ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2007
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Е.З.Боревич

Россия, 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5
С.-Петербургский государственный электротехнический университет
кафедра высшей математики N°1
e-mail: danitschi@mail.ru

Аннотация.

Рассматривается осесимметричная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках в случае, когда плотность ионизированной примеси неоднородна. Доказано существование бифуркационных решений стационарной задачи и их продолжимость по параметру. Рассматриваемая задача имеет решение, в котором проявляется эффект так называемого внутреннего переходного слоя. Для нестационарной задачи установлены существование и единственность решения при любом $t > 0$. При определенных предположениях нестационарная задача определяет динамическую систему в некотором компактном множестве.

1 Стационарная задача

Рассматривается система

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(D(|\nabla v|)(\nabla n - n\nabla v)) = 0,\\
&-\operatorname{div}(\nabla v) = f - n,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где n – плотность электронов; v – электростатический потенциал; $D > 0$ – коэффициент диффузии; функция f задает неоднородную плотность ионизированной примеси [1]. В [2] был изучен частный случай, когда плотность ионизированной примеси однородна, т. е. функция f постоянна.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – кольцо, задаваемое неравенствами $0 < \alpha \leq \rho \leq \beta$.

Поставим граничные условия

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\rho=\alpha} = \gamma_1, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\rho=\beta} = -\gamma_2,\\
&D(|\nabla v|)\left.\left(\frac{\partial n}{\partial \nu} - n\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\right|_{\rho=\beta} = j,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где ν – внешняя нормаль к границе кольца, $j > 0$ – плотность тока электронов на границе $\rho = \beta$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$. Предположим, что плотность электронов и электростатический потенциал зависят только от полярного радиуса ρ, а плотность ионизированной примеси линейно зависит еще от плотности тока электронов: $f(\rho) = jg_1(\rho) + g_0$, $g_1(\rho) > 0$, $g_0 \geq 0$. При сделанных предположениях задача (1)–(2) эквивалентна следующей краевой задаче

$$
\begin{aligned}
&\varphi'' + \left(\frac{\varphi}{\rho}\right)' + \frac{\varphi^2}{\rho} + \varphi\varphi' - g_0\varphi = j\left(g_1'(\rho) + g_1(\rho)\varphi - \frac{\beta}{\rho D(|\varphi|)}\right),\\
&\varphi(\alpha) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta) = \gamma_2,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $\varphi(\rho) = -v'(\rho)$.

Определение. Решение краевой задачи (3), не зависящее от параметра j, назовем тривиальным решением задачи (3).

Нетрудно видеть, что краевая задача (3) имеет тривиальное решение, если оно является решением следующих двух задач

$$
\begin{aligned}
&\varphi'' + \left(\frac{\varphi}{\rho}\right)' + \frac{\varphi^2}{\rho} + \varphi'\varphi = g_0\varphi,\\
&\varphi(\alpha) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta) = \gamma_2,
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$g_1'(\rho) + g_1(\rho)\varphi = \frac{\beta}{\rho D(|\varphi|)}. \tag{5}$$

Предложение 1. *Если $\beta < \gamma_2^{-1}$, $\gamma_1 < \gamma_2$, то краевая задача* (4) *разрешима при любом $g_0 \geq 0$, причем это решение неотрицательно.*

Доказательство. Поскольку $\gamma_1 < \gamma_2$ и $\dfrac{1}{\beta} > \gamma_2$, то функция $\overline{\varphi}(\rho) = \dfrac{1}{\rho}$ является верхней барьерной, а функция $\underline{\varphi}(\rho) \equiv 0$ является нижней барьерной для краевой задачи (4). Тогда по теореме Нагумо [3] существует решение краевой задачи (4), причем $0 \leq \varphi(\rho) \leq \dfrac{1}{\rho}$, $\rho \in [\alpha, \beta]$. □

Предположим, что функция $D(y)$ имеет следующие свойства:

(a) $D(y) \in C^{(2)}(R_+)$,

(b) $D(y)$ имеет при $y > 0$ единственный положительный локальный максимум D_1 и единственную точку перегиба,

(c) $\lim\limits_{y\to+\infty} D(y) = D_0 > 0$,

(d) при $y > 0$ функция $D(y)$ удовлетворяет условию отрицательной дифференциальной проводимости, т. е. существует интервал, на котором $D(y) + yD'(y) < 0$.

