ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№2 , 2016
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных и сложных системах

УДК 517.9+51.74

ТРИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ИЗ СИНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

А.В. Братищев

Донской государственный технический университет

Аннотация

В синергетической теории управления для заданных динамической системы и многообразия в фазовом пространстве разработан метод построения регулятора, для которого это многообразие будет инвариантным и притягивающим в целом. В статье получен критерий асимптотической устойчивости положений равновесия такого регулятора. На примере автономной системы третьего порядка проведено сравнение методов параллельного и последовательного введения притягивающих многообразий при синтезе регулятора. Обсуждается задача о допустимых положениях равновесия синтезируемого регулятора.

ключевые слова: динамическая система, автономная система, агрегированная переменная, аддитивное управление, положение равновесия, синергетический регулятор.

Abstract

In the synergetic control theory for a given dynamic system and a manifold in the phase space there is the method of constructing the regulator for which this manifold will be invariant and attracting as a whole. In the article the criterion of the asymptotic stability of the equilibrium states of this regulator is obtained. We compare methods of parallel and sequential introduction of the attracting manifolds on the example of a third order autonomous system. The task about permissible equilibrium states of the synthesized regulator is discussed.

keywords: dynamical system, autonomous system, aggregated variable, additive control, equilibrium, synergetic controller.

Введение

Напомним постановку задачи синергетической теории управления [1] в рамках, обусловленных данной работой. Имеется динамическая система, задаваемая автономной системой n-ого порядка. Требуется с помощью подходящего аддитивного управления скоростями изменения каких-либо m фазовых переменных ($m < n$) заставить все траектории стягиваться к наперед заданному (n-m)-мерному инвариантному многообразию. Стягивание понимается не в смысле асимптотической устойчивости в целом этого многообразия [2], а в том смысле, что функции, задающие это многообразие (и называемые агрегированными переменными), стремятся к нулю на каждой траектории при $t \to +\infty$. Такое коллективное поведение фазовых переменных объясняет употребление слова «синергетические», то есть «вместе действующие». Искомые управления зависят только от фазовых координат. Инвариантное многообразие задается заранее, исходя из требований к качественным свойствам синтезируемых систем управления.

Многочисленные и эффективные приложения синергетической теории управления [1], [3]-[6] делают целесообразным присмотреться к разработанному и используемому в ней математическому аппарату. В статье проанализированы некоторые из задач теории на содержательном примере систем третьего порядка.
Так, как отмечено в [7], «во многих задачах конечная цель управления состоит в попадании изображающей точки в начало координат. Следовательно, возникает задача об асимптотической устойчивости движения вдоль многообразия к началу координат». Это значит, что стягиваясь к инвариантному многообразию, траектории должны одновременно приближаться к лежащему на этом многообразии положению равновесия регулятора. В первом пункте мы решаем задачу проверки на устойчивость такого положения равновесия для случая параллельного (векторного) введения притягивающих многообразий.

Синтез системы управления (синергетического регулятора) в теории осуществляется параллельным (одновременным) или последовательным введением притягивающих многообразий. Возникает вопрос, будут ли при этом идентичны синтезируемые регуляторы. Если да, то установленный в предыдущем пункте критерий будет годным и для второго способа. Этот вопрос обсуждается во втором пункте статьи.

Поскольку n-m уравнений исходной динамической системы войдут составной частью в систему уравнений проектируемого регулятора, положения равновесия последнего обязаны лежать на множестве (не обязательно являющемся многообразием), определяемом правыми частями этих уравнений. Всякая ли точка этого множества может быть положением равновесия регулятора при подходящем выборе агрегированных переменных? После ответа на этот вопрос представляет интерес следующий: можно ли установить аналитическую зависимость между допустимыми положениями равновесия и агрегированными переменными? Эти вопросы обсуждаются в третьем пункте.

Постановка и частичное решение задачи, рассмотренной в первом пункте, впервые были доложены на конференции [8]. Допущенная там неточность исправлена в [9]. Результаты настоящей статьи доложены на конференции [10].

1. Критерий устойчивости положения равновесия синергетического регулятора

Пусть закон изменения состояний динамической системы описывается автономной системой третьего порядка

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3' = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}. \qquad (1)$$

Поставим задачу нахождения аддитивного управления скоростями изменения двух фазовых координат, при котором наперед данное одномерное дифференцируемое многообразие [11]

$$\Gamma_{12} := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \psi_1(x_1, x_2, x_3) = 0,\ \psi_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \right\}$$

будет инвариантным и притягивающим в целом для траекторий синтезируемого регулятора. В том смысле, что для каждой его траектории

$$\lim_{t+\infty} \psi_1\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right) = \lim_{t+\infty} \psi_2\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right) = 0. \qquad (2)$$

Положения равновесия (x_1^0, x_2^0, x_3^0) такого регулятора необходимо лежат на Γ_{12} и потому $rangD_\Psi := rang\begin{pmatrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{3x_3} \end{pmatrix} = 2$ в этих точках. Считаем для определенности $\Delta_{12}\big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} := \begin{vmatrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} \end{vmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} \neq 0$. В этом случае будем осуществлять аддитивное управление скоростями первых двух фазовых переменных, а значит третье уравнение системы (1) является одним из уравнений синтезируемого регулятора.

