ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Интегро-дифференциальные системы

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ЯДРА[1]

А.А.Бободжанов, М.А.Бободжанова, В.Ф.Сафонов[2]

Московский национальный исследовательский университет МЭИ

Аннотация

Для нелинейной сингулярно возмущенной интегродифференциальной задачи с диагональным вырождением ядра развивается алгоритм регуляризованных по Ломову асимптотических решений. Доказываются теоремы о нормальной и однозначной разрешимости соответствующих итерационных задач как в нерезонансном, так и в резонансном случаях. Асимптотическая сходимость формальных решений к точному может быть обоснована с помощью метода Ньютона в форме Срубщика-Юдовича. На основе анализа главного члена асимптотики выделяется класс правых частей и начальных данных, при которых точное решение исходной задачи стремится (при стремлении малого параметра к нулю) к предельному на всем рассматриваемом промежутке времени (т.е. решается так называемая задача инициализации).

Ключевые слова: сингулярное возмущение, пограничный слой, интегродифференциальное уравнение, диагональное вырождение ядра, проблема инициализации.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Abstract

For nonlinear singularly perturbed integro-differential problem with diagonal degeneration of the kernel the algorithm for constructing regularized by Lomov asymptotic solutions is developed. Theorems of normal and unique solvability of the corresponding iterative tasks both in non-resonance and resonance case are proved. Asymptotic convergence of formal solutions to the exact one can be justified by using Newton's method in the Srubshchik-Yudovich form. Basing on the analysis of the leading term of the asymptotic behavior we describe the class of right-hand parts and initial data for which the exact solution of the original problem tends to limit function (when the small parameter tends to zero) on all the considered period of time (i.e. the so called initialization problem is solved).

Keywords: singular perturbation, boundary layer, integro-differential equation, diagonal degeneration of the kernel, initialization problem.

Обозначения. Везде в работе приняты следующие обозначения. Векторы-строки обозначаются в круглых скобках: $b=(b_1,...,b_r)$, а векторы-столбцы $-$ в фигурных скобках: $a=\{a_1,...,a_r\}$ (так что $a^T=(a_1,...,a_r)$). Звёздочка означает транспонирование и сопряжение: $b^*=\left(\bar{b}^T\right)$. Вводятся мультииндексы $k=(k_0,k_1,k_2)$ измерения $|k|=k_0+k_1+\ +k_2$. Через $\lambda(t)$ обозначена вектор-строка $\lambda(t)=(\lambda_0(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t))$, а через e_j обозначен $j-$й орт в пространстве $\mathbb{C}^3$ комплексно-значных трёхмерных стобцов, т.е. $e_0=(1,0,0)^T, e_1=(0,1,0)^T, e_2=(0,0,1)^T$. Далее, $(m,\lambda(t))\equiv$ $\equiv\ m_0\lambda_0(t)+m_1\lambda_1(t)+m_2\lambda_2(t),\ \ (m,\tau)\ \equiv\ m_0\tau_0+m_1\tau_1+m_2\tau_2$. Скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ трёхмерных вектор-столбцов (или вектор-строк) вводится обычным образом: для любых векторов $y=\{y_0,y_1,y_2\}$, $z=\{z_0,z_1,z_2\}$, принадлежащих пространству $\mathbb{C}^3$, полагаем по определению $(y,z)_{\mathbb{C}^3}=\sum_{j=0}^2 y_j\bar{z}_j$ (индекс $\mathbb{C}^3$ везде опускается). И, наконец, через $\varphi_j(t)$ будем обозначать $\lambda_j(t)$ - собственный вектор матрицы $A(t)$ $(A(t)\varphi_j(t)\equiv\lambda_j(t)\varphi_j(t)))$, а через $\chi_i(t)-i$-й столбец матрицы $[\Phi^*(t)]^{-1}$, где $\Phi(t)\equiv(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$. Тогда $\chi_i(t)-\bar{\lambda}_i(t)$- собственный вектор матрицы $A^*(t)$, причем $(\varphi_j(t),\chi_i(t))=\delta_{ji}-$ символ Кронекера, $i,j=\overline{0,2}$. В сумме

$$\sum_{0\le|m|\le N}^{*} w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}$$

звездочка означает, что в ней отсутствуют резонансные экспоненты $e^{(m,\tau)}$ с $m=(m_0,m_1,m_2)$, $|m|\geq 2$ такими, что имеет место тождество $(m,\,\lambda(t))\equiv$ $\equiv\lambda_j(t)\ \ \forall t\in[0,T]$, $j=\overline{1,n}.$

В статье [1] рассматривалась система интегральных уравнений с диагональным вырождением ядра:

$$\mu y(t) = \int_0^t (t-s) K_0(t,s) y(s) \, ds + h(t), \ \ t \in [0,T], \tag{1}$$

которая дифференцированием по t приводилась к интегродифференциальной задаче

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 \frac{dy}{dt} = \int_0^t \left(K_0(t,s) y(s,\varepsilon) + (t-s) \left(\frac{\partial}{\partial t} K_0(t,s) \right) y(s,\varepsilon) \right) \, ds + \dot{h}(t), \\ y(0,\varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon^2}, \ t \in [0,T] \ \ \left(\varepsilon = \sqrt{\mu} \right) \end{gathered} \tag{2}$$