Предложение 2. Пусть коэффициент диффузии $D(y)$ имеет свойства (a)–(d). Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) Функция $G(y) = yD(y)$ имеет единственный локальный максимум $(y_{\max}, G_{\max})$ и единственный локальный минимум $(y_{\min}, G_{\min})$, причем $0 < y_{\max} < y_{\min}$.

(b) При условии $y_{\max} < \gamma_1 < \gamma_2 < y_{\min}$ и при условии, что функция $g_2(\rho) = \ln g_1(\rho)$ удовлетворяет условиям: $g_2'(\rho) > 0$, $g_2''(\rho) > 0$, $\rho \in [\alpha, \beta]$, $\dfrac{\beta}{\alpha g_1(\alpha)} - g_2'(\alpha)D_0 < G_{\max}$, $\dfrac{1}{g_1(\beta)} - g_2'(\beta)D_1 > G_{\min}$, уравнение (5) имеет ровно три положительных решения $0 < \varphi_1(\rho) < \varphi_0(\rho) < \varphi_2(\rho)$, причем $\varphi_0'(\rho) > 0$, $\varphi_i'(\rho) < 0$, $i = 1, 2$, $\rho \in [\alpha, \beta]$.

(c) При условии $g_1(\alpha) > D_0^{-1}\beta$ и $\beta < \gamma_2^{-1}$ выполняется неравенство $\varphi_2(\rho) < \dfrac{1}{\rho}$, $\rho \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств (a)–(d) функции $D(y)$ и теоремы о неявной функции.

□

2 Бифуркационные решения стационарной задачи

Предположим, что монотонно возрастающее решение $\varphi_0(\rho)$ уравнения (5) является решением краевой задачи (4). Тогда оно является тривиальным решением краевой задачи (3). Положим $\varphi(\rho) = \varphi_0(\rho) + u(\rho)$, тогда задача (3) эквивалентна следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} &Lu = jg(\rho) + N(\rho, u) \\ &u(\alpha) = u(\beta) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $Lu = -u'' - \left[\left(\dfrac{1}{\rho} + \varphi_0\right) u\right]' - \dfrac{2\varphi_0}{\rho} u + g_0 u$ – линейный оператор из пространства $X = C_0^{(2)}([\alpha, \beta])$ в $Y = C([\alpha, \beta])$, $g(\rho) = \dfrac{-\beta D'(\varphi_0)}{\rho D^2(\varphi_0)} - g_1(\rho)$, и оператор $N(\rho, u) = \left[\dfrac{j\beta}{\rho}\left(D^{-1}(|\varphi_0 + u|) - D^{-1}(\varphi_0) + \dfrac{D'(\varphi_0)}{D^2(\varphi_0)} u\right)\right] + \dfrac{u^2}{\rho} + u'u$ – нелинейный из X в Y, причем $N(\rho, 0) = 0$, $N_u(\rho, 0) = 0$.

Обозначим через S замыкание множества всех нетривиальных решений $(j, u) \in R \times X$ задачи (6) и пусть S_k – максимальная компонента связности множества S, содержащая точку $(j_k, 0)$, где j_k, $k = 1, 2, ...$ – собственные числа линейной задачи

$$\begin{cases} Lu = jg(\rho)u, \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 1. Предположим, что выполнены все условия предложения 2. Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) для любого $k \in N$ множество S_k неограниченно в $R \times X$;

(b) для любого $k \in N$ существуют константы $s_k > 0$, окрестность $U_k \subset R \times X$ решения $(j_k, 0)$ и два $C^{(1)}$-отображения $\hat{j}_k : (-s_k, s_k) \to R$, $\hat{u}_k : (-s_k, s_k) \to X$, такие, что $\hat{j}_k(s) = j_k + O(s)$, $\hat{u}_k(s) = su_k(x) + O(s^2)$ при $s \to 0$ и $S \cap U_k = \left\{\left(\hat{j}_k(s), \hat{u}_k(s)\right) : |s| < s_k\right\}$, где $u_k(x)$ – собственные функции линейной краевой задачи (7). (Эти решения называются бифуркационными [4].)

