).

2 Линейное уравнение первого порядка

В данном разделе исследуется решение задачи Коши для линейного однородного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения первого порядка (здесь и всюду ниже штрих означает производную по первому аргументу):

$$\varepsilon\, y'(x;\varepsilon) = a(x)\, y(x;\varepsilon), \quad x \in (0, X]; \tag{1}$$

$$y(0;\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения, $X > 0$, $y^0 \in \mathbb{R}$, $a \in C^1[0, X]$. Кроме того, будем считать, что

$$a(x) < 0, \quad x \in [0, X]. \tag{3}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\tilde{y}'(\xi) = a(0)\, \tilde{y}(\xi), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \tag{4}$$

$$\tilde{y}(0) = y^0. \tag{5}$$

Уравнение (4) представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом. Решение задачи (4)–(5) имеет вид:

$$\tilde{y}(\xi) = y^0\, e^{a(0)\,\xi}, \quad \xi \in [0, X/\varepsilon]. \tag{6}$$

Сделаем замену переменных в задаче (1)–(2):

$$x = \varepsilon\, \xi, \quad y(x;\varepsilon) = \tilde{y}(\xi) + \varepsilon\, z(\xi;\varepsilon). \tag{7}$$

Для новой функции $z(\cdot;\varepsilon)$ получается следующая начальная задача:

$$z'(\xi;\varepsilon) = a(\varepsilon\,\xi)\, z(\xi;\varepsilon) + f(\xi;\varepsilon), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \tag{8}$$

$$z(0;\varepsilon) = 0, \tag{9}$$

где

$$f(\xi;\varepsilon) := \varepsilon^{-1}\,[a(\varepsilon\,\xi)-a(0)]\,\tilde{y}(\xi) = \varepsilon^{-1}\,y^0\,[a(\varepsilon\,\xi)-a(0)]\,e^{a(0)\,\xi}. \qquad (10)$$

Преобразуем уравнение (8), добавив $x\in[0,X]$ в качестве нового параметра:

$$z'(\xi;\varepsilon,x) = a(x)\,z(\xi;\varepsilon,x) + [a(\varepsilon\,\xi)-a(x)]\,z(\xi;\varepsilon,x) + f(\xi;\varepsilon), \quad \xi\in(0,X/\varepsilon]; \qquad (11)$$

$$z(0;\varepsilon,x) = 0 \qquad (12)$$

(очевидно, что при каждом из рассматриваемых x задачи (8)–(9) и (11)–(12) равносильны).

Задача (11)–(12) равносильна интегральному уравнению (с параметрами ε и x)

$$z(\xi;\varepsilon,x) = \int\limits_0^{\xi} e^{a(x)\,(\xi-\zeta)}\left\{[a(\varepsilon\,\zeta)-a(x)]\,z(\zeta;\varepsilon,x)+f(\zeta;\varepsilon)\right\}d\zeta, \quad \xi\in[0,X/\varepsilon]. \qquad (13)$$

Так как решение $z(\cdot;\varepsilon,x)$ уравнения (13) совпадает решением $z(\cdot;\varepsilon)$ задачи (8)–(9) при каждом $x\in[0,X]$ (и, тем самым, заведомо не зависит от параметра x), то $z(\cdot;\varepsilon)$ будет удовлетворять любому уравнению, получающемуся из уравнения (13) подстановкой на место x функции ξ и ε со значениями на $[0,X]$, и, в частности, уравнению

$$z(\xi;\varepsilon) = \int\limits_0^{\xi} e^{a(\varepsilon\,\xi)\,(\xi-\zeta)}\left\{[a(\varepsilon\,\zeta)-a(\varepsilon\,\xi)]\,z(\zeta;\varepsilon)+f(\zeta;\varepsilon)\right\}d\zeta =$$
$$=: \hat{A}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon))(\xi), \quad \xi\in[0,X/\varepsilon], \qquad (14)$$

получающемуся из (13) подстановкой $x=\varepsilon\,\xi$. Таким образом, уравнение (14) является следствием задачи (8)–(9). Однако сказанное выше само по себе вовсе не означает обратного, и для доказательства их равносильности нужно ещё убедиться в том, что любое решение уравнение (14) удовлетворяет задаче (8)–(9). Это можно сделать как непосредственно (хотя такая проверка совсем не тривиальна и связана с довольно большим объёмом преобразований), так и опосредовано, воспользовавшись известным фактом существования и единственности решения задачи (8)–(9) и решения уравнения (14), вытекающим из их линейности и непрерывности функции a (единственное решение задачи (8)–(9) одновременно служит единственным решением уравнения (14)).

Замечание 1. Поскольку левая часть уравнения (13) не зависит от параметра x, правая часть этого уравнения, несмотря на явное присутствие в ней этого параметра, на самом деле, от него, конечно же, также не зависит; при этом существенно, что $z(\cdot;\varepsilon,x)$ из подынтегрального выражения является решением уравнения (13) (если вместо $z(\cdot;\varepsilon,x)$ подставить функцию, не удовлетворяющую уравнению (13), то интеграл из правой части этого уравнения, вообще говоря, будет зависеть от параметра x).

Замечание 2. При каждом $\varepsilon \in (0,+\infty)$ под областью определения оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ подразумевается пространство $C[0,X/\varepsilon]$. Очевидно, что $\hat{A}(\varepsilon) : C[0,X/\varepsilon] \to C[0,X/\varepsilon]$.

Пусть $\forall C \geqslant 0$ $O(C,\varepsilon) := \big\{z \in C[0,X/\varepsilon] \mid \forall \xi \in [0,X/\varepsilon]\ z(\xi) \in [-C,+C]\big\}$ — замкнутая C-окрестность функции $z : \xi \mapsto 0$ в пространстве $C[0,X/\varepsilon]$, $\hat{A}(C,\varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ на $O(C,\varepsilon)$.

Теорема 1 *Существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $C_0 \geqslant 0$, *что* $\hat{A}(C_0,\varepsilon) : O(C_0,\varepsilon) \to O(C_0,\varepsilon)$ *при каждом* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $C_0 \geqslant 0$, подействуем оператором $\hat{A}(\varepsilon)$ на произвольную функцию $z \in O(C_0,\varepsilon)$ и оценим получившийся результат:

$$\left|\hat{A}(\varepsilon)(z)(\xi)\right| \leqslant e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi}\left\{C_0\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,|a(\varepsilon\,\zeta)-a(\varepsilon\,\xi)|\,d\zeta+\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,|f(\zeta;\varepsilon)|\,d\zeta\right\}. \tag{15}$$

Для первого интеграла из (15) имеем:

$$\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,|a(\varepsilon\,\zeta)-a(\varepsilon\,\xi)|\,d\zeta \leqslant \varepsilon\,\|a'\|\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,(\xi-\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \varepsilon\,\|a'\|\,\tfrac{1}{|a(\varepsilon\,\xi)|}\left[(\xi-\zeta)\,e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\Big|_0^\xi+\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,d\zeta\right] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\,\|a'\|\,\|a^{-1}\|\left[-\xi+\tfrac{1}{|a(\varepsilon\,\xi)|}\,(e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\xi}-1)\right] \leqslant \varepsilon\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|\,e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\xi}, \tag{16}$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[0,X]$.

Для второго интеграла из (15) имеем (см. (10)):

$$\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,|f(\zeta;\varepsilon)|\,d\zeta \leqslant |y^0|\,\|a'\|\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,\zeta\,e^{a(0)\,\zeta}\,d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant |y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-1}\|\max_{\eta>0}(\eta\,e^{-\eta})\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,d\zeta \leqslant e^{-1}\,|y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|\,e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\xi}. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) видно, что если C_0 и ε удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leqslant C_0\,\varepsilon\,\|a'\|\,\|a^{-2}\| + e^{-1}\,|y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\| \leqslant C_0, \tag{18}$$

то $\hat{A}(C_0,\varepsilon)(z)(\xi) := \hat{A}(\varepsilon)(z)(\xi) \in O(C_0,\varepsilon)$.