с нулевым оператором дифференциальной части [7]. Было построено асимптотическое решение задачи (2) в виде частичной суммы $y_{\varepsilon N}(t) = \sum_{k=-2}^{N} \varepsilon^j z_j(t, \psi(t,\varepsilon))$ регуляризованного ряда, содержащего отрицательные степени малого параметра $\varepsilon = \sqrt{\mu}$. При переходе к нелинейной задаче наличие отрицательных степеней ε приведёт к тому, что ее формальное асимптотическое решение будет записано в виде ряда Лорана по степеням ε, содержащего при положительных собственных значениях "диагонального ядра" $K_0(t,t)$ так называемые секулярные члены типа $(t/\varepsilon)^m \cos(\beta(t)/\varepsilon)$, которые делают непригодными формальные ряды для асимптотического анализа решений сингулярно возмущенных задач при $\varepsilon \to +0$. По этой причине в рассматриваемой ниже задаче (3) на неоднородность $h(t)$ накладывается условие $h(0) = \dot{h}(0) = 0$, которое позволяет избежать в асимптотическом решении отрицательных степеней параметра (см. [1]) и построить регуляризованный ряд по неотрицательным степеням параметра ε.

Итак, рассмотрим сингулярно возмущенную нелинейную задачу

$$\begin{gathered} \varepsilon^3 \frac{dy}{dt} = \int_0^t \ (t-s) \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j K_j(t,s) y^{(j)}(t,s) \, ds + \\ + h(t) + \varepsilon^3 f(y,t), y(0,\varepsilon) = y^0, t \in [0,T] \left(\varepsilon = \sqrt[3]{\mu} \right) \end{gathered} \tag{3}$$

с более общим, чем в (1), ядром. Чтобы не усложнять выкладки, исследуется скалярный случай задачи (3). Наличие в ней множителя ε^3 перед производной y' в левой части уравнения и нелинейностью $f(y,t)$ в его правой части означает, что разложение решения задачи (3) будет вестись по дробным степеням параметра μ $\left(\varepsilon = \mu^{1/3} \right)$. Предполагая, что решение задачи (3) существует и имеет необходимую степень гладкости на отрезке $[0,T]$, продифференцируем дважды уравнение (3). Будем иметь

$$\varepsilon^3 \tfrac{d^2y}{dt^2} = \int_0^t \{K_0(t,s)\, y(s,\varepsilon) + K_1(t,s)\,\varepsilon y'(s,\varepsilon) + K_2(t,s)\,\varepsilon^2 y''(s,\varepsilon) +$$
$$+ (t-s)\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial t} K_0(t,s)\right) y(s,\varepsilon) + \left(\tfrac{\partial}{\partial t} K_1(t,s)\right)\varepsilon y'(s,\varepsilon) +\right.$$
$$\left.+ \left(\tfrac{\partial}{\partial t} K_2(t,s)\right)\varepsilon^2 y''(s,\varepsilon)\right)\}ds + h'(t) +$$
$$+\varepsilon^3 \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial y} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right) y'(t,\varepsilon) + \left(\tfrac{\partial}{\partial t} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\right),$$

$$\varepsilon^3 \tfrac{d^3y}{dt^3} = \int_0^t \{2\left(\tfrac{\partial}{\partial t} K_0(t,s)\right) y(s,\varepsilon) + 2\left(\tfrac{\partial}{\partial t} K_1(t,s)\right)\varepsilon y'(s,\varepsilon) +$$
$$+2\left(\tfrac{\partial}{\partial t} K_2(t,s)\right)\varepsilon^2 y''(s,\varepsilon) + (t-s)\left(\left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} K_0(t,s)\right) y(s,\varepsilon) +\right.$$
$$\left.+ \left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} K_1(t,s)\right)\varepsilon y'(s,\varepsilon) + \left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} K_2(t,s)\right)\varepsilon^2 y''(s,\varepsilon)\right)\}ds+$$
$$+K_0(t,t)\, y + K_1(t,t)\,\varepsilon y' + K_2(t,t)\,\varepsilon^2 y'' + h''(t) +$$
$$+\varepsilon^3\{\left(\tfrac{\partial^2}{\partial y^2} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)} y'(t,\varepsilon) + \left(\tfrac{\partial^2}{\partial t \partial y} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\right) y'(t,\varepsilon) +$$
$$+ \left(\tfrac{\partial}{\partial y} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right) y''(t,\varepsilon) + \left(\tfrac{\partial^2}{\partial t \partial y} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right) y'(t,\varepsilon) +$$
$$+ \left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\}$$

Введем новые функции $y = y, \varepsilon \frac{d}{dt} y = z, \varepsilon^2 \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\varepsilon \frac{dy}{dt}\right) = \varepsilon \frac{d}{dt} z(t) = = v(t)$. Получим уравнение

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = \int_0^t \{2\left(\frac{\partial}{\partial t} K_0(t,s)\right) y(s,\varepsilon) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t} K_1(t,s)\right) z(s,\varepsilon) +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial}{\partial t} K_2(t,s)\right) v(s,\varepsilon) + (t-s)\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_0(t,s)\right) y(s) +\right.$$
$$\left.+ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_1(t,s)\right) z(s) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_2(t,s)\right) v(s)\right)\}\mathrm{d}s+$$

$$+ K_0(t,t)\, y(t) + K_1(t,t)\, z(t) + K_2(t,t)\, v(t) + \frac{d^2}{dt^2} h(t) +$$
$$+ \varepsilon^3\{\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\frac{z(t,\varepsilon)}{\varepsilon} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial y} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\right)\frac{z(t,\varepsilon)}{\varepsilon}$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial y} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\frac{v(t,\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial t} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\frac{z(t,\varepsilon)}{\varepsilon} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(y,t)\,|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\}.$$