Доказательство. Теорема доказывается так же, как теорема 1 из [5], с использованием теоремы 2.4 из [4]. Заметим, что условие отрицательной дифференциальной проводимости функции $D(y)$ и положительность функций $g_1'(\rho)$ и $\varphi_0(\rho)$ гарантируют положительность функции $g(\rho)$ на $[\alpha, \beta]$. $\square$

Покажем, что каждое бифуркационное решение продолжимо по параметру $j > j_k$, $k = 1, 2, ...$, для чего докажем следующее

Предложение 3. Существует такая непрерывная положительная функция $\mu(j) : R_+ \to R_+$, что для любого решения (j, u) задачи (6) выполняется неравенство

$$\|u\|_X(j) \le \mu(j). \tag{8}$$

Доказательство. Запишем задачу (3) в виде

$$-\varphi'' - \left(\frac{\varphi}{\rho}\right)' + \varphi\left(f(\rho) - \frac{\varphi}{\rho} - \varphi'\right) = j\left(\frac{\beta}{\rho D(|\varphi|)} - g_1'(\rho)\right),$$
$$\varphi(\alpha) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta) = \gamma_2.$$

Заметим, что

$$f(\rho) - \frac{\varphi}{\rho} - \varphi' = n(\rho) \ge 0$$

при любом $\rho \in [\alpha, \beta]$.

Сделав замену $\varphi(\rho) = \varphi_0(\rho) + u(\rho)$, получим

$$\begin{aligned} &-u'' - \left(\frac{u}{\rho}\right)' + (\varphi_0 + u)\tilde{g}(u, u', j) = j\left(\frac{\beta}{\rho D(|\varphi_0 + u|)} - g_1'(\rho)\right), \\ &u(\alpha) = u(\beta) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\tilde{g}(u, u', j) = \left(j g_1(\rho) + g_0 - \frac{\varphi_0 + u}{\rho} - \varphi_0' - u'\right) \ge 0$$

при любом $\rho \in [\alpha, \beta]$.

Задачу (9) перепишем в виде

$$Lu = -u\tilde{g}(u, u', j) - j g_1(\rho)\varphi_0 - g_0\varphi_0 + \frac{\varphi_0^2}{\rho} + \varphi_0\varphi_0' + j\left(\frac{\beta}{\rho D(|\varphi_0 + u|)} - g_1'(\rho)\right),$$
$$u(\alpha) = u(\beta) = 0,$$

где

$$Lu = -\frac{1}{\rho}(\rho u')' + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} - \varphi_0\right)u - \varphi_0 u'.$$

Теперь легко получается оценка

$$C_1\|u\|_{L_2}^2 \le (Lu, u) \le jC_2\|u\|_{L_2} + C_3\|u\|_{L_2}, \quad C_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{L_2} \le j\tilde{C}_2 + \tilde{C}_3.$$

Из последних двух оценок следует, что норма $\|u'\|_{L_2}$ ограничена, а значит, есть аналогичная оценка в $C^{(0)}([\alpha,\beta])$-норме. Далее, используя (9) и ограниченность $\|u\|_{L_2}$, $\|u'\|_{L_2}$, получим ограниченность $\|u''\|_{L_2}$. Эта же оценка справедлива для $u(x)$ в $C^{(1)}([\alpha,\beta])$-норме.

Оценивая теперь равномерную норму $u''(x)$ из (9), получим требуемую оценку (8). $\square$

Из утверждения (a) теоремы 1 и предложения 3 следует, что бифуркационные решения, полученные в утверждении (b) теоремы 1, продолжимы по параметру j при любом $j > j_k$, $k = 1, 2, ...$

3 Явление внутренних переходных слоев

Для физических приложений представляет интерес случай больших концентраций примеси, что соответствует асимптотике бифуркационных решений при больших значениях параметра j. Оказывается, что существует единственная точка $\rho_0 \in (\alpha,\beta)$, такая, что возникает явление так называемых внутренних переходных слоев в задаче (3) [6].

Перепишем задачу (3) в виде

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left(\varphi'' + \frac{\varphi}{\rho} - \frac{\varphi}{\rho^2} + \frac{\varphi^2}{\rho} + \varphi'\varphi - g_0\varphi\right) = H(\varphi,\rho),\\ &\varphi(\alpha) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta) = \gamma_2, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\varepsilon^2 = j^{-1}$, $H(\varphi,\rho) = g_1'(\rho) + g_1(\rho)\varphi - \dfrac{\beta}{\rho D(|\varphi|)}$.