Положим

$$\varepsilon_0 := \gamma_0\left(\|a'\|\,\|a^{-2}\|\right)^{-1}, \tag{19}$$

где γ_0 — любое число из интервала $(0,1)$ (если $a = \mathrm{const}$ на $[0,X]$, то $\varepsilon_0 := +\infty$),

$$C_0 := \frac{e^{-1}\,|y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|}{1-\varepsilon_0\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|} = \frac{e^{-1}\,|y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|}{1-\gamma_0}. \tag{20}$$

Тогда неравенства (18) выполняются при всяком $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

□

Пусть для каждого положительного ε и любых z_1, z_2 из $C[0,X/\varepsilon]$ определено расстояние ρ_ε между z_1 и z_2:

$$\rho_\varepsilon(z_1,z_2) := \|z_2 - z_1\|_{C[0,X/\varepsilon]} := \max_{\xi\in X(\varepsilon)} |z_2(\xi) - z_1(\xi)|, \tag{21}$$

где $X(\varepsilon) := [0,X/\varepsilon]$. Заметим, что $C[0,X/\varepsilon]$ и $O(C_0,\varepsilon)$ с так определённым ρ_ε представляют собой полные метрические пространства.

Теорема 2 $\hat{A}(\varepsilon)$ — *сжимающий оператор при каждом* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Доказательство. Пусть ρ_ε — метрика (21) пространства $C[0,X/\varepsilon]$. Выберем две произвольные функции z_1 и z_2 из этого пространства и оценим расстояние между $\hat{A}(\varepsilon)(z_1)$ и $\hat{A}(\varepsilon)(z_2)$:

$$\rho_\varepsilon(\hat{A}(\varepsilon)(z_1),\hat{A}(\varepsilon)(z_2)) = \max_{\xi\in X(\varepsilon)}\left|\hat{A}(\varepsilon)(z_1)(\xi) - \hat{A}(\varepsilon)(z_2)(\xi)\right| =$$

$$= \max_{\xi\in X(\varepsilon)} e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi}\left|\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,[a(\varepsilon\,\zeta) - a(\varepsilon\,\xi)]\,[z_1(\zeta) - z_2(\zeta)]d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \rho_\varepsilon(z_1,z_2)\max_{\xi\in X(\varepsilon)} e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi}\int\limits_0^\xi e^{|a(\varepsilon\,\xi)|\,\zeta}\,|a(\varepsilon\,\zeta) - a(\varepsilon\,\xi)|\,d\zeta. \tag{22}$$

Из (22), (16) и (19) вытекает, что при любом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ для коэффициента сжатия $k(\varepsilon)$ оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ справедливо:

$$k(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\,\|a'\|\,\|a^{-2}\| \leqslant \gamma_0 < 1. \tag{23}$$

□

Заметим, что поскольку коэффициент сжатия $k(C_0,\varepsilon)$ оператора $\hat{A}(C_0,\varepsilon)$ заведомо не превосходит $k(\varepsilon)$, то оценка (23) справедлива и для него:

$$k(C_0,\varepsilon) \leqslant \varepsilon\,\|a'\|\,\|a^{-2}\| \leqslant \gamma_0 < 1. \tag{24}$$

Таким образом, к оператору $\hat{A}(C_0,\varepsilon)$ применима теорема Банаха о неподвижной точке, в силу которой при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ в $O(C_0,\varepsilon)$ существует единственное решение $z(\cdot;\varepsilon)$ интегрального уравнения (14) (равносильного задаче (8)–(9)). Отметим, что существование и глобальная (то есть в классе $C[0,X/\varepsilon]$) единственность решения $z(\cdot;\varepsilon)$ (при всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$), на самом деле, сразу вытекают из линейности задачи (8)–(9) (равно как и из линейности уравнения (14)), так что содержательным результатом является лишь его принадлежность $O(C_0,\varepsilon)$.

Свойство сжимаемости оператора $\hat{A}(C_0,\varepsilon)$ также позволяет построить итерационную последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящуюся по норме пространства $C[0,X/\varepsilon]$ к точному решению $z(\cdot;\varepsilon)$ задачи (8)–(9) равномерно по всем $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$:

$$\|z(\cdot;\varepsilon)-z_n(\cdot;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} := \max_{\xi\in X(\varepsilon)}|z(\xi;\varepsilon)-z_n(\xi;\varepsilon)| \rightrightarrows 0, \quad n\to\infty.$$

Положим $z_0(\xi;\varepsilon) := 0$ при $\xi \in [0,X/\varepsilon]$. Поскольку $z(\cdot;\varepsilon) \in O(C_0,\varepsilon)$, то (см. (20))

$$\|z(\cdot;\varepsilon)-z_0(\cdot;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} = \|z(\cdot;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} \leqslant C_0 := \frac{e^{-1}\,|y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|}{1-\gamma_0}$$

при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Однако точность нулевой итерации можно повысить, если воспользоваться методом дифференциальных неравенств. Рассмотрим постоянные функции:

$$\overline{z}(\xi;\varepsilon) \equiv e^{-1}\,|y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|, \quad \underline{z}(\xi;\varepsilon) = -\overline{z}(\xi;\varepsilon), \quad \xi\in[0,X/\varepsilon].$$

Поскольку для $\overline{z}(\cdot;\varepsilon)$ и $\underline{z}(\cdot;\varepsilon)$ справедливо (напомним, что $f(\cdot;\varepsilon)$ определена в (10)):

$$\begin{gathered}
a(\varepsilon\,\xi)\,\overline{z}(\xi;\varepsilon) + f(\xi;\varepsilon) \leqslant a(\varepsilon\,\xi)\,\overline{z}(\xi;\varepsilon) + \left|y^0\right|\,\|a'\|\,\xi\,e^{a(0)\,\xi} \leqslant \\
\leqslant \left|a(\varepsilon\,\xi)\right|\,\Big[-\overline{z}(\xi;\varepsilon) + |y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\|\max_{\eta>0}(\eta\,e^{-\eta})\Big] = 0 = \overline{z}'(\xi;\varepsilon), \\
a(\varepsilon\,\xi)\,\underline{z}(\xi;\varepsilon) + f(\xi;\varepsilon) \geqslant a(\varepsilon\,\xi)\,\underline{z}(\xi;\varepsilon) - \left|y^0\right|\,\|a'\|\,\xi\,e^{a(0)\,\xi} \geqslant \\
\geqslant 0 = \underline{z}'(\xi;\varepsilon), \quad \xi\in(0,X/\varepsilon]; \quad \underline{z}(0;\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \overline{z}(0;\varepsilon),
\end{gathered}$$

то по теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [1]) значения решения $z(\xi;\varepsilon)$ задачи (8)–(9) заключены между $\underline{z}(\xi;\varepsilon)$ и $\overline{z}(\xi;\varepsilon)$ при всех $\xi \in [0, X/\varepsilon]$, а значит

$$\|z(\cdot;\varepsilon) - z_0(\cdot;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} = \|z(\cdot;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} \leqslant e^{-1}\,|y^0|\,\|a'\|\,\|a^{-2}\| \qquad (25)$$

при каждом $\varepsilon \in (0, +\infty)$.