Условие (2) выполняется, например, в случае, если функции ψ_1, ψ_2 на траекториях искомой системы удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\psi'_{1t} = g_1(\psi_1),\ \psi'_{2t} = g_2(\psi_2),\ g_1(0) = g_2(0) = 0,$$

и нулевые положения равновесия этих уравнений устойчивы в целом [3].
Развернем уравнения в систему

$$\begin{cases} \psi'_{1x_1} x'_1 + \psi'_{1x_2} x'_2 + \psi'_{1x_3} f_3 = g_1(\psi_1) \\ \psi'_{2x_1} x'_1 + \psi'_{2x_2} x'_2 + \psi'_{2x_3} f_3 = g_2(\psi_2) \end{cases},$$

и разрешая ее относительно x'_1, x'_2, получаем уравнение синергетического регулятора

$$\begin{cases} x'_1 = \dfrac{1}{\Delta_{12}}\left(\Delta_{23} f_3 + \psi'_{2x_2} g_1(\psi_1) - \psi'_{1x_2} g_2(\psi_2)\right) \\ x'_2 = \dfrac{1}{\Delta_{12}}\left(\Delta_{31} f_3 - \psi'_{2x_1} g_1(\psi_1) + \psi'_{1x_1} g_2(\psi_2)\right), \\ x'_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \qquad (3)$$

где $\Delta_{ij} := \psi'_{1x_i}\psi'_{2x_j} - \psi'_{1x_j}\psi'_{2x_i}$. Из него следует, что положение равновесия (x_1^0, x_2^0, x_3^0) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \psi_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}.$$

ТЕОРЕМА Положение равновесия регулятора (3) асимптотически устойчиво, если

$$g'_{1\psi_1}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} < 0, \quad g'_{2\psi_2}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} < 0, \quad \frac{1}{\Delta_{12}}\left\|\begin{matrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ f'_{3x_1} & f'_{3x_2} & f'_{3x_3} \end{matrix}\right\|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} < 0$$

и неустойчиво, если хотя бы одно из неравенств противоположное. В случае нестрогих неравенств нужны дополнительные исследования.

Доказательство. Вычислим характеристический многочлен матрицы Якоби $A := \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}$ правой части регулятора (3) в точке (x_1^0, x_2^0, x_3^0). $\det(\lambda E - A) =$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} f'_{3x_1} - \frac{\psi'_{2x_2}}{\Delta_{12}} g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_1} + \frac{\psi'_{1x_2}}{\Delta_{12}} g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_1} & -\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} f'_{3x_2} - \frac{\psi'_{2x_2}}{\Delta_{12}} g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_2} + \frac{\psi'_{1x_2}}{\Delta_{12}} g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_2} & -\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} f'_{3x_3} - \frac{\psi'_{2x_2}}{\Delta_{12}} g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_3} + \frac{\psi'_{1x_2}}{\Delta_{12}} g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_3} \\ -\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}} f'_{3x_1} + \frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}} g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_1} - \frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}} g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_1} & \lambda - \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}} f'_{3x_2} + \frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}} g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_2} - \frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}} g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_2} & -\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}} f'_{3x_3} + \frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}} g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_3} - \frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}} g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_3} \\ -f'_{3x_1} & -f'_{3x_2} & \lambda - f'_{3x_3} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-\frac{\psi'_{2x_2}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_1}+\frac{\psi'_{1x_2}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_1} & -\frac{\psi'_{2x_2}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_2}+\frac{\psi'_{1x_2}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_2} & -\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}}\lambda-\frac{\psi'_{2x_2}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_3}+\frac{\psi'_{1x_2}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_3} \\ \frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_1}-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_1} & \lambda+\frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_2}-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_2} & -\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}\lambda+\frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_3}-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_3} \\ -f'_{3x_1} & -f'_{3x_2} & \lambda-f'_{3x_3} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\psi'_{1x_1}}\begin{vmatrix} \psi'_{1x_1}\lambda-g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2}\lambda-g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3}\lambda-g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_3} \\ \frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_1}-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_1} & \lambda+\frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_2}-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_2} & -\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}\lambda+\frac{\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}}g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_3}-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_3} \\ -f'_{3x_1} & -f'_{3x_2} & \lambda-f'_{3x_3} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\psi'_{1x_1}}\begin{vmatrix} \psi'_{1x_1}\lambda-g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2}\lambda-g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3}\lambda-g'_{1\psi_1}\psi'_{1x_3} \\ \frac{\psi'_{1x_1}\psi'_{2x_1}}{\Delta_{12}}\lambda-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_1} & \frac{\psi'_{1x_1}\psi'_{2x_2}}{\Delta_{12}}\lambda-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_2} & \frac{\psi'_{1x_1}\psi'_{2x_3}}{\Delta_{12}}\lambda-\frac{\psi'_{1x_1}}{\Delta_{12}}g'_{2\psi_2}\psi'_{2x_3} \\ -f'_{3x_1} & -f'_{3x_2} & \lambda-f'_{3x_3} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta_{12}}\left(\lambda-g'_{1\psi_1}\right)\left(\lambda-g'_{2\psi_2}\right)\begin{vmatrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ -f'_{3x_1} & -f'_{3x_2} & \lambda-f'_{3x_3} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\lambda-g'_{1\psi_1}\Big|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}\right)\left(\lambda-g'_{2\psi_2}\Big|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\Delta_{12}}\begin{vmatrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ f'_{3x_1} & f'_{3x_2} & f'_{3x_3} \end{vmatrix}\Bigg|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}\right).$$