Теорема 2. Предположим, что выполнены все условия теоремы 1. Пусть константы α и β выбраны так, что

$$\int\limits_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} H(s,\alpha)ds < 0, \quad \int\limits_{\varphi_1(\beta)}^{\varphi_2(\beta)} H(s,\beta)ds > 0.$$

Тогда существует единственная точка ρ_0, такая, что $\alpha < \rho_0 < \beta$,

$$\int\limits_{\varphi_1(\rho_0)}^{\varphi} H(s,\rho_0)ds \begin{cases} > 0, & \text{при } \varphi \in (\varphi_1(\rho_0), \varphi_2(\rho_0)), \\ = 0, & \text{при } \varphi = \varphi_2(\rho_0), \end{cases}$$

и задача (10) имеет семейства решений $\varphi^+(\rho,\varepsilon)$, $\varphi^-(\rho,\varepsilon)$, определенных при достаточно малых ε, причем для некоторого достаточно малого $\delta > 0$ эти семейства обладают следующими свойствами:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varphi^+(\rho,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi_2(\rho), & \alpha<\rho<\rho_0-\delta,\\ \varphi_1(\rho), & \rho_0+\delta<\rho<\beta,\end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varphi^-(\rho,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi_1(\rho), & \alpha<\rho<\rho_0-\delta,\\ \varphi_2(\rho), & \rho_0+\delta<\rho<\beta.\end{cases}$$

Доказательство. Эта теорема доказывается, в основном, так же, как утверждение 4.2 из [7].

Сделаем замену

$$t=\frac{\rho-\rho_0-\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

где $\lambda(\varepsilon)$ – неизвестная непрерывная функция, существование которой будет установлено в дальнейшем, $\lambda(0)=0$. Для переменной t дифференциальное уравнение из задачи (10) запишется в виде

$$G(\ddot y,\dot y,y,\varepsilon t+\lambda+\rho_0,\varepsilon)=\ddot y+\varepsilon\frac{\dot y}{(\varepsilon t+\lambda+\rho_0)}-\varepsilon^2\frac{y}{(\varepsilon t+\lambda+\rho_0)^2}+$$

$$+\varepsilon^2\frac{y^2}{(\varepsilon t+\lambda+\rho_0)}+\varepsilon\dot y y-\varepsilon^2 g_0 y-H(y,\varepsilon t+\lambda+\rho_0)=0.$$

Пусть $y_0(t)$ – решение вырожденного уравнения (при $\varepsilon=0$) $\ddot u=H(u,\rho_0)$, $y_0(+\infty)=\varphi_2(\rho_0)$, $y_0(-\infty)=\varphi_1(\rho_0)$. Сделав замену $y-y_0=v$, получим

$$G(\ddot y_0+\ddot v,\dot y_0+\dot v,y_0+v,\varepsilon t+\lambda+\rho_0,\varepsilon)=0. \tag{11}$$

Используя лемму 4.2 из [8], получим, что дифференциальный оператор, определенный в левой части уравнения (11), определяет оператор $G_1(v,\lambda,\varepsilon)$ из $X\times R^2$ в Y, где $X=H_0^{(2)}\cap C_0^{(2)}(R)$, $Y=H^{(0)}\cap C^{(0)}(R)$ с нормами

$$\|v\|_X=|v|_2+\left(\sum_{k=0}^{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|v^{(k)}(\eta)|^2 d\eta\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_Y=|v|_0+\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v^2(\eta)d\eta\right)^{1/2}.$$

Проверим выполнение условий леммы 3.1 из [8]. Можно считать, что $\dot y_0(0)\neq 0$. Имеем

(a) $M \equiv G_1(v, \lambda, \varepsilon)$, $m(v, \lambda, \varepsilon) \equiv v(0)$, $G_1(0,0,0) = 0$, $m(0,0,0) = 0$;

(b) $\Phi = \dot{y}_0 \in X$, $< \Phi^*, v >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}_0 v dt$, $R(M_1(0,0,0)) = \{v \in Y :< \Phi^*, v >= 0\}$, где $M_1(0,0,0)w = \ddot{w} - H'_y(y_0, \rho_0)w$,

(c) $$< \Phi^*, M_2(0,0,0;1) >= -g_1''(\rho_0) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}_0(t)dt - \frac{\beta}{\rho_0^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{y}_0(t)}{D(y_0(t))} dt =$$

$$= -g_1''(\rho_0)(\varphi_2(\rho_0) - \varphi_1(\rho_0)) - \frac{\beta}{\rho_0^2} \int\limits_{\varphi_1(\rho_0)}^{\varphi_2(\rho_0)} \frac{d\varphi}{D(\varphi)} \neq 0,$$

(d) $m_1(0,0,0;\Phi) = \Phi(0) \neq 0$.