Далее, для любого натурального n положим

$$z_n(\xi;\varepsilon) := \hat{A}(C_0,\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(\xi) = \hat{A}(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(\xi), \quad \xi \in [0, X/\varepsilon]. \qquad (26)$$

Тогда, учитывая (24) и (25), для каждого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N} =: \mathbb{N}_0$ и каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеем:

$$\begin{aligned}\|z(\cdot;\varepsilon) - z_n(\cdot;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} &\leqslant k(C_0,\varepsilon)^n\,\|z(\cdot;\varepsilon) - z_0(\cdot;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon^n\, e^{-1}\,|y^0|\,\big(\|a'\|\,\|a^{-2}\|\big)^{n+1}. \end{aligned} \qquad (27)$$

Вернёмся к задаче (1)–(2). Из (7) и (6) приходим к следующей асимптотической последовательности для решения $y(\cdot;\varepsilon)$ исходной задачи:

$$y_0(x;\varepsilon) := \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, z_0(x/\varepsilon;\,\varepsilon) = y^0\, e^{a(0)\,x/\varepsilon}, \quad x \in [0, X]; \qquad (28)$$

$$y_n(x;\varepsilon) := \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, z_n(x/\varepsilon;\,\varepsilon), \quad (x,n) \in [0,X] \times \mathbb{N}. \qquad (29)$$

При $n \geqslant 1$ элемент $y_n(\cdot;\varepsilon)$ можно выразить непосредственно через $y_{n-1}(\cdot;\varepsilon)$. Используя (29) (сначала для $y_n(\varepsilon\,\xi;\,\varepsilon)$, а потом для $z_{n-1}(\xi;\varepsilon)$), (26), (14), (10) и (6), получаем:

$$\begin{aligned} y_n(x;\varepsilon) = y_n(\varepsilon\,\xi;\,\varepsilon) = \tilde{y}(\xi) + \varepsilon\,\hat{A}(C_0,\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(\xi) = \tilde{y}(\xi) + e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi} \times \\ \times \int\limits_0^\xi e^{-\,a(\varepsilon\,\xi)\,\zeta}\,\big\{[a(\varepsilon\,\zeta) - a(\varepsilon\,\xi)]\,[y_{n-1}(\varepsilon\,\zeta;\,\varepsilon) - \tilde{y}(\zeta)] + [a(\varepsilon\,\zeta) - a(0)]\,\tilde{y}(\zeta)\big\}\,d\zeta = \end{aligned} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned} = \tilde{y}(\xi) + e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi}\int\limits_0^\xi e^{-\,a(\varepsilon\,\xi)\,\zeta}\,\big\{[a(\varepsilon\,\zeta) - a(\varepsilon\,\xi)]\,y_{n-1}(\varepsilon\,\zeta;\,\varepsilon) + \\ + [a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,y^0\,e^{a(0)\,\zeta}\big\}\,d\zeta = y^0\,e^{a(0)\,\xi} - e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi}\,y^0\,\big\{e^{[a(0)-a(\varepsilon\,\xi)]\,\xi} - 1\big\} + \\ + e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi}\int\limits_0^\xi e^{-\,a(\varepsilon\,\xi)\,\zeta}\,[a(\varepsilon\,\zeta) - a(\varepsilon\,\xi)]\,y_{n-1}(\varepsilon\,\zeta;\,\varepsilon)\,d\zeta = y^0\,e^{a(x)\,x/\varepsilon} + \\ + \varepsilon^{-1}\,e^{a(x)\,x/\varepsilon}\int\limits_0^x e^{-\,a(x)\,s/\varepsilon}\,[a(s) - a(x)]\,y_{n-1}(s;\varepsilon)\,ds =: \hat{B}(\varepsilon)(y_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x). \end{aligned} \qquad (31)$$

Отметим, что оператор $\hat{B}(\varepsilon)$ является сжимающим при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (то есть при тех же ε, что и $\hat{A}(\varepsilon)$), и что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для оператора $\hat{B}(\varepsilon)$ будет справедливо:

$$\hat{B}(C_0, \varepsilon) : \tilde{O}(C_0, \varepsilon) \to \tilde{O}(C_0, \varepsilon),$$

где $\tilde{O}(C_0, \varepsilon) := \big\{ y \in C[0, X] \mid \forall x \in [0, X]\; y(x) \in [\tilde{y}(x/\varepsilon) - \varepsilon\, C_0,\; \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, C_0] \big\}$ — замкнутая $\varepsilon\, C_0$-окрестность функции $x \mapsto \tilde{y}(x/\varepsilon)$ в пространстве $C[0, X]$, $\hat{B}(C_0, \varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{B}(\varepsilon)$ на $\tilde{O}(C_0, \varepsilon)$.

Оценим точность, с которой $y_n(\cdot; \varepsilon)$ приближает $y(\cdot; \varepsilon)$. Для каждых $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $x \in [0, X]$ имеем (см. (28), (29), (7) и (27)):

$$\begin{aligned} &|y(x; \varepsilon) - y_n(x; \varepsilon)| = |y(x; \varepsilon) - \tilde{y}(x/\varepsilon) - \varepsilon\, z_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon)| = \\ &= \varepsilon\, |z(x/\varepsilon;\, \varepsilon) - z_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon)| \leqslant e^{-1}\, |y^0| \left(\varepsilon\, \|a'\|\, \|a^{-2}\|\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Замечание 3. Для решения $y(\cdot; \varepsilon)$ задачи (1)–(2) с помощью оценки его явного выражения (в квадратурах) или с помощью всё того метода дифференциальных неравенств несложно устанавливается экспоненциальная оценка: $|y(x; \varepsilon)| < y^0\, e^{-\varkappa\, x/\varepsilon}$ при $x \in [0, X]$ ($\varkappa$ определено в (34)). Пусть $x_0 \in [0, X]$. Рассматривая $y(x_0; \varepsilon)$ как начальное значение задачи Коши для уравнения (1) на отрезке $[x_0, X]$ и заменяя в (32) множитель $|y^0| = |y(0; \varepsilon)|$ на $|y(x_0; \varepsilon)|$, для каждых $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $x \in [x_0, X]$ с учётом вышеупомянутой оценки получаем:

$$\|y(x; \varepsilon) - y_n(x; \varepsilon)\|_{C[x_0, X]} \leqslant e^{-1 - \varkappa\, \frac{x_0}{\varepsilon}}\, |y^0| \left(\varepsilon\, \|a'\|\, \|a^{-2}\|\right)^{n+1}.$$

Пусть $a \in C^2[0, X]$. Убедимся, что тогда для $y_k(x; \varepsilon)$ справедливы разложения вида:

$$y_k(x; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i\, \tilde{y}_i(\xi) + O(\varepsilon^{k+1})\, (1 + \xi)^{2k+2}\, e^{-\varkappa\, \xi}, \quad (x, \varepsilon) \in [0, X] \times (0, +\infty), \tag{33}$$

где $\tilde{y}_i$ — элементарные функции (одни и те же для всех y_k), $\xi := x/\varepsilon$,

$$\varkappa := -\max_{[0, X]} a(x) = \|a^{-1}\|^{-1} > 0. \tag{34}$$

Начнём с $k = 0$. Согласно (28), в качестве $\tilde{y}_0(\xi)$ выступает само $y_0(x; \varepsilon)$:

$$y_0(x; \varepsilon) = y_0(\varepsilon\, \xi;\, \varepsilon) := \tilde{y}(\xi) = y^0\, e^{a(0)\, \xi} =: \tilde{y}_0(\xi),$$

так что при $k=0$ величина $O(\varepsilon^{k+1})$ в (33) есть тождественный нуль.