Остается воспользоваться теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Пусть точка (x_1^0,x_2^0,x_3^0) лежит на многообразии

$$\Gamma_{13}:=\left\{(x_1,x_2,x_3):\psi_1(x_1,x_2,x_3)=0,\ \psi_3(x_1,x_2,x_3)=0\right\},$$

и $\Delta_{13}\big|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}=\begin{vmatrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_3} \\ \psi'_{3x_1} & \psi'_{3x_3} \end{vmatrix}\Bigg|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}\neq 0$. Будем осуществлять аддитивное управление скоростями первой и третьей фазовых координат, а потому второе уравнение системы (1) будет одним из уравнений регулятора. Потребуем, чтобы функции ψ_1,ψ_3 на траекториях искомого регулятора удовлетворяли дифференциальным уравнениям вида

$$\psi'_{1t}=g_1(\psi_1),\ \psi'_{3t}=g_3(\psi_3),\ g_1(0)=g_3(0)=0,$$

и нулевые положения равновесия этих уравнений были устойчивы в целом. По аналогии с выше изложенным уравнение регулятора примет вид

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{\Delta_{13}}\left(\Delta_{32} f_2 + \psi'_{3x_3} g_1(\psi_1) - \psi'_{1x_3} g_3(\psi_3)\right) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3' = \dfrac{1}{\Delta_{13}}\left(\Delta_{21} f_2 - \psi'_{3x_1} g_1(\psi_1) + \psi'_{1x_1} g_3(\psi_3)\right) \end{cases}. \quad (4)$$

Из него следует, что положение равновесия (x_1^0, x_2^0, x_3^0) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \psi_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}.$$

Аналогично доказывается, что положение равновесия (x_1^0, x_2^0, x_3^0) регулятора (4) асимптотически устойчиво, если

$$g'_{1\psi_1}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} < 0, \quad g'_{3\psi_3}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} < 0, \quad \frac{1}{\Delta_{13}}\begin{vmatrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3} \\ f'_{2x_1} & f'_{2x_2} & f'_{2x_3} \\ \psi'_{3x_1} & \psi'_{3x_2} & \psi'_{3x_3} \end{vmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} < 0$$

и неустойчиво, если хотя бы одно из неравенств противоположное.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Пусть точка (x_1^0, x_2^0, x_3^0) лежит на многообразии

$$\Gamma_{23} := \left\{(x_1, x_2, x_3):\ \psi_2(x_1, x_2, x_3) = 0,\ \psi_3(x_1, x_2, x_3) = 0\right\},$$

и $\Delta_{23}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} = \begin{vmatrix} \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ \psi'_{3x_2} & \psi'_{3x_3} \end{vmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} \neq 0$. Будем осуществлять аддитивное управления скоростями последних двух фазовых координат, а потому первое уравнение системы (1) будет одним из уравнений регулятора. Потребуем, чтобы функции ψ_2, ψ_3 на траекториях искомого регулятора удовлетворяли дифференциальным уравнениям вида

$$\psi'_{2t} = g_2(\psi_2),\ \psi'_{3t} = g_3(\psi_3),\ g_2(0) = g_3(0) = 0,$$

и нулевые положения равновесия этих уравнений были устойчивы в целом.