Тогда по лемме 3.1 из [8] существуют единственные непрерывные функции $v(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$, определенные при достаточно малых ε и такие, что $v(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$, $M(v(\varepsilon), \lambda(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0$, $m(v(\varepsilon), \lambda(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы 2. $\square$

4 Нестационарная задача

Задача (3) является стационарной для следующей нестационарной задачи [1]:

$$\begin{gathered} \frac{\dot{\varphi}}{D(|\varphi|)} = \varphi'' + \left(\frac{\varphi}{\rho}\right)' + \frac{\varphi^2}{\rho} + \varphi'\varphi - f\varphi + j\left(\frac{\beta}{\rho D(|\varphi|)} - g_1'(\rho)\right), \\ \varphi(\alpha, t) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta, t) = \gamma_2, \\ \varphi(\rho, 0) = \tilde{\varphi}(\rho). \end{gathered} \tag{12}$$

Задача (12) эквивалентна краевой задаче

$$\begin{gathered} D^{-1}(|u + \varphi_0|)\dot{u} = u'' + \left(\frac{u}{\rho}\right)' + \frac{2\varphi_0}{\rho} u + (\varphi_0 u)' - g_0 u + \frac{u^2}{\rho} + u'u - jh(u, \rho), \\ u(\alpha, t) = u(\beta, t) = 0, \\ u(\rho, 0) = u_0(\rho), \end{gathered} \tag{13}$$

где $u = \varphi(\rho) - \varphi_0(\rho)$, $h(u, \rho) = H(u + \varphi_0, \rho)$, $u_0(\rho) = \tilde{\varphi}(\rho) - \varphi_0(\rho)$, $\varphi_0(\rho)$ – тривиальное решение задачи (3).

Рассмотрим пространство $X = L_2((\alpha, \beta))$ и оператор $A = -u'' - \left(\dfrac{u}{\rho}\right)' - \dfrac{2\varphi_0}{\rho} u - (\varphi_0 u)' - g_0 u$ с областью определения $D(A) = H^2((\alpha, \beta)) \cap H_0^1(\alpha, \beta))$.

Легко показать, что оператор F: $H_0^1((\alpha,\beta)) \to L_2((\alpha,\beta))$, задаваемый формулой

$$F(u)(\rho) = u'(\rho)u(\rho) + \frac{u^2}{\rho} - jh(u,\rho),$$

удовлетворяет условиям теорем 3.3.3 и 3.3.4 из [9]. Для этого достаточно проверить следующие условия:

- $\|F(u)\|_{L_2} \le \mathrm{const}\|u\|^2_{H_0^1}$, т. е. оператор F переводит ограниченные подмножества $H_0^1((\alpha,\beta))$ в ограниченные подмножества $L_2((\alpha,\beta))$,
- оператор F – локально липшицевый по u.

Используя теоремы 3.3.3 и 3.3.4 из [9], получаем следующее

Предложение 5. *При любом начальном условии* $u_0 \in H_0^1((\alpha,\beta))$ *существует единственное решение* $u(\rho,t)$ *задачи Коши (13) на некотором максимальном интервале* $0 \le t < \bar{t}$, *причем либо* $\bar{t} = +\infty$, *либо* $\|u(\rho,t)\|_{H_0^1} \to +\infty$ *при* $t \to \bar{t}$.

Используя теорему 3.5.2 [9] о сглаживающем действии дифференциального оператора, получаем следующее

Предложение 6. *Решение* $u(\rho,t)$ *нестационарной задачи (13) является классическим решением, т. е. непрерывно дифференцируема по* t *и дважды непрерывно дифференцируема по* x.

Определение ([9]). Динамическая система в полном метрическом пространстве C – это семейство отображений $\{S(t):\ C \to C,\ t \ge 0\}$, такое, что

(a) для любого $t \ge 0$ отображение $S(t)$ непрерывно;

(b) для любого $x \in C$ отображение $t \to S(t)x$ непрерывно;

(c) $S(0)$ – тождественное отображение;