Перейдём к $k=1$. Чтобы получить представление (33) для $y_1(x;\varepsilon)$, воспользуемся (30) и (28):

$$\begin{gathered}
y_1(x;\varepsilon)=\tilde y(\xi)+\int\limits_0^\xi e^{a(\varepsilon\,\xi)\,(\xi-\zeta)}\,\bigl\{[a(\varepsilon\,\zeta)-a(\varepsilon\,\xi)]\,[y_0(\varepsilon\,\zeta;\,\varepsilon)-\tilde y(\zeta)]+\\
+[a(\varepsilon\,\zeta)-a(0)]\,\tilde y(\zeta)\bigr\}\,d\zeta=\tilde y(\xi)+\int\limits_0^\xi\bigl[e^{a(0)\,(\xi-\zeta)}+\varepsilon\,\|a'\|\,\xi\,(\xi-\zeta)\,e^{-\varkappa\,(\xi-\zeta)}\bigr]\times\\
\times\bigl[\varepsilon\,a'(0)\,\zeta+\tfrac12\,\varepsilon^2\,\|a''\|\,\zeta^2\bigr]\,y^0\,e^{a(0)\,\zeta}\,d\zeta=\\
=\tilde y(\xi)+\varepsilon\,y^0\int\limits_0^\xi e^{a(0)\,(\xi-\zeta)}\,a'(0)\,\zeta\,e^{a(0)\,\zeta}\,d\zeta+R_2(\xi;\varepsilon)=\tilde y_0(\xi)+\varepsilon\,\tilde y_1(\xi)+R_2(\xi;\varepsilon),
\end{gathered}\tag{35}$$

где $\tilde y_1(\xi):=\frac12\,y^0\,a'(0)\,\xi^2\,e^{a(0)\,\xi}$, а через $R_2(\xi;\varepsilon)$ обозначена группа слагаемых, содержащих ε^2 или ε^3. Оценим $R_2(\xi;\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}
|R_2(\xi;\varepsilon)|\leqslant\varepsilon^2\,|y^0|\int\limits_0^\xi\Bigl[\tfrac12\,\|a''\|\,\zeta^2\,e^{a(0)\,(\xi-\zeta)}+\|(a')^2\|\,\xi\,(\xi-\zeta)\,\zeta\,e^{-\varkappa\,(\xi-\zeta)}+\\
+\tfrac12\,\varepsilon\,\|a''\|\,\|a'\|\,\xi\,(\xi-\zeta)\,\zeta^2\,e^{-\varkappa\,(\xi-\zeta)}\Bigr]\,e^{a(0)\,\zeta}\,d\zeta\leqslant\\
\leqslant\varepsilon^2\,|y^0|\,\Bigl[\tfrac16\,\|a''\|\,\xi^3+\tfrac16\,\|(a')^2\|\,\xi^4+\tfrac1{24}\,X\,\|a''\|\,\|a'\|\,\xi^4\Bigr]\,e^{-\varkappa\,\xi}\leqslant\varepsilon^2\,C\,(1+\xi)^4\,e^{-\varkappa\,\xi}
\end{gathered}\tag{36}$$

где C — достаточно большое (не зависящее от ξ и ε) неотрицательное число. Из (35) и (36) приходим к требуемому представлению для $y_1(x;\varepsilon)$.

С помощью индукции по n можно доказать, что если $a\in C^{n+1}[0,X]$, то разложения вида (33) справедливы для всех k от нуля до n. Ввиду (32) это будет означать, что

$$y(x;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\,\tilde y_i(\xi)+O(\varepsilon^{n+1}),\quad (x,\varepsilon)\in[0,X]\times(0,\varepsilon_0'],\tag{37}$$

где ε_0' — любое положительное число (здесь мы также учли, что при каждом $n\in\mathbb N_0$ функция $\xi\mapsto(1+\xi)^{2n+2}\,e^{-\varkappa\,\xi}$ ограничена на полупрямой $[0,+\infty)$).

Из (37) следует, что в случае $a\in C^\infty[0,X]$ есть возможность составить асимптотический ряд для $y(x;\varepsilon)$:

$$y(x;\varepsilon)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\,\tilde y_i(\xi),\quad (x,\varepsilon)\in[0,X]\times(0,\varepsilon_0'].\tag{38}$$

Метод пограничных функций также позволяет построить асимптотику вида (38) для решения $y(\cdot;\varepsilon)$ задачи (1)–(2):

$$y(x;\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \, \Pi_i(\xi), \quad (x,\varepsilon) \in [0,X] \times (0,\varepsilon_0'],$$

где Π_i суть пограничные функции, $\xi := x/\varepsilon$ — растянутый аргумент.

Заметим, что в силу единственности асимптотического разложения вида (38) построенные двумя способами асимптотики полностью совпадают: $\tilde{y}_n(\xi) = \Pi_n(\xi)$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и $\xi \in [0,+\infty)$.

Преимуществом ряда (38) по сравнению с асимптотической последовательностью $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (см. (28), (31)) является тот факт, что он состоит из элементарных функций. К преимуществам последовательности $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ относятся её сходимость (равномерная по ε) при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ (ряд (38), вообще говоря, расходится при сколь угодно малых ε, даже если функция a аналитична на всём отрезке $[0,X]$) и возможность построения всех её членов без повышения требования гладкости на функцию a (напомним, что для построения всех $y_n(\cdot;\varepsilon)$ достаточно, чтобы $a \in C^1[0,X]$, в то время как для построения всех Π_n требуется бесконечная дифференцируемость a).

3 Линейное уравнение второго порядка

В данном разделе исследуется решение задачи Коши для линейного однородного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения второго порядка:

$$\varepsilon^2 \, y''(x;\varepsilon) = \varepsilon \, a_1(x) \, y'(x;\varepsilon) + a_0(x) \, y(x;\varepsilon), \quad x \in (0,X]; \tag{39}$$

$$y(0;\varepsilon) = y^0, \quad y'(0;\varepsilon) = y^1/\varepsilon, \tag{40}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения, $X > 0$, $y^0, y^1 \in \mathbb{R}$, $a_0, a_1 \in C^1[0,X]$. Кроме того, будем считать, что

$$a_i(x) < 0, \quad (i,x) \in \{0,1\} \times [0,X]. \tag{41}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\tilde{y}''(\xi) = a_1(0) \, \tilde{y}'(\xi) + a_0(0) \, \tilde{y}(\xi), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \tag{42}$$

$$\tilde{y}(0) = y^0, \quad \tilde{y}'(0) = y^1. \tag{43}$$

Уравнение (42) представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решением задачи (42)–(43) будет:

$$\tilde{y} : \xi \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda_2(0)\, y^0 - y^1}{\lambda_2(0) - \lambda_1(0)}\, e^{\lambda_1(0)\,\xi} + \frac{y^1 - \lambda_1(0)\, y^0}{\lambda_2(0) - \lambda_1(0)}\, e^{\lambda_2(0)\,\xi}, & \text{если } \lambda_1(0) \neq \lambda_2(0), \\ y^0\, e^{\lambda(0)\,\xi} + \left[y^1 - \lambda(0)\, y^0\right] \xi\, e^{\lambda(0)\,\xi}, & \text{если } \lambda_1(0) = \lambda_2(0) =: \lambda(0), \end{cases} \tag{44}$$

где

$$\lambda_{1,2}(x) := \frac{a_1(x) \mp \sqrt{a_1(x)^2 + 4\, a_0(x)}}{2}, \quad x \in [0, X].$$

Заметим, что $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(x) < 0$ при всех $x \in [0, X]$.

Из (44) видно, что при достаточно большом $\tilde{C}$ для $\tilde{y}$ и $\tilde{y}'$ справедливо:

$$|\tilde{y}(\xi)|,\, |\tilde{y}'(\xi)| \leqslant \tilde{C}\, (\xi + 1)\, e^{\operatorname{Re} \lambda_2(0)\,\xi}, \quad \xi \in [0, +\infty). \tag{45}$$

Сделаем замену переменных в задаче (39)–(40):

$$x = \varepsilon\, \xi, \quad y(x; \varepsilon) = \tilde{y}(\xi) + \varepsilon\, z(\xi; \varepsilon). \tag{46}$$

Для новой функции $z(\cdot; \varepsilon)$ получается следующая начальная задача:

$$z''(\xi; \varepsilon) = a_1(\varepsilon\, \xi)\, z'(\xi; \varepsilon) + a_0(\varepsilon\, \xi)\, z(\xi; \varepsilon) + f(\xi; \varepsilon), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \tag{47}$$

$$z(0; \varepsilon) = z'(0; \varepsilon) = 0, \tag{48}$$

где

$$f(\xi; \varepsilon) := \varepsilon^{-1} \left\{ [a_1(\varepsilon\, \xi) - a_1(0)]\, \tilde{y}'(\xi) + [a_0(\varepsilon\, \xi) - a_0(0)]\, \tilde{y}(\xi) \right\}. \tag{49}$$

Преобразуем уравнение (47), добавив $x \in [0, X]$ в качестве нового параметра:

$$\begin{aligned} z''(\xi; \varepsilon, x) = a_1(x)\, z'(\xi; \varepsilon, x) + a_0(x)\, z(\xi; \varepsilon, x) + [a_1(\varepsilon\, \xi) - a_1(x)]\, z'(\xi; \varepsilon, x) + \\ + [a_0(\varepsilon\, \xi) - a_0(x)]\, z(\xi; \varepsilon, x) + f(\xi; \varepsilon), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \end{aligned} \tag{50}$$

$$z(0; \varepsilon, x) = z'(0; \varepsilon, x) = 0 \tag{51}$$

(очевидно, что при каждом x из $[0, X]$ задачи (47)–(48) и (50)–(51) равносильны).