Уравнение синергетического регулятора примет вид

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2' = \dfrac{1}{\Delta_{23}}\left(\Delta_{31} f_1 + \psi'_{3x_3} g_2(\psi_2) - \psi'_{2x_3} g_3(\psi_3)\right) \\ x_3' = \dfrac{1}{\Delta_{23}}\left(\Delta_{12} f_1 - \psi'_{3x_2} g_2(\psi_2) + \psi'_{2x_2} g_3(\psi_3)\right) \end{cases}. \quad (5)$$

Из него следует, что положение равновесия (x_1^0, x_2^0, x_3^0) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3)=0 \\ \psi_2(x_1,x_2,x_3)=0. \\ \psi_3(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что положение равновесия (x_1^0, x_2^0, x_3^0) регулятора (5) асимптотически устойчиво, если

$$g'_{2\psi_2}\Big|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}<0,\quad g'_{3\psi_3}\Big|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}<0,\quad \frac{1}{\Delta_{23}}\left\|\begin{matrix} f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & f'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ \psi'_{3x_1} & \psi'_{3x_2} & \psi'_{3x_3} \end{matrix}\right\|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}<0$$

и неустойчиво, если хотя бы одно из неравенств противоположное.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Метод доказательства обобщается на автономные системы произвольной размерности и с различным количеством агрегированных переменных ψ_i.

В статье [13] векторный регулятор системы

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 + ax_2 \\ x_3' = bx_1 - cx_3 + x_1x_3 \end{cases} \tag{6}$$

строится с помощью агрегированных переменных $\psi_2 = \alpha x_1 + x_2$. $\psi_3 = -\beta x_1^3 + x_3$. Несложно проверить, что он всегда имеет положение равновесия $S_1 = (0,0,0)$ и еще два ненулевых положения равновесия $S_{2,3} = \left(\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \mp\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \pm\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$, если $\alpha\beta > 0$. Автор ставит задачу анализа перестройки фазового портрета регулятора, когда параметры преодолевают ноль. Наш подход к ее решению с применением теоремы дает такой согласованный с [13] результат:

1) если $\alpha < 0$, то положение равновесия устойчивое, причем оно единственное, если $\beta > 0$, и положения равновесия $S_{2,3}$ неустойчивы, если $\beta < 0$;

2) если $\alpha > 0$, то S_1 неустойчивое, причем оно единственное, если $\beta < 0$, и положения равновесия $S_{2,3}$ устойчивы, если $\beta > 0$.

Отсюда легко просматриваются четыре логически возможных типа перестройки фазового портрета. Верификация этого результата проведена с помощью вычислительного эксперимента на S-модели соответствующего регулятора в пакете SIMULINK [14].

2. Сравнение методов параллельного и последовательного введения притягивающих многообразий

Синтез синергетического регулятора (метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов [1]) осуществляется параллельным или последовательным введением притягивающих многообразий, но построение регулятора в последнем случае выглядит более сложным. Сравним эти методы на примере специального вида автономной системы третьего порядка, который допускает применение метода последовательного синтеза. Именно,

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) + \alpha x_3 \\ x_3' = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}. \qquad (7)$$

В соответствии с методом последовательного введения аддитивное управление $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$ строится с помощью агрегированной переменной вида $\psi_3(x_1, x_2, x_3) = \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3 + \varphi_3(x_1, x_2)$, в котором последнее слагаемое конкретизируется на последнем этапе синтеза регулятора, а сама функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$T_3\psi_{3t}' + \psi_3 \equiv 0,\ T_3 > 0, \qquad (8)$$

на множестве всех решений уравнения регулятора. Интегрируя (8), получаем равенство $\psi_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \equiv Ce^{-t/T_3}$. То есть поверхность, задаваемая уравнением $\psi_3(x_1, x_2, x_3) = 0$, является притягивающим многообразием для всех траекторий синтезируемого регулятора. Считая при достаточно больших t $\beta_{31}x_1(t) + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3(t) + \varphi_3(x_1(t), x_2(t)) = 0$, иначе говоря, рассматривая только траектории на поверхности

$$\Lambda_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \psi_3(x_1, x_2, x_3) = 0\},$$

с помощью этого равенства третью переменную исключаем из первого и второго уравнений системы (7):

$$\begin{cases} x_1' = f_1\left(x_1, x_2, -\dfrac{1}{\beta_{33}}\left(\beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \varphi_3(x_1, x_2)\right)\right) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) - \dfrac{\alpha}{\beta_{33}}\left(\beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2\right) - \dfrac{\alpha}{\beta_{33}}\varphi_3(x_1, x_2) \end{cases}. \qquad (9)$$

Функция $u_2(x_1, x_2) := \dfrac{\alpha}{\beta_{33}}\varphi_3(x_1, x_2)$ называется внутренним управлением по переменной x_2 [1]. Оно определяется с помощью агрегированной переменной вида $\psi_2(x_1, x_2) = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \varphi_2(x_1)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$T_2\psi_{2t}' + \psi_2 \equiv 0,\ T_2 > 0 \qquad (10)$$

на всех траекториях конструируемого регулятора, лежащих на поверхности Λ_3.