Для вектор-функции $w = \{y, z, v\}$ с учетом равенств $h(0) = \dot{h}(0) = 0$

получаем следующую задачу:

$$\begin{array}{l} \varepsilon\frac{dw}{dt} = A(t)\,w + \int\limits_0^t B(t,s)\,w(s)\ ds + H(t) + \varepsilon F(w,t,\varepsilon)\,, \\ w(0,\varepsilon) = w^0(\varepsilon) \equiv \\ \equiv \left\{y^0, \varepsilon\cdot f\left(y^0,0\right), \varepsilon^2 f\left(y^0,0\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\,y}\,f\left(y^0,0\right) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\,t}\,f\left(y^0,0\right)\right\}, \end{array} \quad (4)$$

где матрицы $A(t)$, $B(t,s)$ и вектор-функции $H(t)$, $F(w,t,\varepsilon)$ имеют вид ($e_3 = \{0,0,1\}$)

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_0(t,t) & K_1(t,t) & K_2(t,t) \end{pmatrix}, H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h''(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_0(t,s) & k_1(t,s) & k_2(t,s) \end{pmatrix},$$

$$F(w,t,\varepsilon) = \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y,t)\right) z(t,\varepsilon) + \varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial y} f(y,t)\right)\right] z(t,\varepsilon) + \right.$$

$$+\,\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial t} f(y,t)\right) z(t,\varepsilon) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(y,t)\right) +$$

$$\left. +\left(\frac{\partial}{\partial y} f(y,t)\right) v(t,\varepsilon)\ \right\} e_3,$$

$$k_j(t,s) = 2\frac{\partial}{\partial t}\ K_j(t,s) + (t-s)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[K_j(t,s)\right], j = \overline{0,2}.$$

Характеристическое уравнение матрицы $A(t)$ будет таким:

$$\lambda^3 = K_2(t,t)\,\lambda^2 + K_1(t,t)\,\lambda + K_0(t,t)\,.$$

Его корни $\lambda = \lambda_j(t)$ образуют спектр $\sigma(A(t)) = \left\{\lambda_j(t), j = \overline{0,2}\right\}$ матрицы $A(t)$. Будем предполагать, что он простой, т.е. что $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $i,j = \overline{0,2}, \forall t \in [0,T]$. Тогда матрица $A(t)$ имеет полную систему собственных векторов $\{\varphi_j(t)\}$, которые можно записать в виде $\varphi_j(t) = \left\{1,\, \lambda_j(t),\, \lambda_j^2(t)\right\}$, $j = \overline{0,2}$. Обозначим через $\Phi(t)$ матрицу из собственных векторов оператора $A(t)$:

$$\Phi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_0(t) & \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \\ \lambda_0^2(t) & \lambda_1^2(t) & \lambda_2^2(t) \end{pmatrix}$$

и вычислим матрицу $(\Phi^*(t))^{-1} = \chi(t) \equiv (\chi_0(t), \chi_1(t), \chi_2(t))$. Тогда $\chi_j(t)$ будет $\overline{\lambda}_j(t)-$ собственным вектором сопряженной матрицы $A^*(t)$, причем системы векторов $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_i(t)\}$ будут биортонормированными, т.е. $(\varphi_i(t), \chi_j(t)) = \delta_{ij}-$символ Кронекера, $i, j = \overline{0,2}$, $\forall t \in [0,T]$.

Подытожим условия, при которых будет рассматриваться задача (4):

1) $h(t) \in C^\infty[0,T]$, $h(0) = \dot{h}(0) = 0$, $K_j(t,s) \in C^\infty(0 \le s \le t \le T)$, $j = = \overline{0,2}$;

2) спектр матрицы $A(t)$ удовлетворяет требованиям: а) $\lambda_i(t) \neq \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $\lambda_j(t) \neq 0$, $i, j = \overline{0,2}, \forall t \in [0,T]$, б) $Re\lambda_j(t) \le 0, j = = \overline{0,2}$ $(\forall t \in [0,T])$;

3) функция $f(y,t)$ является многочленом[3] от y : $f(y,t) = f_0(t) + + \sum_{r=1}^{N_0} f_r(t) y^r$ с коэффициентами $f_r(t) \in C^\infty([0,T], \mathbb{C}^1)$, $r = \overline{0, N_0}$, $N_0 < < \infty$ (тогда и вектор-функция $F(w,t,\varepsilon)$ также будет многочленом по w : $F = \sum_{|m|=0}^{N} F^{(m)}(t,\varepsilon) w^m$ с векторными коэффициентами $F^{(m)}(t,\varepsilon)$ из класса $C^\infty\left(\left([0,T], \mathbb{C}^3\right) \times \{\varepsilon > 0\}\right)$);

4) Равенства $(m, \lambda(t)) \equiv m_0\lambda_0(t) + m_1\lambda_1(t) + m_2\lambda_2(t) = \lambda_j(t)$ (при $|m| \ge 2$ и $j \in \{0,1,2\}$) либо не имеют места ни при каких $t \in [0,T]$, либо выполняются тождественно при всех $t \in [0,T]$.