Задача (50)–(51) равносильна интегральному уравнению (с параметрами ε и x)

$$z(\xi;\varepsilon,x)=\int\limits_0^{\xi}\Phi(\xi-\zeta;\,x)\Big\{[a_1(\varepsilon\,\zeta)-a_1(x)]\,z'(\zeta;\varepsilon,x)+$$

$$+\,[a_0(\varepsilon\,\zeta)-a_0(x)]\,z(\zeta;\varepsilon,x)+f(\zeta;\varepsilon)\Big\}\,d\zeta,\quad \xi\in[0,X/\varepsilon], \tag{52}$$

где $\Phi(\cdot;x)$ — фундаментальная функция уравнения (с параметром x)

$$Z''(\xi;x)=a_1(x)\,Z'(\xi;x)+a_0(x)\,Z(\xi;x),\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{53}$$

Замечание 1. Напомним, что для функции Коши $K(\cdot,\cdot;x)$ уравнения (53) справедливо:

$$K(\xi,\zeta;x)=\Phi(\xi-\zeta;\,x),\quad \xi,\zeta\in\mathbb{R}.$$

Замечание 2. Равносильность задачи (50)–(51) и уравнения (52) является тривиальным следствием определения функции $\Phi(\cdot;x)$.

Интегрируя (53), и учитывая, что $\Phi(0;x)=0$, $\Phi'(0;x)=1$, для $\Phi(\xi;x)$ имеем:

$$\Phi(\xi;x)=\begin{cases}\frac{e^{\lambda_2(x)\,\xi}-e^{\lambda_1(x)\,\xi}}{\lambda_2(x)-\lambda_1(x)}, & x\in X_1:=\{x\in[0,X]\mid\lambda_1(x)\neq\lambda_2(x)\},\\ \xi\,e^{\lambda(x)\,\xi}, & x\in X_2:=\{x\in[0,X]\mid\lambda_1(x)=\lambda_2(x)=:\lambda(x)\}.\end{cases} \tag{54}$$

Непосредственно из (54) видно, что $\Phi\in C^{\infty,1}(\mathbb{R}\times[0,X])$. Впрочем, это может быть установлено и без использования явного выражения для $\Phi(\xi;x)$ с помощью теорем о непрерывности и о дифференцируемости по параметру решения начальной задачи.

Запишем выражение для производной функции $z(\cdot;\varepsilon,x)$:

$$z'(\xi;\varepsilon,x)=\int\limits_0^{\xi}\Phi'(\xi-\zeta;\,x)\Big\{[a_1(\varepsilon\,\zeta)-a_1(x)]\,z'(\zeta;\varepsilon,x)+$$

$$+\,[a_0(\varepsilon\,\zeta)-a_0(x)]\,z(\zeta;\varepsilon,x)+f(\zeta;\varepsilon)\Big\}\,d\zeta,\quad \xi\in[0,X/\varepsilon]. \tag{55}$$

Это выражение можно также рассматривать как уравнение для $z(\cdot;\varepsilon)$, являющееся следствием уравнения (52) (впрочем, на самом деле, оно ему даже равносильно). При этом система двух уравнений (52) и (55), конечно же, равносильна одному уравнению (52).

Подставляя в уравнениях (52) и (55) на место x произведение $\varepsilon\,\xi$, приходим к системе уравнений для функции $z(\cdot;\varepsilon)$:

$$z(\xi;\varepsilon) = \int\limits_0^{\xi} \Phi(\xi-\zeta;\,\varepsilon\,\xi)\Big\{[a_1(\varepsilon\,\zeta)-a_1(\varepsilon\,\xi)]\,z'(\zeta;\varepsilon)+[a_0(\varepsilon\,\zeta)-a_0(\varepsilon\,\xi)]\,z(\zeta;\varepsilon)+$$
$$+f(\zeta;\varepsilon)\Big\}\,d\zeta =: \hat{A}_z(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon),z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),\quad \xi\in[0,X/\varepsilon];$$
$$z'(\xi;\varepsilon) = \int\limits_0^{\xi} \Phi'(\xi-\zeta;\,\varepsilon\,\xi)\Big\{[a_1(\varepsilon\,\zeta)-a_1(\varepsilon\,\xi)]\,z'(\zeta;\varepsilon)+[a_0(\varepsilon\,\zeta)-a_0(\varepsilon\,\xi)]\,z(\zeta;\varepsilon)+$$
$$+f(\zeta;\varepsilon)\Big\}\,d\zeta =: \hat{A}_v(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon),z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),\quad \xi\in[0,X/\varepsilon],$$

равносильной задаче (47)–(48) (эта равносильность вытекает из же соображений, что и равносильность уравнения (14) и задачи (8)–(9)). Эту систему можно кратко переписать в векторном виде:

$$\big(z(\xi;\varepsilon),z'(\xi;\varepsilon)\big) = \big(\hat{A}_z(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon),z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),\,\hat{A}_v(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon),z'(\cdot;\varepsilon))(\xi)\big) =$$
$$=: \hat{A}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon),z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),\quad \xi\in[0,X/\varepsilon]. \tag{56}$$

Замечание 3. При каждом фиксированном $\varepsilon\in(0,+\infty)$ под областью определения оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ подразумевается $C_2[0,X/\varepsilon]$ — пространство двумерных вектор-функций, непрерывных на отрезке $[0,X/\varepsilon]$. Очевидно, что $\hat{A}(\varepsilon):C_2[0,X/\varepsilon]\to C_2[0,X/\varepsilon]$.

Утверждение 1 *При всех* $(\xi,x)\in[0,+\infty)\times[0,X]$ *справедливо:*

$$|\Phi(\xi;x)|\leqslant \xi\,e^{-\varkappa\,\xi},\quad |K_\xi(\xi;x)|\leqslant[\kappa\,\xi+1]\,e^{-\varkappa\,\xi},$$

где

$$\varkappa := -\max_{[0,X]}\operatorname{Re}\lambda_2(x),\quad \kappa := -\min_{[0,X]}\operatorname{Re}\lambda_1(x).$$

Сразу подчеркнём, что в силу второй теоремы Вейерштрасса постоянные $\varkappa$ и κ имеют положительный знак.

Доказательство. Поскольку случай $\lambda_1(x)=\lambda_2(x)=:\lambda(x)$ (при этом $\lambda(x)$ заведомо принадлежит $\mathbb{R}$) тривиален, то далее на протяжении всего доказательства считаем, что $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$ не равны друг другу.

Сперва рассмотрим такие x, при которых $\lambda_1(x),\lambda_2(x)\in\mathbb{R}$. Используя явное выражение для $\Phi(x;\xi)$ (см. первую строчку в (54)) и формулу Лагранжа, получаем:

$$0 \leqslant \Phi(\xi;x) = \xi\, e^{[(1-\theta_1)\lambda_1(x)+\theta_1\lambda_2(x)]\,\xi} \leqslant \xi\, e^{\lambda_2(x)\,\xi} \leqslant \xi\, e^{-\varkappa\,\xi},$$
$$|K_\xi(\xi;x)| = \Big|[(1-\theta_2)\,\lambda_1(x) + \theta_2\,\lambda_2(x)]\,\xi + 1\Big|\, e^{[(1-\theta_2)\lambda_1(x)+\theta_2\lambda_2(x)]\,\xi} \leqslant$$
$$\leqslant \Big[|\lambda_1(x)|\,\xi + 1\Big]\, e^{\lambda_2(x)\,\xi} \leqslant [\kappa\,\xi + 1]\, e^{-\varkappa\,\xi},$$

где θ_i — некоторые числа (вообще говоря, свои для каждых ξ и x), про которые известно только то, что они лежат на интервале $(0,1)$.