Управление должно притягивать изображающую точку $\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)$ к кривой $L_2 \cap L_3$, где

$$\mathrm{L}_2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{\mathrm{R}}^3 : \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \varphi_2(x_1) = 0\right\} \text{ -}$$

цилиндрическая поверхность с образующей осью OX_3.

Считая опять же при достаточно больших t $\beta_{21}x_1(t) + \beta_{22}x_2(t) + \varphi_2(x_1(t)) = 0$, то есть рассматривая только траектории на кривой $L_2 \cap L_3$, исключим с помощью последнего равенства вторую переменную из первого уравнения системы (9):

$$x_1' = f_1\left(x_1, -\frac{1}{\beta_{22}}\left(\beta_{21}x_1 + \varphi_2(x_1)\right),\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\beta_{33}}\left(\beta_{31}x_1 - \frac{\beta_{32}}{\beta_{22}}\left(\beta_{21}x_1 + \varphi_2(x_1)\right) + \varphi_3\left(x_1, -\frac{1}{\beta_{22}}\left(\beta_{21}x_1 + \varphi_2(x_1)\right)\right)\right)\right) = 0.$$

Отсюда следует, что положения равновесия регулятора (x_1^0, x_2^0, x_3^0) должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0 \\ x_2^0 = -\dfrac{1}{\beta_{22}}\left(\beta_{21}x_1^0 + \varphi_2(x_1^0)\right) \\ x_3^0 = -\dfrac{1}{\beta_{33}}\left(\beta_{31}x_1 - \dfrac{\beta_{32}}{\beta_{22}}\left(\beta_{21}x_1^0 + \varphi_2(x_1^0)\right) + \varphi_3\left(x_1, -\dfrac{1}{\beta_{22}}\left(\beta_{21}x_1^0 + \varphi_2(x_1^0)\right)\right)\right) \end{cases}$$

или эквивалентной системе

$$\begin{cases} f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0 \\ \psi_2(x_1^0, x_2^0) = 0 \\ \psi_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0 \end{cases}. \qquad (11)$$

Управление $u_2(x_1, x_2)$ находится из уравнения (10), так как этому уравнению удовлетворяют траектории из L_3, стягивающиеся к L_2.

Имеем $\left(\beta_{21} + \varphi'_{2x_1}\right) f_1 + \beta_{22}x_2' = -\dfrac{1}{T_2}\psi_2$, откуда

$$x_2' = f_2(x_1, x_2) + \alpha x_3 + u_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{\beta_{22}}\left(\left(\beta_{21} + \varphi'_{2x_1}\right) f_1 + \frac{1}{T_2}\psi_2 \right).$$

Управление $u_3(x_1, x_2, x_3)$ находится из уравнения (8), так как этому уравнению удовлетворяют траектории синтезируемого регулятора, стягивающиеся к L_3. Имеем

$$\left(\beta_{31} + \varphi'_{3x_1}\right) f_1 + \left(\beta_{32} + \varphi'_{3x_2}\right) x_2' + \beta_{33}x_3' = -\frac{1}{T_3}\psi_3,$$

откуда с учетом предыдущего уравнения

$$x_3' = f_3(x_1, x_2, x_3) + u_3(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= -\frac{1}{\beta_{33}}\left(\left(\beta_{31} + \varphi'_{3x_1}\right) f_1 - \frac{1}{\beta_{22}}\left(\beta_{32} + \varphi'_{3x_2}\right)\left(\left(\beta_{21} + \varphi'_{2x_1}\right) f_1 + \frac{1}{T_2}\psi_2\right) + \frac{1}{T_3}\psi_3\right).$$

Таким образом, методом последовательного введения притягивающих многообразий получаем следующее уравнение синергетического регулятора

$$\begin{cases} x_1' = f_1 \\ x_2' = -\dfrac{1}{\beta_{22}}\left(\left(\beta_{21} + \varphi'_{2x_1}\right) f_1 + \dfrac{1}{T_2}\psi_2\right) \\ x_3' = -\dfrac{1}{\beta_{33}}\left(\left(\beta_{31} + \varphi'_{3x_1}\right) f_1 - \dfrac{1}{\beta_{22}}\left(\beta_{32} + \varphi'_{3x_2}\right)\left(\left(\beta_{21} + \varphi'_{2x_1}\right) f_1 + \dfrac{1}{T_2}\psi_2\right) + \dfrac{1}{T_3}\psi_3\right) \end{cases}. \qquad (12)$$

Из него также видно, что положения равновесия являются решениями системы (11).

