ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория устойчивости

Устойчивость одного класса линейных периодических систем

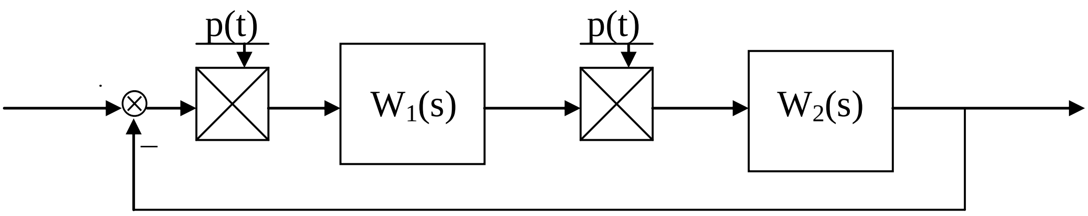
Н.А.Бодунов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ",ул. Проф. Попова, 5

Аннотация

Рассматривается линейная периодическая система управления специального вида. Предполагается, что передаточные функции системы содержат нулевые полюсы. С помощью второго метода Ляпунова и частотной леммы Якубовича-Калмана получены частотные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости этой системы.

Рассмотрим систему автоматического управления со структурной схемой, изображенной на рисунке.



В частности, такая схема соответствует следящим системам переменного тока, состоящим из модулятора, усилителя модулированного сигнала с передаточной функцией $W_1(s)$, демодулятора и стационарной части с передаточной функцией $W_2(s)$. Будем исследовать характер устойчивости этой системы в зависимости от вида передаточных функций $W_1(s)$ и $W_2(s)$, имеющих полюсы на мнимой оси, в предположении, что $p(t)$ – произвольная кусочно-непрерывная периодическая функция.

Пусть $W_1(s) = \frac{k}{s}$, $W_2(s) = \frac{1}{s}W(s)$. В [1] было показано, что при $W(s) = 1$ система находится на границе устойчивости, т. е. устойчива по Ляпунову, но не асимптотически. Были найдены два вида функции $W(s)$, при одном из которых система асимптотически устойчива, а при другом – неустойчива. В настоящей работе продолжается исследование устойчивости данной системы. Полученные новые условия подтверждают сформулированную в [1] общую гипотезу, а частотная форма значительно упрощает их практическое использование.

Будем считать, что $W(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$, где $P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} +\ldots+ p_1 s + p_0$ – гурвицев полином, $Q(s) = q_n s^n + q_{n-1}s^{n-1} +\ldots+ q_1 s + q_0$, $q_0 \neq 0$, полиномы $P(s)$ и $Q(s)$ несократимы, т.е. не имеют общих корней. Данная система описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} z^{(n)} + p_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + p_0 z = q_n x^{(n)} + q_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + q_0 x, \\ \dot{x} = p(t)y, \ \ \dot{y} = -kp(t)z, \end{cases}$$

которые можно привести к нормальной форме вида

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}} = A\vec{z} + x\vec{q} + p(t)y\vec{b}, \\ \dot{x} = p(t)y, \ \dot{y} = -kp(t)\vec{c}^T\vec{z}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\vec{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_n]^T$, $z_1 = z$; $\vec{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$, $b_1 = q_n$;

$b_i = q_{n+1-i} - \sum_{j=1}^{i-1} p_{n-j} b_{i-j}$, $i = 2,3,\ldots,n$; $\vec{q} = [0,\ldots,0,q_0]^T \in R^n$; $\vec{c} = [1,0,\ldots,0]^T \in R^n$;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_3 & \ldots & -p_{n-1} \end{bmatrix}.$$

В (1) произведем замену переменных $\vec{z} = \vec{u} + x\vec{d}$, где $\vec{d} = [q_0/p_0, 0, \ldots, 0]^T \in R^n$. В результате получим систему

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}} = A\vec{u} + p(t)y\vec{b_0}, \\ \dot{x} = p(t)y, \\ \dot{y} = -kp(t)[\vec{c}^T\vec{u} + (q_0/p_0)x], \ \ \vec{b_0} = \vec{b} - \vec{d}. \end{cases} \tag{2}$$