Теперь рассмотрим такие x, при которых $\lambda_{1,2}(x) \notin \mathbb{R}$, а значит, $\lambda_{1,2}(x) = p(x) \mp q(x)\,i$, где i — мнимая единица. Вновь используя явное выражение для $\Phi(x;\xi)$, а также формулу Эйлера для комплексной экспоненты, получаем:

$$|\Phi(\xi;x)| = \frac{\big|\sin[q(x)\,\xi]\big|}{q(x)}\, e^{p(x)\,\xi} \leqslant \xi\, e^{p(x)\,\xi} \leqslant \xi\, e^{-\varkappa\,\xi},$$
$$|K_\xi(\xi;x)| = \frac{\big|p(x)\,\sin[q(x)\,\xi] + q(x)\,\cos[q(x)\,\xi]\big|}{q(x)}\, e^{p(x)\,\xi} \leqslant$$
$$\leqslant \Big[|p(x)|\,\xi + 1\Big]\, e^{p(x)\,\xi} \leqslant [\kappa\,\xi + 1]\, e^{-\varkappa\,\xi}$$

(здесь мы учли, что в данном случае $\operatorname{Re}\lambda_1(x) = \operatorname{Re}\lambda_2(x) =: p(x)$).

□

Замечание 4. Данная лемма может быть доказана и без использования явного выражения для функции $\Phi(\cdot;x)$.

Следствие 1 *При всех $(\xi,x) \in [0,+\infty)\times[0,X]$ справедливо:*

$$|\Phi(\xi;x)|,\ |K_\xi(\xi;x)| \leqslant [\kappa\,\xi + 1]\, e^{-\varkappa\,\xi}, \tag{57}$$

где

$$\varkappa := -\max_{[0,X]} \operatorname{Re}\lambda_2(x), \qquad \kappa := \max\{-\min_{[0,X]} \operatorname{Re}\lambda_1(x), 1\}.$$

Пусть $\forall C \geqslant 0$

$$O(C,\varepsilon) := \left\{\varphi \in C_2[0, X/\varepsilon] \mid \forall \xi \in [0, X/\varepsilon]\ \varphi(\xi) \in [-C, +C]^2\right\}$$

— замкнутая C-окрестность вектор-функции $\varphi : \xi \mapsto (0,0)$ в пространстве $C_2[0,X/\varepsilon]$, $\hat{A}(C,\varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ на $O(C,\varepsilon)$.

Теорема 3 *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $C_0 \geqslant 0$, что $\hat{A}(C_0,\varepsilon) : O(C_0,\varepsilon) \to O(C_0,\varepsilon)$ при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $C_0 \geqslant 0$, подействуем операторами $\hat{A}_z(\varepsilon)$ и $\hat{A}_v(\varepsilon)$ (компонентами $\hat{A}(\varepsilon)$) на произвольную вектор-функцию $\varphi : \xi \mapsto (z(\xi), v(\xi))$ из $O(C_0, \varepsilon)$ и, учитывая (57), оценим получившийся результат:

$$\left|\hat{A}_{z,v}(\varepsilon)(\varphi)(\xi)\right| \leqslant e^{-\varkappa\xi}\Big\{C_0\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\zeta}\left[\kappa\,(\xi-\zeta)+1\right]\left[|a_1(\varepsilon\,\zeta)-a_1(\varepsilon\,\xi)|+\right.$$
$$\left.+\,|a_0(\varepsilon\,\zeta)-a_0(\varepsilon\,\xi)|\right]d\zeta+\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\zeta}\left[\kappa\,(\xi-\zeta)+1\right]\left|f(\zeta;\varepsilon)\right|d\zeta\Big\}. \tag{58}$$

Для первого интеграла из (58) имеем:

$$\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\zeta}\left[\kappa\,(\xi-\zeta)+1\right]\left[|a_1(\varepsilon\,\zeta)-a_1(\varepsilon\,\xi)|+|a_0(\varepsilon\,\zeta)-a_0(\varepsilon\,\xi)|\right]d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\left\{\|a_1'\|+\|a_0'\|\right\}\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\zeta}\left[\kappa\,(\xi-\zeta)^2+(\xi-\zeta)\right]d\zeta=$$
$$=\varepsilon\,\alpha\left\{\tfrac{2\kappa}{\varkappa^3}\left[e^{\varkappa\xi}-1-\varkappa\xi-\tfrac{1}{2}\,(\varkappa\xi)^2\right]+\tfrac{1}{\varkappa^2}\left[e^{\varkappa\xi}-1-\varkappa\xi\right]\right\}\leqslant\varepsilon\,\beta\,e^{\varkappa\xi}, \tag{59}$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[0,X]$, $\alpha := \|a_1'\|+\|a_0'\|$, $\beta := \alpha\,\frac{2\kappa+\varkappa}{\varkappa^3}$.

Для второго интеграла из (58) имеем (см. (49) и (45)):

$$\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\zeta}\left[\kappa\,(\xi-\zeta)+1\right]\left|f(\zeta;\varepsilon)\right|d\zeta\leqslant\tilde{C}\left\{\|a_1'\|+\|a_0'\|\right\}\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\zeta}\left[\kappa\,(\xi-\zeta)+1\right]\times$$
$$\times\,(\zeta^2+\zeta)\,e^{\operatorname{Re}\lambda_2(0)\,\zeta}\,d\zeta\leqslant\tilde{C}\,\alpha\max_{\zeta>0}\left[(\zeta^2+\zeta)\,e^{\operatorname{Re}\lambda_2(0)\,\zeta}\right]\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\zeta}\left[\kappa\,(\xi-\zeta)+1\right]d\zeta=$$
$$=\tilde{C}\,\alpha\max_{\zeta>0}\left[(\zeta^2+\zeta)\,e^{\operatorname{Re}\lambda_2(0)\,\zeta}\right]\left\{\tfrac{\kappa}{\varkappa^2}\left[e^{\varkappa\xi}-1-\varkappa\xi\right]+\tfrac{1}{\varkappa}\left[e^{\varkappa\xi}-1\right]\right\}\leqslant\gamma\,e^{\varkappa\xi}, \tag{60}$$

где

$$\gamma:=\tilde{C}\,\alpha\max_{\zeta>0}\left[(\zeta^2+\zeta)\,e^{\operatorname{Re}\lambda_2(0)\,\zeta}\right]\tfrac{\kappa+\varkappa}{\varkappa^2}.$$

Из (58), (59) и (60) видно, что если C_0 и ε удовлетворяют неравенствам:

$$0\leqslant C_0\,\varepsilon\,\beta+\gamma\leqslant C_0, \tag{61}$$

то $\hat{A}(C_0,\varepsilon)(\varphi)(\xi) := \hat{A}(\varepsilon)(\varphi)(\xi) = (\hat{A}_z(\varepsilon)(\varphi)(\xi), \hat{A}_v(\varepsilon)(\varphi)(\xi)) \in O(C_0,\varepsilon)$, и следовательно, $\hat{A}(C_0,\varepsilon) : O(C_0,\varepsilon) \to O(C_0,\varepsilon)$.