§1. Регуляризация задачи (4)

Введем регуляризирующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)\, d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{0,2} \tag{5}$$

и для функции $\widetilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$ $(\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2))$ поставим следующую задачу:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_j(t) \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \tau_j} - A(t)\widetilde{w} - \int_0^t B(t,s)\widetilde{w}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds = \\ = H(t) + \varepsilon F(\tilde{w}, t, \varepsilon), \ \tilde{w}(0,0,\varepsilon) = w^0(\varepsilon).\end{gathered} \tag{6}$$

Ясно, что если $\widetilde{w} = \widetilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$ решение задачи (6), то его сужение $w(t,\varepsilon) \equiv \widetilde{w}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ $(\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2))$ является точным решением задачи (4). Однако в (6) не произведена регуляризация интегрального члена

[3]Функция $f(y,t)$ взята в виде многочлена от y ради упрощения выкладок; можно считать, что $f(y,t)$ аналитична по y .

$$J\widetilde{w}\left(t,\tau,\varepsilon\right)=\int_0^t B\left(t,s\right)\widetilde{w}\left(s,\frac{\psi\left(s\right)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds. \tag{7}$$

Для осуществления этой операции введем класс M_ε, асимптотически инвариантный относительно оператора J (см.[2], стр.62).

Определение 1. Будем говорить, что вектор-функция $w(t,\tau)$=$\{w_0,\, w_1, w_2\}$ принадлежит пространству U, если она представляется суммой вида

$$w(t,\tau)=\sum_{0\leq|m|\leq N}^{*}w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\equiv$$

$$\equiv\sum_{0\leq m_0+m_1+m_2\leq N}^{*}w^{(m_0,m_1,m_2)}(t)e^{m_0\tau_0+m_1\tau_1+m_2\tau_2},\ \ N=N_w<\infty \tag{8}$$

с коэффициентами $w^{(m)}\left(t\right)\in C^{\infty}\left(\left[0,1\right],\mathbb{C}^3\right),\, 0\leq|m|\leq N$. Звездочка в (8) над знаком суммы означает, что в этой сумме отсутствуют резонансные экспоненты (см. [1]), т.е. такие экспоненты $e^{(m,\tau)}$ измерения $|m|\geq 2$, для которых при некоторых $j\in\{0,1,2\}$ и $t\in[0,T]$ выполняется тождество $(m,\lambda\left(t\right))\equiv\lambda_j\left(t\right).$

Подставляя (8) в (7) вместо $\tilde{w}$ и обозначая $k^{(m)}\left(t,s\right)\equiv B\left(t,s\right)w^{(m)}\left(s\right)$, будем иметь

$$Jw\left(t,\tau\right)=\sum_{0\leq|m|\leq N}^{*}\int_0^t k^{(m)}\left(t,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m,\lambda(\theta))d\theta}ds.$$

Применяя операцию интегрирования по частям, будем иметь

$$J^{(m)}\left(t,\varepsilon\right)\equiv\int_0^t k^{(m)}\left(t,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m,\lambda(\theta))d\theta}ds=\varepsilon\int_0^t\frac{k^{(m)}(t,s)}{(m,\lambda(s))}de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m,\lambda(\theta))d\theta}ds=$$

$$=\varepsilon[\frac{k^{(m)}(t,s)}{(m,\lambda(s))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m,\lambda(\theta))d\theta}|_{s=0}^{s=t}-\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k^{(m)}(t,s)}{(m,\lambda(s))}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m,\lambda(\theta))d\theta}]=$$
$$=\varepsilon[\frac{k^{(m)}(t,t)}{(m,\lambda(t))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(m,\lambda(\theta))d\theta}-\frac{k^{(m)}(t,0)}{(m,\lambda(0))}]-\varepsilon\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k^{(m)}(t,s)}{(m,\lambda(s))}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m,\lambda(\theta))d\theta}ds.$$

Продолжая эту процедуру далее, получим асимптотическое разложение

$$\begin{gathered}J^{(m)}\left(t,\varepsilon\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-1\right)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}[\left(I_m^{\nu}\left(k^{(m)}\left(t,s\right)\right)\right)_{s=t}\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(m,\lambda(\theta))d\theta}-\\-\left(I_m^{\nu}\left(k^{(m)}\left(t,s\right)\right)\right)_{s=0}],\end{gathered} \tag{9}$$

где введены операторы

$$I_m^0 = \frac{1}{(m, \lambda(s))} \cdot \, , I_m^\nu = \frac{1}{(m, \lambda(s))} \cdot \frac{\partial}{\partial s} I_m^{\nu - 1}, \, \nu \geq 1. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} Jy(t, \tau) = \sum_{0 \leq |m| \leq N}^{*} \sum_{\nu = 0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu + 1} [\left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t, s) \right) \right)_{s = t} \cdot e^{(m, \tau)} - \\ - \left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t, s) \right) \right)_{s = 0}] \end{gathered} \tag{11}$$

причем этот ряд сходится при $\varepsilon \to +0$ асимптотически (равномерно по $t \in [0, T]$) к образу $Jy(t, \tau, \sigma)$ (см.[3], [7]). Это означает, что класс $M_\varepsilon = U_{|\tau = \psi(t)/\varepsilon}$ асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора J.