Синтезируем, с другой стороны, аддитивное управление скоростями изменения фазовых координат x_2, x_3 путем параллельного введения тех же агрегированных переменных, которое обеспечивало бы стягивание траекторий регулятора к многообразию $L_2 \cap L_3$. Для этого нужно разрешить систему, составленную из уравнений (8) и (10),

$$\begin{cases} \left(\beta_{31} + \varphi'_{3x_1}\right) f_1 + \left(\beta_{32} + \varphi'_{3x_2}\right) x_2' + \beta_{33} x_3' = -\dfrac{1}{T_3}\psi_3 \\ \left(\beta_{21} + \varphi'_{2x_1}\right) f_1 + \beta_{22} x_2' = -\dfrac{1}{T_2}\psi_2 \end{cases},$$

относительно x_2', x_3', и добавить к полученным уравнениям первое уравнение системы (7). Получается то же уравнение регулятора (12), что и при последовательном введении притягивающих многообразий.

ВЫВОД Оба метода введения притягивающих многообразий приводят к одному и тому же уравнению синергетического регулятора. При этом динамические системы, к которым применяется метод последовательного введения, являются более специальными, чем общие системы, к которым применим метод параллельного введения притягивающих многообразий.

Проведенное сравнение методов позволяет использовать доказанную теорему и в случае, когда регулятор синтезируется методом последовательного введения притягивающих многообразий. Найдем, для примера, условие асимптотической устойчивости положений равновесия синергетического регулятора (12). В нашем случае оно следует из замечания 2:

$$g_2 = -\frac{1}{T_2}\psi_2 \quad \Rightarrow \quad g'_{2\psi_2}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} = -\frac{1}{T_2} < 0,$$

$$g_3 = -\frac{1}{T_3}\psi_3 \quad \Rightarrow \quad \left| g'_{3\psi_3}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} \right| = -\frac{1}{T_3} < 0,$$

$$\frac{1}{\Delta_{23}}\left.\begin{vmatrix} f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & f'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ \psi'_{3x_1} & \psi'_{3x_2} & \psi'_{3x_3} \end{vmatrix}\right|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} = \frac{1}{\beta_{22}\beta_{33}}\left.\begin{vmatrix} f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & f'_{1x_3} \\ \beta_{21}+\varphi'_{1x_1} & \beta_{22} & 0 \\ \beta_{31}+\varphi'_{2x_1} & \beta_{32}+\varphi'_{2x_2} & \beta_{33} \end{vmatrix}\right|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} =$$

$$= \left.\left(f'_{1x_1} - \frac{\beta_{21}+\varphi'_{1x_1}}{\beta_{22}} f'_{1x_2} + \frac{1}{\beta_{22}\beta_{33}}\begin{vmatrix} \beta_{21}+\varphi'_{1x_1} & \beta_{22} \\ \beta_{31}+\varphi'_{2x_1} & \beta_{32}+\varphi'_{2x_2} \end{vmatrix} f'_{1x_3} \right)\right|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} < 0.$$

Если знак последнего неравенства противоположный, то положение равновесия неустойчиво. Это неравенство является и инструментом выбора подходящих функций $\varphi_2(x_1),\ \varphi_3(x_1, x_2)$.

В заключение снова обратимся к автономной системе (6). В статье [15] для неё рассмотрено последовательное введение притягивающих многообразий $\psi_2 = x_2 + V(x_1, x_3) = 0$ и $\psi_1 = x_1 + \gamma x_3 = 0$ с одним параметром γ. Дифференцируя равенство $\psi'_1 = -\frac{1}{T_1}\psi_1$ на траекториях регулятора, получаем

$$x'_1 = -\gamma(bx_1 - cx_3 + x_1x_3) - \frac{1}{T_1}(x_1 + \gamma x_3),$$

откуда последовательно $V = -u_1 = x_3 + x'_1 = x_3 - \gamma(bx_1 - cx_3 + x_1x_3) - \frac{1}{T_1}(x_1 + \gamma x_3)$,

$\psi_2 = x_2 + x_3 - \gamma(bx_1 - cx_3 + x_1x_3) - \frac{1}{T_1}(x_1 + \gamma x_3)$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \gamma x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - \gamma(bx_1 - cx_3 + x_1x_3) - \frac{1}{T_1}(x_1 + \gamma x_3) = 0 \\ bx_1 - cx_3 + x_1x_3 = 0 \end{cases}$$

находим положения равновесия синергетического регулятора

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} b\gamma + c \\ b + c/\gamma \\ -b - c/\gamma \end{pmatrix}.$$

Применение теоремы дает такой результат.