Положим

$$\varepsilon_0 := \gamma_0\, \beta^{-1}, \tag{62}$$

где γ_0 — любое число из интервала $(0,1)$ (если $\beta = 0$, то есть если $a_i = \mathrm{const}$ на $[0, X]$, то $\varepsilon_0 := +\infty$), $C_0 := \gamma/(1-\gamma_0)$. Тогда неравенства (61) выполняются при всяком $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

□

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ и любых $\varphi_1 : \xi \mapsto (z_1(\xi), v_1(\xi))$ и $\varphi_2 : \xi \mapsto (z_2(\xi), v_2(\xi))$ из $C_2[0, X/\varepsilon]$ определено расстояние ρ_ε между φ_1 и φ_2:

$$\rho_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) := \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{C_2[0,X/\varepsilon]} := \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max \big\{ |z_2(\xi) - z_1(\xi)|,\, |v_2(\xi) - v_1(\xi)| \big\}, \tag{63}$$

где $X(\varepsilon) := [0, X/\varepsilon]$. Заметим, что $C_2[0, X/\varepsilon]$ и $O(C, \varepsilon)$ с так определённым ρ_ε представляют собой полные метрические пространства.

Теорема 4 $\hat{A}(\varepsilon)$ *— сжимающий оператор при каждом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доказательство. Пусть ρ_ε — метрика (63) пространства $C_2[0, X/\varepsilon]$. Выберем две произвольные функции $\varphi_1 : \xi \mapsto (z_1(\xi), v_1(\xi))$ и $\varphi_2 : \xi \mapsto (z_2(\xi), v_2(\xi))$ из этого пространства и, учитывая (57), оценим расстояние между $\hat{A}(\varepsilon)(\varphi_1)$ и $\hat{A}(\varepsilon)(\varphi_2)$:

$$\rho_\varepsilon(\hat{A}(\varepsilon)(\varphi_1), \hat{A}(\varepsilon)(\varphi_2)) = \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max \Big\{ \big|\hat{A}_z(\varepsilon)(\varphi_2)(\xi) - \hat{A}_z(\varepsilon)(\varphi_1)(\xi)\big|,$$

$$\big|\hat{A}_v(\varepsilon)(\varphi_2)(\xi) - \hat{A}_v(\varepsilon)(\varphi_1)(\xi)\big| \Big\} = \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max \Big\{ \Big| \int_0^\xi \Phi(\xi - \zeta;\, \varepsilon\, \xi) \times$$

$$\times \big\{ [a_1(\varepsilon\, \zeta) - a_1(\varepsilon\, \xi)]\, [v_2(\zeta) - v_1(\zeta)] + [a_0(\varepsilon\, \zeta) - a_0(\varepsilon\, \xi)]\, [z_2(\zeta) - z_1(\zeta)] \big\}\, d\zeta \Big|,$$

$$\Big| \int_0^\xi \Phi'(\xi - \zeta;\, \varepsilon\, \xi) \big\{ \dots \big\}\, d\zeta \Big| \Big\} \leqslant \rho_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \int_0^\xi e^{\varkappa\, (\zeta - \xi)} \times$$

$$\times \big[\kappa\, (\xi - \zeta) + 1\big]\, \big[|a_1(\varepsilon\, \zeta) - a_1(\varepsilon\, \xi)| + |a_0(\varepsilon\, \zeta) - a_0(\varepsilon\, \xi)| \big]\, d\zeta. \tag{64}$$

Из (64), (59) и (62) вытекает, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для коэффициента сжатия $k(\varepsilon)$ оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ справедливо:

$$k(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\, \beta = \gamma_0\, \varepsilon/\varepsilon_0 \leqslant \gamma_0 < 1. \tag{65}$$

□

Заметим, что поскольку коэффициент сжатия $k(C_0, \varepsilon)$ оператора $\hat{A}(C_0, \varepsilon)$ заведомо не превосходит $k(\varepsilon)$, то оценка (65) справедлива и для него:

$$k(C_0, \varepsilon) \leqslant \gamma_0 \, \varepsilon/\varepsilon_0 \leqslant \gamma_0 < 1. \tag{66}$$

Таким образом, к оператору $\hat{A}(C_0, \varepsilon)$ применима теорема Банаха о неподвижной точке, в силу которой при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение

$$\varphi(\xi, \varepsilon) = \hat{A}(C_0, \varepsilon)(\varphi(\cdot; \varepsilon))(\xi), \quad \xi \in [0, X/\varepsilon]$$

имеет единственное решение $\varphi(\cdot; \varepsilon)$. При этом $\varphi(\cdot; \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(\xi, \varepsilon) = \hat{A}(\varepsilon)(\varphi(\cdot; \varepsilon))(\xi), \quad \xi \in [0, X/\varepsilon] \tag{67}$$

и принадлежит $O(C_0, \varepsilon)$. Но поскольку уравнение (67) в силу его линейности имеет единственное решение во всём классе $C_2[0, X/\varepsilon]$, а решение $z(\cdot; \varepsilon)$ задачи (47)–(48) удовлетворяет уравнению (56), то $\varphi(\cdot; \varepsilon)$, очевидно, совпадает с вектор-функцией $\xi \mapsto (z(\xi; \varepsilon), z'(\xi; \varepsilon))$.

Свойство сжимаемости оператора $\hat{A}(C_0, \varepsilon)$ также позволяет построить итерационную последовательность функций $\varphi_n(\cdot; \varepsilon) : \xi \to (z_n(\xi; \varepsilon), v_n(\xi; \varepsilon))$, сходящуюся по норме пространства $C_2[0, X/\varepsilon]$ к точному решению $\varphi(\cdot; \varepsilon) : \xi \mapsto (z(\xi; \varepsilon), z'(\xi; \varepsilon))$ уравнения (67) равномерно по всем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\|\varphi(\cdot; \varepsilon) - \varphi_n(\cdot; \varepsilon)\|_{C_2[0, X/\varepsilon]} :=$$
$$= \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max\left\{|z(\xi; \varepsilon) - z_n(\xi; \varepsilon)|,\, |z'(\xi; \varepsilon) - v_n(\xi; \varepsilon)|\right\} \rightrightarrows 0, \quad n \to \infty.$$

Положим $\varphi_0(\xi; \varepsilon) := (0, 0)$ при $\xi \in [0, X/\varepsilon]$. Поскольку $\varphi(\cdot; \varepsilon) \in O(C_0, \varepsilon)$, то

$$\|\varphi(\cdot; \varepsilon) - \varphi_0(\cdot; \varepsilon)\|_{C_2[0, X/\varepsilon]} = \|\varphi(\cdot; \varepsilon)\|_{C_2[0, X/\varepsilon]} \leqslant C_0 \tag{68}$$

при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Далее, для любого натурального n положим

$$\varphi_n(\xi; \varepsilon) := \hat{A}(C_0, \varepsilon)(\varphi_{n-1}(\cdot; \varepsilon))(\xi) = \hat{A}(\varepsilon)(\varphi_{n-1}(\cdot; \varepsilon))(\xi), \quad \xi[0, X/\varepsilon]. \tag{69}$$

Тогда, учитывая (66) и (68), для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ и каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеем:

$$\|\varphi(\cdot; \varepsilon) - \varphi_n(\cdot; \varepsilon)\|_{C_2[0, X/\varepsilon]} \leqslant k(C_0, \varepsilon)^n \, \|\varphi(\cdot; \varepsilon) - \varphi_0(\cdot; \varepsilon)\|_{C_2[0, X/\varepsilon]} \leqslant C_0 \, (\gamma_0 \, \varepsilon/\varepsilon_0)^n. \tag{70}$$

Вернёмся к задаче (39)–(40). Вспоминая про (46), приходим к асимптотическим последовательностям $\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{u_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ соответственно для решения $y(\cdot;\varepsilon)$ исходной задачи и его первой производной $y'(\cdot;\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} y_n(x;\varepsilon) &:= \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, z_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon), \\ u_n(x;\varepsilon) &:= \varepsilon^{-1}\, \tilde{y}'(x/\varepsilon) + v_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon), \quad (x,n) \in [0,X] \times \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{71}$$