(d) $S(t)(S(\tau)x) = S(t+\tau)x$ для всех $x \in C$ и $t,\tau \ge 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия предложения* 2. *Тогда нестационарная задача* (13) *определяет динамическую систему (см. [9]) в множестве*

$$C = \{u \in H_0^1((\alpha,\beta)) \,|\, -\varphi_0(\rho) \le u(\rho) \le \varphi_2(\rho) - \varphi_0(\rho)\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что решение $u(\rho,t)$ задачи (13) с начальным условием $u_0 \in C$ не может выйти из множества C на интервале своего существования. Для этого используем следующий вариант принципа максимума. Запишем задачу (12) в виде

$$
\begin{gathered}
D^{-1}(|\varphi|)\dot{\varphi} = \varphi'' + \frac{\varphi'}{\rho} + \varphi'\varphi + \frac{\varphi}{\rho}\left(\varphi - \frac{1}{\rho}\right) - g_0\varphi - jH(\varphi,\rho), \\
\varphi(\alpha,t) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta,t) = \gamma_2, \\
\varphi(\rho,0) = \tilde{\varphi}(\rho).
\end{gathered} \tag{14}
$$

Найдем такое наименьшее значение $0 < t_1 < \bar{t}$, что решение $\varphi(\rho,t_1)$ задачи (14) имеет в точке $\rho_1 \in (\alpha,\beta)$ локальный максимум, равный $\varphi_2(\rho_1) < \varphi(\rho_1,t_1) < \dfrac{1}{\rho_1}$. Тогда из вида дифференциального уравнения (14) получим, что $\dot{\varphi}(\rho_1,t_1) < 0$, поскольку $H(\varphi(\rho_1,t_1),\rho_1) > 0$. Аналогично решение $\varphi(\rho,t)$ не может иметь отрицательного локального минимума.

Покажем, что решение задачи (13) существует для всех $t \geq 0$. Предположим, что это не так. Тогда из предложения 5 следует, что интеграл

$$
\int\limits_\alpha^\beta u'^2(\rho,t)d\rho
$$

– неограниченный при $t \to \bar{t}$. Умножим уравнение из (13) на $u(\rho,t)$ и проинтегрируем на (α,β). Получим

$$
\int\limits_\alpha^\beta \frac{\dot{u}u}{D(|u+\varphi_0|)}\,d\rho = -\int\limits_\alpha^\beta u'^2 d\rho - \int\limits_\alpha^\beta \frac{u^2}{\rho}\,u'd\rho + 2\int\limits_\alpha^\beta \frac{\varphi_0 u^2}{\rho}\,d\rho + \int\limits_\alpha^\beta \varphi_0' u^2 d\rho +
$$

$$
+\int\limits_\alpha^\beta \varphi_0 u'ud\rho + \int\limits_\alpha^\beta \frac{u^3}{\rho}\,d\rho - g_0\int\limits_\alpha^\beta u^2 d\rho - j\int\limits_\alpha^\beta h(u,\rho)ud\rho.
$$

Тогда интеграл

$$
\int\limits_\alpha^\beta \frac{\dot{u}ud\rho}{D(|u+\varphi_0|)}
$$

– неограниченный при $t \to \bar{t}$, что невозможно, так как для функции $\Psi(t) = \int\limits_\alpha^\beta g(u(\rho,t))d\rho$, где $g(u) = \int\limits_0^u sD^{-1}(|s+\varphi_0|)ds$, справедливо неравенство Грануолло

$$
\dot{\Psi} \leq -c_1\Psi + c_2, \quad c_i > 0, \quad i = 1,2. \qquad \square
$$

Список литературы

[1] K. Gröger, “Initial-boundary value problems describing mobile carrier transport in semiconductor devices”, *Comment. Math. Univer. Carol.* **26** (1985), no. 1, 75–89.

[2] Е. З. Боревич, “Осесимметричная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках”, *Пробл.мат. анал.* **28** (2004), 5–12.

[3] К. Чанг, Ф. Хауэс, *Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи,* М.: Мир (1988).

[4] P. H Rabinowitz, “Some global results for nonlinear eigenvalue problems”, *J. Funct. Anal.* **7** (1971), 487–513.

[5] L. Recke, “An example for bifurcation of solutions of the basic equations for carrier distributions in semiconductors”, *Z. Angew. Math. Mech.,* **67** (1987), 269–271.

[6] P. C. Fife, “Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.* **54** (1976), 497–521.

[7] E. Z. Borevich, V. M. Chistyakov, “Nonlinear boundary value problems describing mobile carrier transport in semiconductor devices”, *J. Appl. Math.,* **46** (2001), no. 5, 383–400.

[8] P. C. Fife, “Transition layers in singular perturbation problems”, *J. Differ. Eq.* **15** (1974), 77–105.

[9] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений,* М.: Мир (1985).