СЛЕДСТВИЕ Для регулятора, синтезированного на основе агрегированных переменных из работы [15]: 1) положение равновесия S_1 устойчиво, если $\gamma > -c/b$, и неустойчиво, если $\gamma < -c/b$; 2) положение равновесия S_2 устойчиво, если $\gamma < -c/b$, и неустойчиво, если $\gamma > -c/b$. То есть при значении параметра

$\gamma = -c/b$ положения равновесия регулятора сливаются, а при переходе параметра через это значение характер устойчивости S_1 и S_2 меняется на противоположенный. Вычислительный эксперимент с S-моделью регулятора для пар $(b,c) = (1,1);\ (0.5,5);\ (5,0.5)$ подтверждает смену характера положений равновесия при прохождении параметром γ соответствующих значений $-c/b = -1;\ -10;\ -0.1$.

3. О допустимых устойчивых положениях равновесия синергетического регулятора

Пусть для определенности аддитивное управление осуществляется скоростями второй и третьей фазовых координат, то есть положения равновесия синтезируемого регулятора обязаны лежать на поверхности $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$. Возникают вопросы: 1) любая ли точка этой поверхности может оказаться единственным и устойчивым положением равновесия регулятора при подходящих агрегированных переменных; 2) можно ли так выбирать агрегированные переменные с параметрами, чтобы при изменении этих параметров положение равновесия оставалось единственным, устойчивым и, естественно, принадлежащем поверхности $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Отрицательный ответ на первый вопрос дадим на примере следующей разновидности математической модели системы «хищник–жертва».

$$\begin{cases} x_1' = a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^2 \\ x_2' = -b_1 x_2 + b_2 x_1 x_2 \end{cases}.$$

Будем осуществлять аддитивное управление скоростью второй фазовой координаты с помощью агрегированной переменной $\psi_2(x_1, x_2)$ с условием $\psi_{2t}' = -\dfrac{1}{T}\psi_2$. Тогда синергетический регулятор имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^2 \\ x_2' = -\dfrac{1}{\psi_{2x_2}'}\left(\psi_{2x_1}'\left(a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^2\right) + \dfrac{1}{T}\psi_2\right) \end{cases},$$

а положения равновесия (x_1^0, x_2^0) являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^2 = 0 \\ \psi_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}.$$

то есть лежат на прямых $x_1 = 0,\ a_1 - a_2 x_2 - a_3 x_1 = 0$. Критерий их устойчивости имеет вид [16]

$$f_{1x_1}'(x_1^0, x_2^0) - \frac{\psi_{2x_1}'(x_1^0, x_2^0)}{\psi_{2x_2}'(x_1^0, x_2^0)} f_{1x_2}'(x_1^0, x_2^0) = a_1 - a_2 x_2^0 - 2a_3 x_1^0 + \frac{\psi_{2x_1}'(x_1^0, x_2^0)}{\psi_{2x_2}'(x_1^0, x_2^0)} a_2 x_1^0 < 0.$$

Для точек прямой $x_1 = 0$ неравенство принимает вид $a_1 - a_2 x_2^0 < 0$, откуда необходимо $x_2^0 > \frac{a_1}{a_2}$. То есть точки $\left(0, x_2^0\right)$, $x_2^0 < \frac{a_1}{a_2}$, вырожденной кривой $a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^2 = 0$ не будут устойчивыми положениями равновесия ни при каком выборе агрегированной переменной $\psi_2(x_1, x_2)$.

Положительный ответ на второй вопрос продемонстрируем на примере динамической системы, задаваемой системой уравнений Рёсслера [17]

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 + a x_2 \\ x_3' = b - c x_3 + x_1 x_3 \end{cases}, \quad a, b, c > 0, \qquad (13)$$

траектории которой при некоторых значениях параметров ведут себя хаотически [18]. Выберем агрегированные переменные в виде $\psi_2 = x_2 + \beta x_1 + x_2^2 + x_3$, $\psi_3 = \alpha + \beta x_1 + x_2^2 + x_3$ с параметрами α, β. Система уравнений

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \beta x_1 + x_2^2 + x_3 = 0 \\ \alpha + \beta x_1 + x_2^2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

дает одно положение равновесия синергетического регулятора

$$\begin{cases} x_1^0 = -\alpha^2 / \beta \\ x_2^0 = \alpha \\ x_3^0 = -\alpha \end{cases}. \qquad (14)$$

Оно лежит на плоскости $x_2 + x_3 = 0$.