Для системы (2) ищем функцию Ляпунова в виде

$$V = y^2 + k\frac{q_0}{p_0}x^2 + \vec{u}^T G\vec{u}, \ \ G^T = G. \tag{3}$$

При этом

$$\dot{V} = \vec{u}^T[A^T G + GA]\vec{u} + 2p(t)y[\vec{u}^T(G\vec{b}_0 - k\vec{c})].$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A^T G + GA = -\vec{g}\vec{g}^T - \varepsilon D, \\ G\vec{b}_0 - k\vec{c} = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь D – произвольная симметричная положительно определенная матрица; $\varepsilon > 0$; неизвестные величины – матрица G и вектор $\vec{g}$. Из леммы Якубовича-Калмана [2, с. 74] следует, что для существования симметричной положительно определенной матрицы G и вектора $\vec{g}$, удовлетворяющих системе (4), необходимо и достаточно, чтобы параметр ε был достаточно мал и чтобы выполнялось условие

$$\mathrm{Re}[k\vec{c}^T(i\omega I - A)^{-1}\vec{b}_0] > 0, \ \forall\omega \in R. \qquad (5)$$

Таким образом, условие (5) гарантирует положительную определенность V и выполнение неравенства $\dot{V} \le 0$. При этом множество $\{\dot{V} = 0\} = \{\vec{u} = 0\}$ не содержит целых нетривиальных траекторий системы (2) и по теореме Красовского [2, с. 49] система (2), а вместе с ней и исходная система (1) асимптотически устойчивы.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\begin{cases} A^T H + HA = -\vec{h}\vec{h}^T - \varepsilon D, \\ H\vec{b}_0 + k\vec{c} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

с неизвестной матрицей H и вектором $\vec{h}$. Аналогично из леммы Якубовича-Калмана следует, что для существования симметричной положительно определенной матрицы H и вектора $\vec{h}$, удовлетворяющих системе (6), необходимо и достаточно, чтобы параметр ε был достаточно мал и чтобы

$$\mathrm{Re}[k\vec{c}^T(i\omega I - A)^{-1}\vec{b}_0] < 0, \ \forall\omega \in R. \qquad (7)$$

Подставляя в (3) $G = -H$, видим, что условие (7) гарантирует знакопостоянство $\dot{V}$ и знакопеременность V, т.е. неустойчивость системы (2), а вместе с ней и исходной системы (1).

Можно показать, что

$$\vec{c}^T(sI - A)^{-1}\vec{b}_0 = \frac{1}{s}[W(s) - W(0)].$$

Поэтому условия (5) асимптотической устойчивости и (7) неустойчивости рассматриваемой системы принимают вид

$$\mathrm{Re}\left[\frac{W(i\omega) - W(0)}{i\omega}\right] > 0, \forall\omega \in R \qquad (8)$$

и

$$\mathrm{Re}\left[\frac{W(i\omega) - W(0)}{i\omega}\right] < 0, \forall\omega \in R \qquad (9)$$

соответственно.

Пусть, например,

$$W(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)\dots(T_{2n-1} s + 1)}{(T_2 s + 1)(T_4 s + 1)\dots(T_{2n} s + 1)}. \qquad (10)$$

Нетрудно показать, что при $T_1 > T_2 > \dots > T_{2n-1} > T_{2n}$ выполняется условие (8), а при $T_1 < T_2 < \dots < T_{2n-1} < T_{2n}$ – условие (9). Разумеется, есть и другие соотношения между постоянными времени $T_1, T_2, \dots, T_{2n}$, обеспечивающие асимптотическую устойчивость или же неустойчивость рассматриваемой системы с функцией W(s) вида (10).

Для функции

$$W(s) = \frac{(T_1 s+1)^n}{(T_2 s+1)^n},\quad T_1 > T_2,$$

условие (8) позволяет получить соотношение $1 < T_1/T_2 < 7+4\sqrt{3}$, гарантирующее асимптотическую устойчивость рассматриваемой системы.

Список литературы

1. Бодунов Н.А., Котченко Ф.Ф. Устойчивость одного класса линейных периодических систем // Численные методы в краевых задачах математической физики: Межвуз. темат. сб. тр. / ЛИСИ. Л., 1985. с. 15 - 18.

2. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.