Пусть теперь ряд

$$\tilde{w}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{q = 0}^{\infty} \varepsilon^q w_q(t, \tau) \equiv \sum_{q = 0}^{\infty} \varepsilon^q \sum_{0 \leq |m| \leq N_q}^{*} w_q^{(m)}(t) \, e^{(m, \tau)} \tag{12}$$

сходится асимптотически при $\varepsilon \to +0$ равномерно по $(t, \tau) \in [0, T] \times \times \left\{ \mathrm{Re}\, \tau_j \leq 0, j = \overline{0, 2} \right\}$. Тогда образ $J\tilde{w}(t, \tau, \varepsilon)$ будет, очевидно, также представляться асимптотическим рядом, равномерно сходящимся при $\varepsilon \to +0$. Это позволяет получить окончательное расширение интегрального оператора J следующим образом. Для произвольного элемента (8) пространства U можно записать

$$Jw(t, \tau) = R_0 w(t, \tau) + \sum_{\nu = 1}^{\infty} \varepsilon^\nu R_\nu w(t, \tau) \, ,$$

где операторы $R_\nu : U \to U$ (операторы порядка по ε) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} & R_0 w(t, \tau) \equiv 0, \\ & R_{\nu + 1} w(t, \tau) = (-1)^\nu \textstyle\sum_{0 \leq |m| \leq N}^{*} [\left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t, s) \right) \right)_{s = t} \cdot e^{(m, \tau)} - \\ & - \left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t, s) \right) \right)_{s = 0}], \;\; \nu \geq 0, \tau = \tfrac{\psi(t)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{12_0}$$

С учетом этих формул результат подстановки ряда (12) в интеграл $J\tilde{w}$ можно записать в виде

$$J\tilde{w} = \sum_{r = 0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s = 0}^{r} R_{r - s} w_s(t, \tau) \, |_{\tau = \psi(t)/\varepsilon}. \tag{13}$$

Равенство(13) является основанием для следующего определение расширения $\tilde{J}$ интегрального оператора J.

Определение 2. Формальным расширением оператора J назовем оператор $\tilde{J}$, действующий на любую непрерывную по $(t,\tau) \in [0,T] \times \times \left\{\mathrm{R}e\,\tau_j \leq 0, j=\overline{0,2}\right\}$ функцию $\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$ вида (12) по закону

$$\tilde{J}\tilde{w} \equiv \tilde{J}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^k w_q(t,\tau)\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}w_s(t,\tau).$$

Теперь легко записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной (4):

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\sum_{j=0}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{w}-\tilde{J}\tilde{w}-\varepsilon F\left(\tilde{w},t,\varepsilon\right)=H(t), \tilde{w}(0,0,\varepsilon)=w^0\left(\varepsilon\right). \quad (14)$$

§2. Разрешимость итерационных задач

Подставляя (12) в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие итерационные задачи:

$$L_0w_0 \equiv \sum_{j=0}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial w_0}{\partial\tau_j}-A(t)w_0=H(t), w_0(0,0)=w_0^0; \quad (15_0)$$

$$L_0w_1=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+R_1w_0+\hat{F}\left(w_0,t,0\right), w_1(0,0)=w_1^0; \quad (15_1)$$

$$\cdots$$

$$L_0w_k=-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+R_1w_{k-1}+R_2w_{k-2}+\cdots+R_kw_0+\hat{P}_k\left(w_0,...,w_{k-1}\right),$$
$$w_k(0,0)=w_k^0. \quad (15_k)$$

Здесь w_j^0- коэффициент при ε^j в разложении начального вектора $w^0\left(\varepsilon\right)$ по степеням ε, операторы R_ν вычисляются по формулам $\left(12_0\right)$, $P_k\left(w_0,...,w_{k-1}\right)$ – многочлены от $w_1,...,w_{k-1}$ с коэффициентами, зависящими от $w=w_0\left(t,\tau\right)$, причем $P_k\left(w_0,...,w_{k-1}\right)$ линеен относительно w_{k-1}; шляпка $\wedge$ над $F,...,P_k$ означает знак операция вложения соответствующей вектор-функции в пространство U, в котором отсутствуют резонансные экспоненты (эта операция действует следующим образом: если в многочлене от экспонент $g\left(t,e^{\tau_0},e^{\tau_1},e^{\tau_2}\right)$ появляется резонансная экспонента

$e^{(m,\tau)}$ $(|m| \geq 2,\ (m, \lambda(t)) \equiv \lambda_j(t))$, то операция $\wedge$ заменяет её на соответствующую экспоненту e^{τ_j} первого измерения; подробнее см.[2], с. 234).

Каждая из итерационных задач (15_k) имеет вид системы

$$L_0 w(t,\tau) \equiv \sum_{j=0}^{2} \lambda_j(t) \frac{\partial w}{\partial \tau_j} - A(t)w = H(t,\tau), \tag{16}$$

где $H(t,\tau) = \sum^{*}_{0\leq|m|\leq N_H} H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \in U$ – соответствующая правая часть. Пространство U можно представить в виде прямой суммы подпространств $U^{(s)} = \{w(t,\tau) : w(t,\tau,\sigma) = \sum^{*}_{|m|=s} w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\}, s = 0,1,...,N$, т.е. $U = \sum_{s=0}^{N} \oplus U^{(s)}$. Примем следующее обозначение: если $w(t,\tau)$– элемент (8) пространства U, то через $y^{(s)}(t,\tau)$ будем обозначать сумму $\sum^{*}_{|m|=s} w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \in U^{(s)}$. В частности,

$$w^{(1)}(t,\tau) = \sum_{|m|=1} w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \equiv \sum_{j=0}^{2} w^{e_j}(t)\, e^{\tau_j} \in U^{(1)}.$$

$$H^{(1)}(t,\tau) = \sum_{|m|=1} H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \equiv \sum_{j=0}^{2} H^{e_j}(t)e^{\tau_j} \in U^{(1)}.$$

Нам понадобится скалярное (при каждом $t \in [0,T]$) произведение в пространстве $U^{(1)}$. Оно вводится следующим образом:

$$< w(t,\tau), p(t,\tau) > \equiv < \sum_{j=0}^{2} w^{e_j}(t)e^{\tau_j}, \sum_{j=0}^{2} p^{e_1}(t)e^{\tau_j} > \overset{def}{=} \sum_{j=0}^{2} (w^{e_j}(t), p^{e_j}(t)),$$