Проверим условие его устойчивости:

$$\frac{1}{\Delta_{23}} \left\| \begin{matrix} f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & f'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ \psi'_{3x_1} & \psi'_{3x_2} & \psi'_{3x_3} \end{matrix} \right\|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} = \beta < 0,$$

если потребовать $\beta < 0$.

Таким образом, синергетический регулятор

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_3 \\ x_2' = -\frac{1}{T_2}\psi_2 + \frac{1}{T_3}\psi_3 \\ x_3' = \beta(x_2 + x_3) + \frac{2x_2}{T_2}\psi_2 - \frac{1 + 2x_2}{T_3}\psi_3 \end{cases}$$

имеет единственное положение равновесия, и оно будет устойчивым при $\beta < 0$ и любом α.

Множество точек плоскости $x_2 + x_3 = 0$, которые могут быть устойчивыми положениями равновесия регулятора при допустимых значениях параметров α, β, образует полуплоскость точек с положительной первой координатой. Действительно, если точка (x_1^0, x_2^0, x_3^0) лежит в этой полуплоскости, то полагаем $\alpha := x_2^0, \beta := -\alpha^2 / x_1^0$. Обратно, для каждой пары (α, β), $\beta < 0$, определим точку (x_1^0, x_2^0, x_3^0) по формуле (14).

Вычислительный эксперимент с соответствующей S-моделью регулятора при различных комбинациях значений параметров $\alpha, \beta = \pm 1$ и различных начальных условиях подтверждает этот результат и позволяет выдвинуть гипотезу об устойчивости в целом положения равновесия для параметров $\beta < 0$ и любого α.

Список литературы

[1] Колесников А.А. *Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза*. Издательство URSS, Москва, 2005, 240 с.

[2] Зубов В.И. *Устойчивость движения*, Высшая школа, Москва, 1973, 272 с.

[3] Колесников А.А. *Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления*, Энергоатомиздат, Москва,1987, 160 с.

[4] *Синергетические методы управления сложными системами. Механические и электромеханические системы*. Колесников А.А. (ред.). Издательство ДомКнига, Москва, 2006, 304 с.

[5] *Синергетические методы управления сложными системами. Энергетические системы*. Колесников А.А. (ред.). Издательство ЛИБРОКОМ, Москва, 2013, 248 с.

[6] Колесников А.А. *Новые нелинейные методы управления полетом*. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2013, 196 с.

[7] Колесников А.А. Проблемы теории аналитического конструирования нелинейных регуляторов и синергетический подход. *Синергетика и проблемы теории управления.* А.А. Колесников (ред.). ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2004, 504 с.

[8] Братищев А.В. О допустимых нульмерных аттракторах при синергетическом управлении динамической системой. *Сборник трудов 7-й Всероссийской научной конференции «Системный синтез и прикладная синергетика» (ССПС-2015)*, Издательствово ЮФУ , Таганрог, 2015, 96-105.

[9] Братищев А.В. О нульмерных аттракторах при синергетическом управлении динамической системой третьего порядка. *Сборник трудов XII международной научно-технической конференции «Динамика технических систем» «ДТС-2015» (Ростов-на-Дону, 16-17 декабря 2015г.)*, Издательский центр ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2016, 126-131.

[10] Братищев А.В. Критерий устойчивости положений равновесия синергетического регулятора. *Международная научная конференция "Современные проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения -VI" в г. Ростове-на-Дону. Материалы конференции*, Издательский центр ДГТУ, Ростов н/Д, 2016. - 164 с. ISBN: 978-5- 9908135-0-2.
[11] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. Издательство Лань, Санкт-Петербург, 2005, 160 с.
[12] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*. Издательство Лань, Санкт-Петербург, 2008, 480 с.
[13] Чернавина В.Ю. Синергетический синтез антихаотических законов управления системой Рёсслера. *Материалы L научно-технической конференции.* Известия ТРТУ, Таганрог, 2004, 145-146.
[14] Лазарев Ю. *Моделирование процессов и систем в MATLAB*. Издательская группа BHV, Питер, Киев, 2005, 512 с.
[15] Колесников А.А., Яковлев В.Б., Колесников Ал.А. Методы синергетического управления нелинейными объектами с хаотической динамикой. *Синергетика и проблемы теории управления*. А.А. Колесников. (ред.), ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2004, 504 с.
[16] Братищев А.В. *Математическая теория управляемых динамических систем. Введение в понятия и методы*. Издательский центр ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2015, 292 с.
[17] Rossler O. E. An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A.* , 1976, v. 57A, № 5, 397–398.
[18] Спротт Дж. К. *Элегантный хаос: алгебраически простые хаотические потоки.* Издательство Ижевский институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск, 2012, 328 с.