При $n \geqslant 1$ элементы $y_n(\cdot;\varepsilon)$ и $u_n(\cdot;\varepsilon)$ могут быть выражены непосредственно через $y_{n-1}(\cdot;\varepsilon)$ и $u_{n-1}(\cdot;\varepsilon)$:

$$\begin{gathered} y_n(x;\varepsilon) = \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, \hat{A}_z(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon), v_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x/\varepsilon) = \\ = \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, \hat{A}_z(\varepsilon)(\hat{Z}(\varepsilon)(y_{n-1}(\cdot;\varepsilon)), \hat{V}(\varepsilon)(u_{n-1}(\cdot;\varepsilon)))(x/\varepsilon) = \\ =: \hat{B}_y(\varepsilon)(y_{n-1}(\cdot;\varepsilon), u_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x), \quad x \in [0,X]; \\ u_n(x;\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\, \tilde{y}'(x/\varepsilon) + \varepsilon\, \hat{A}_v(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon), v_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x/\varepsilon) = \\ = \varepsilon^{-1}\, \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, \hat{A}_v(\varepsilon)(\hat{Z}(\varepsilon)(y_{n-1}(\cdot;\varepsilon)), \hat{V}(\varepsilon)(u_{n-1}(\cdot;\varepsilon)))(x/\varepsilon) = \\ =: \hat{B}_u(\varepsilon)(y_{n-1}(\cdot;\varepsilon), u_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x), \quad x \in [0,X], \end{gathered}$$

где

$$\hat{Z}(\varepsilon)(y) : \xi \mapsto \varepsilon^{-1}\,[y(\varepsilon\,\xi) - \tilde{y}(\xi)],\ \hat{V}(\varepsilon)(u) : \xi \mapsto u(\varepsilon\,\xi) - \varepsilon^{-1}\,\tilde{y}'(\xi),\ \xi \in [0, X/\varepsilon]$$

(см. (71) и (69)), или кратко:

$$\begin{gathered} \psi_n(x;\varepsilon) := \hat{B}(\varepsilon)(\psi_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x) := \\ = \big(\hat{B}_y(\varepsilon)(\psi_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x),\, \hat{B}_u(\varepsilon)(\psi_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x)\big), \quad x \in [0,X], \end{gathered}$$

где $\psi_n(\cdot;\varepsilon) : x \to (y_n(x;\varepsilon), u_n(x;\varepsilon))$. Отметим, что оператор $\hat{B}(\varepsilon)$ является сжимающим при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ (то есть при тех же ε, что и $\hat{A}(\varepsilon)$), и что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ для оператора $\hat{B}(\varepsilon)$ будет справедливо:

$$\hat{B}(C_0,\varepsilon) : \tilde{O}(C_0,\varepsilon) \to \tilde{O}(C_0,\varepsilon),$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{O}(C_0,\varepsilon) := \big\{\psi \in C_2[0,X] \mid \forall x \in [0,X]\ \psi(x) \in [\tilde{y}(x/\varepsilon) - \varepsilon\, C_0,\, \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon\, C_0] \times \\ \times [\varepsilon^{-1}\,\tilde{y}'(x/\varepsilon) - C_0,\, \varepsilon^{-1}\,\tilde{y}'(x/\varepsilon) + C_0]\big\} \end{gathered}$$

— замкнутая $(\varepsilon\, C_0,\, C_0)$-окрестность функции $x \mapsto (\tilde{y}(x/\varepsilon),\, \varepsilon^{-1}\,\tilde{y}'(x/\varepsilon))$ в пространстве $C_2[0,X]$, $\hat{B}(C_0,\varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{B}(\varepsilon)$ на $\tilde{O}(C_0,\varepsilon)$.

Оценим точность, с которой $y_n(\cdot;\varepsilon)$ и $u_n(\cdot;\varepsilon)$ приближают соответственно $y(\cdot;\varepsilon)$ и $y'(\cdot;\varepsilon)$. Для каждых $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $x \in [0,X]$ имеем (см. (71), (46) и (70)):

$$|y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon)| = |y(x;\varepsilon) - \tilde{y}(x/\varepsilon) - \varepsilon\, z_n(x/\varepsilon;\,\varepsilon)| =$$
$$= \varepsilon\,|z(x/\varepsilon;\,\varepsilon) - z_n(x/\varepsilon;\,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(\cdot;\varepsilon) - \varphi_n(\cdot;\varepsilon)\|_{C_2[0,X]} \leqslant C_0\,\varepsilon\,(\gamma_0\,\varepsilon/\varepsilon_0)^n, \tag{72}$$

$$|y'(x;\varepsilon) - u_n(x;\varepsilon)| = |y'(x;\varepsilon) - \varepsilon^{-1}\,\tilde{y}'(x/\varepsilon) - v_n(x/\varepsilon;\,\varepsilon)| =$$
$$= |z'(x/\varepsilon;\,\varepsilon) - v_n(x/\varepsilon;\,\varepsilon)| \leqslant \|\varphi(x/\varepsilon;\varepsilon) - \varphi_n(x/\varepsilon;\varepsilon)\|_{C_2[0,X]} \leqslant C_0\,(\gamma_0\,\varepsilon/\varepsilon_0)^n. \tag{73}$$

Замечание 5. Для решения $y(\cdot;\varepsilon)$ задачи (1)–(2) может быть доказано (например, с помощью метода функций Ляпунова) существование $\tilde{C}_0 \geqslant 0$ и $c > 0$ (выражающихся через нормы функций a_0 и a_1), таких что

$$|y(x;\varepsilon)| + |\varepsilon\, y'(x;\varepsilon)| \leqslant \tilde{C}_0\, e^{-c\,x/\varepsilon}, \quad x \in [0,X]. \tag{74}$$

Кроме того, можно доказать, что C_0 из (72) и (73) удовлетворяет неравенству

$$C_0 \leqslant C_1\,(|y^0| + |y^1|) = C_1\,(|y(0;\varepsilon)| + |\varepsilon\, y'(0;\varepsilon)|) \tag{75}$$

при некотором $C_1 \geqslant 0$ (также выражающемся через нормы a_0 и a_1). Пусть $x_0 \in [0,X]$. Рассматривая $y(x_0;\varepsilon)$ и $y'(x_0;\varepsilon)$ как начальные значения задачи Коши для уравнения (39) на отрезке $[x_0,X]$ и заменяя в (75) сумму $|y(0;\varepsilon)| + |y'(0;\varepsilon)|$ на $|y(x_0;\varepsilon)| + |y'(x_0;\varepsilon)|$, для каждых $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $x \in [x_0,X]$ с учётом (74) получаем более точный (по сравнению с (72) и (73)) результат:

$$\|y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon)\|_{C[x_0,X]} \leqslant e^{-c\,x_0/\varepsilon}\,\tilde{C}_0\,C_1\,\varepsilon\,(\gamma_0\,\varepsilon/\varepsilon_0)^n,$$
$$\|y'(x;\varepsilon) - u_n(x;\varepsilon)\|_{C[x_0,X]} \leqslant e^{-c\,x_0/\varepsilon}\,\tilde{C}_0\,C_1\,(\gamma_0\,\varepsilon/\varepsilon_0)^n.$$

В заключение заметим, что всё, сказанное в конце предыдущего раздела о связи между методом асимптотических итераций и методом пограничных функций, а также о преимуществах и недостатках этих методов, остаётся в силе и в отношении задачи (39)–(40).

Литература

[1] Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. Курс высшей математики и мат. физики. — 3-е изд. — М. : Наука. Физматлит, 1998.

[2] Барашков А. С., Борхаленко В. А. Границы применимости итерационно-асимптотического метода решения обратных задач для периодических структур // Вестник МЭИ. — 2013. — № 6. — С. 141–146.

[3] Копачевский Н. Д., Смолич В. П. Введение в асимптотические методы: Специальный курс лекций. — Симферополь : ТНУ, 2009.

[4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973.

[5] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений: Науч.-теор. пособие. Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики. — М. : Высш. шк., 1990.

[6] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

[7] Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М. : Издательство Московского университета, 2011.

[8] Боглаев Ю. П. Итерационный метод приближенного решения сингулярно возмущенных задач // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 227, № 5. — С. 1009–1022.

[9] Боглаев Ю. П., Жданов А. В., Стельмах В. Г. Равномерные приближения к решениям некоторых сингулярно возмущенных нелинейных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 3. — С. 395–406.