где $(,)$– обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$. Нетрудно видеть, что вектор-функции $\nu_j(t,\tau) \equiv \chi_j(t)e^{\tau_j}$ (где $\chi_j(t)$– собственный вектор матрицы $A^*(t)$, соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}_j(t)(j = \overline{0,2})$) образуют базис ядра сопряженного в $U^{(1)}$ оператора $L_0^* = \sum_{j=0}^{2} \bar{\lambda}_j(t)\frac{\partial}{\partial\tau_j} - A^*(t)$ (к оператору L_0). Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $H(t,\tau) \in U$ и выполнены условия 1) и 2a). Тогда для разрешимости уравнения (16) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы*

$$< H^{(1)}(t,\tau), \nu_j(t,\tau) > \equiv 0 \ (j = \overline{0,2}, \forall t \in [0,T]). \tag{17}$$

Доказательство. Будем определять решение системы (16) в виде элемента

$$w(t,\tau,\sigma) = \sum^{*}_{0\leq|m|\leq N_y} w^{(m)}(t,\sigma)e^{(m,\tau)} \tag{18}$$

пространства U, где $N_y \geq N_H$. Подставляя (18) в (16), будем иметь

$$\sum_{0\leq|m|\leq N_y}^{*}\left[(m,\lambda(t))\,I-A(t)\right]w^{(m)}(t)\,e^{(m,\tau)}=\sum_{0\leq|m|\leq N_H}^{*}H^{(m)}(t)\,e^{(m,\tau)}.$$

Приравнивая здесь свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим системы уравнений

$$\begin{array}{l}\left[\lambda_j(t)\,I-A(t)\right]w^{e_j}=H^{e_j}(t),\ j=\overline{0,2},\\ -A(t)\,w^{(0)}(t)=H^{(0)}(t),\\ \left[(m,\lambda(t))\,I-A(t)\right]w^{(m)}(t)=H^{(m)}(t),\ 2\leq|m|\leq N_H,\\ \left[(m,\lambda(t))\,I-A(t)\right]w^{(m)}(t)=0,\ N_H<|m|\leq N_y.\end{array}\tag{19}$$

Так как $\det A(t)\neq 0\ (\forall t\in[0,T])$ и в U отсутствуют резонансные экспоненты($(m,\lambda(t))\notin\sigma(A(t))$), то все системы (19), кроме первой, однозначно разрешимы в пространстве $C^n([0,T],\mathbb{C}^n)$. При этом их решения имеют вид

$$\begin{array}{l}w^{(0)}(t)=-A^{-1}(t)\,H^{(0)}(t),\\ w^{(m)}(t)=\left[(m,\lambda(t))\,I-A(t)\right]^{-1}H^{(m)}(t)\ (0\leq|m|\leq N_H),\\ w^{(m)}(t)\equiv 0\ (|m|>N_H).\end{array}\tag{20}$$

Для разрешимости же первой системы (19) необходимо и достаточно выполнения условий (17) (см.[2]). Если эти условия выполнены, то решения указанной системы записываются в форме

$$w^{e_j}(t)=\alpha^{e_j}(t)\,\varphi_j(t)+\sum_{s=0,\ s\neq j}^{2}\frac{\left(H^{e_j}(t),\chi_s(t)\right)}{\lambda_j(t)-\lambda_s(t)}\varphi_s(t),\quad j=\overline{0,2,}$$

где $\varphi_j(t)$ – “ $\lambda_j(t)$”- собственный вектор матрицы $A(t)$ (см. обозначения, введенные в начале статьи), $\alpha^{e_j}(t)\in C^\infty\left([0,T],\mathbb{C}^1\right)$ – произвольные скалярные функции. Теорема доказана.

Не будем формулировать теорему об однозначной разрешимости системы (16) (при некоторых дополнительных ограничениях). Отметим только, что если теорему 1 применить к двум последовательным итерационным задачам (15_l), (15_{l+1}), то получим условия однозначной разрешимости в пространстве U системы (15_l) (см., например, [2]).

§3. Построение решений итерационных задач

Рассмотрим систему (15_0). Так как неоднородность $H\left(t,\tau\right)=H\left(t\right)\equiv\equiv H^{(0)}(t)$ не зависит от экспонент e^{τ_j}, то для неё условия ортогональности (17) автоматически выполняются, поэтому система (15_0) имеет решение в пространстве U, которое можно записать в виде

$$w_0(t,\tau)=\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j}+w_0^{(0)}(t), \tag{21}$$

где $w_0^{(0)}(t)=-A^{-1}(t)H^{(0)}(t)$, $\alpha_j^{(0)}\left(t\right)\in C^{\infty}\left(\left[0,T\right],\mathbb{C}^1\right)-$ произвольные скалярные функции. Подчиним (18) начальному условию $w_0(0,0)=y^0$; будем иметь

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(0)}(0)\varphi_j(0)+w_0^{(0)}(0)=w^0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\alpha_j^{(0)}(0)=(w^0+A^{-1}(0)H^{(0)}(0),\chi_j(0)),j=0,1,2.\end{gathered} \tag{22}$$

Перейдем теперь к следующей итерационной задаче (15_1). Подставляя (21) в (15_1), получим систему

$$\begin{gathered}L_0w_1=-\textstyle\sum_{j=0}^{2}(\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\dot{)}e^{\tau_j}-\dot{w}_0^{(0)}(t)+\\ +\textstyle\sum_{j=0}^{2}\left[\frac{B(t,t)\varphi_j(t)}{\lambda_j(t)}\alpha_j^{(0)}\left(t\right)e^{\tau_j}-\frac{B(t,0)\varphi_j(0)}{\lambda_j(0)}\alpha_j^{(0)}\left(0\right)\right]+\\ +\hat{F}\left(\textstyle\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j}+w_0^{(0)}(t),\ t,0\right).\end{gathered} \tag{23}$$

Вычисляя

$$\hat{F}\left(\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(0)}\varphi_j(t)e^{\tau_j}+w_0^{(0)}(t),t,0\right)=F_0\left(t\right)+\sum_{j=0}^{2}F^{e_j}\left(\alpha_0^{(0)},\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},t\right)e^{\tau_j}+$$

$$+\sum_{2\le|m|\le N_1}^{*}F^{(m)}\left(\alpha_0^{(0)},\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},t\right)e^{(m,\tau)},$$

и подчиняя правую часть системы (23) условиям ортогональности (17), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\dot{\alpha}_j^{(0)}=-\left(\dot{\varphi}_j\left(t\right)-\frac{B(t,t)}{\lambda_j(t)}\varphi_j\left(t\right),\chi_j\left(t\right)\right)\alpha_j^{(0)}+\left(F^{e_j}\left(\alpha_0^{(0)},\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},t\right),\chi_j\left(t\right)\right),\\ \alpha_j^{(0)}(0)=(y^0+A^{-1}(0)H^{(0)}(0),\chi_j(0)),j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{24}$$

Система (24) в резонансном случае является нелинейной системой дифференциальных уравнений относительно $\alpha_j^{(0)}(t)$, а значит, ее разрешимость на отрезке $[0,T]$ не гарантирована. Если, например, спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ в фиксированной точке $t \in [0,T]$ расположен по одну сторону от некоторой прямой π, проходящий через нуль комплексной плоскости λ, и на ней нет точек $\lambda_j(t)$, то система является треугольной. В этом случае уравнения (24) последовательно интегрируются и, значит, их разрешимость на отрезке $[0,T]$ становится очевидной. В других случаях расположения спектра $\lambda_j(t)$ относительно мнимой оси треугольность системы (24) нарушается. Однако в любом случае существует некоторая бирациональная замена переменных, позволяющая понизить порядок системы и свести исследование проблемы разрешимости в целом к проблеме разрешимости для более простой системы дифференциальных уравнений. Мы не будем обсуждать здесь эту проблему. Потребуем, чтобы система (24) имела решение в классе $C^\infty\left([0,T],\mathbb{C}^3\right)$. В этом случае функции $\alpha_j^{(0)}(t)$, входящие в решение (21) системы (15_0), будут полностью вычислены, а сама система (15_0) будет иметь единственное решение в пространстве U. При этом будет найдено решение системы (15_1) (с точностью до элементов ядра оператора L_0 в $U^{(1)}$). Поиск функций $\alpha_j^{(1)}(t)$, входящих в указанное ядро, осуществляется по той же схеме, что и поиск функций $\alpha_j^{(0)}(t)$. При этом для $\alpha_j^{(1)}(t)$ уже получается линейная система дифференциальных уравнений, разрешимость которой на отрезке $[0,T]$ гарантирована гладкостью входящих в нее коэффициентов. Сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1) – 4) *и задача* (24) *разрешима на отрезке* $[0,T]$. *Тогда все итерационные задачи* (15_k) $(k=0,1,2,...)$ *однозначно разрешимы в классе U (при их последовательном решении).*

§4. Асимптотическая сходимость формальных решений

Построив решения $w_0(t,\tau,\sigma),...,w_l(t,\tau,\sigma)$ задач $(15_0),...,(15_l)$ в пространстве U, составим частичную сумму

$$S_l(t,\tau,\sigma,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k w_k(t,\tau,\sigma).$$

Обозначим сужение этой суммы при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$ через $w_{\varepsilon l}(t)$. Имеет место следующее утверждение (доказательство проводится по аналогии с работой [3]).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда функция* $w_{\varepsilon l}(t)$ *удовлетворяет задаче (2) с точностью до членов, содержащих* ε^{l+1} *, т.е.*

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{dw_{\varepsilon l}(t)}{dt} = A(t)\,w_{\varepsilon l}(t) + \int_0^t B(t,s)\,w_{\varepsilon l}(s)\,ds + \\ +\varepsilon F(w_{\varepsilon l}(t),t) + H(t) + \varepsilon^{l+1} F_l(t,\varepsilon)\,,\; y_{\varepsilon l}(0) = y^0,\end{gathered} \tag{25}$$

где $\|F_l(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \leq \bar{F}_l$, $\bar{F}_l > 0-$ *постоянная, не зависящая от* $\varepsilon \in \in (0,\varepsilon_0]$ *(*$\varepsilon_0 > 0-$ *достаточно мало)*

При доказательстве асимптотической сходимости формального решения $w_{\varepsilon l}(t)$ к точному $w(t,\varepsilon)$ используется следующее утверждение (см.[4]) о разрешимости операторного уравнения $P_\varepsilon(u) = 0$.

Теорема 3. *Пусть оператор* P_ε *действует из банахова пространства* B_1 *в банахово пространство* B_2 *и имеет в некотором шаре* $\{\|u - u_0\| \leq r\} \subset B_1$ *две непрерывные производные. Пусть также существует оператор* $\Gamma_\varepsilon \equiv \left[P'_\varepsilon(u_0)\right]^{-1}$ *и выполнены условия*

$$1')\;\|\Gamma_\varepsilon\| \leq c_1\varepsilon^{-k},\; 2')\;\|P_\varepsilon(u_0)\| \leq c_2\varepsilon^m\;(m > 2k)\,,\; 3')\;\left\|P''_\varepsilon(u)\right\| \leq c_3.$$

Тогда уравнение $P_\varepsilon(u) = 0$ *имеет при достаточно малых* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *решение* $u_* \in B_1$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u_* - u_0\|_{B_1} \leq c\varepsilon^{m-k}.$$

Воспользовавшись этим утверждением, мы так же, как и в [6], докажем следующую теорему об оценке остаточного члена.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1) – 4) *и задача* (21) *разрешима на отрезке* $[0,T]$. *Тогда система (4) при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0 > 0-$ *достаточно мало) имеет единственное решение* $w(t,\varepsilon) \in C^1\left([0,T],\mathbb{C}^3\right)$ *и справедлива оценка*

$$\|w(t,\varepsilon) - w_{\varepsilon l}(t)\|_{C[0,T]} \leq C_l \cdot \varepsilon^{l+1}\;(l = 0,1,...)\,, \tag{26}$$

где постоянная $C_l > 0$ *не зависит от* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

§5. Предельный переход в задаче (4). Решение задачи инициализации

Если выполнены условия теоремы 4 , то точное решение задачи (4) представляется в виде

$$w(t,\varepsilon) = w_{\varepsilon 0}(t) + \varepsilon F_0(t,\varepsilon)\,, \tag{27}$$

где $\|F_0(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \leq \bar{F}_0$, $\bar{F}_0-$ постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in$ $\in (0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0-$ достаточно мало, $w_{\varepsilon 0}(t)$ имеет вид (см.(21),(24))

$$w_0(t,\tau) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} + w_0^{(0)}(t),\ w_0^{(0)}(t) = -A^{-1}(t)H^{(0)}(t), \quad (28)$$

а функции $\alpha_j^{(0)}(t)$ удовлетворяют задаче (24). Из (28) видно, что если спектр $\sigma(A(t))$ матрицы $A(t)$ находится слева от мнимой оси ($\mathrm{Re}\,\lambda_j(t) <$ $< 0 \left(\forall t \in [0,T], j = \overline{1,n}\right)$), то имеет место равномерный предельный переход

$$\left\|w(t,\varepsilon) - w_0^{(0)}(t)\right\|_{C[\delta,T]} \to 0 \ (\varepsilon \to +0) \qquad (*)$$

(здесь δ – произвольная постоянная из промежутка $(0,T)$). Если же среди точек спектра $\sigma(A(t))$ имеются чисто мнимые, то предельный переход $(*)$ в сильном смысле в общем случае не имеет места. Поэтому в этой ситуации обычно ставится следующая *задача инициализации*: выделить класс $\Sigma = \left\{y^0, h(t), K(t,s)\right\}$ исходных данных задачи (2), для которых гарантируется равномерный предельный переход (при $\varepsilon \to +0$) точного решения $y(t,\varepsilon)$ рассматриваемой задачи к некоторой предельной функции $\overline{\overline{y}}(t)$ *на всем отрезке времени* $[0,T]$. Попробуем решить эту задачу.

Из (28) видно, что равномерный переход $w(t,\varepsilon) \to w_0^{(0)}(t)$ $(\varepsilon \to +0)$ на всем отрезке $[0,T]$ будет гарантирован, если функции $\alpha_j^{(0)}(t)$, удовлетворяющие задаче (24), будут тождественно равны нулю. Поскольку вектор-функция $F^{e_j}\left(\alpha_0^{(0)},\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},t\right)$ имеет вид (см.[3], с. 242-243)

$$F^{e_j}\left(\alpha_0^{(0)},\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},t\right) = \tilde{F}^{e_j}(t)\,\alpha_j + \sum_{\substack{|m^j|\geq 2 \\ (m^j,\lambda(t))\equiv\lambda_j(t)}} \tilde{F}^{m^j}(t)\left(\alpha_0^{(0)}\right)^{m_0^j}\left(\alpha_1^{(0)}\right)^{m_1^j}\left(\alpha_2^{(0)}\right)^{m_2^j},$$

где $m^j = \left(m_0^j, m_1^j, m_2^j\right)-$ мультииндекс, то задача (24) имеет нулевое решение тогда и только тогда, когда

$$(w^0 + A^{-1}(0)H^{(0)}(0), \chi_j(0)) = 0, j = \overline{0,2}. \qquad (29)$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* 1) – 4) . *Тогда для того чтобы имел место предельный переход*

$$\|w(t,\varepsilon) - \bar{\bar{w}}(t)\|_{C[0,T]} \to 0 \ (\varepsilon \to +0)\,, \qquad (**)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (29). При этом $\bar{\bar{w}}(t) \equiv w_0^{(0)}(t)$.

Замечание. Равенства (29) означают, что класс инициализации $\Sigma = \left\{w^0, H(t), B(t,s)\right\}$ не зависит от ядра $B(t,s)$ и что начальный вектор w^0 совпадает с предельным решением $\bar{\bar{w}}(t) = -A^{-1}(t) H^{(0)}(t) \equiv -A^{-1}(t) H(t)$ в начальный момент времени $t = 0$. Этот факт является естественным для сингулярно возмущенных задач, так как именно рассогласование начального условия с предельным решением в начальный момент $t = 0$ и порождает пограничный слой, делающий невозможным равномерный переход $(**)$ на всем отрезке времени $[0, T]$.

§6. Пример

В качестве иллюстрации разработанного алгоритма рассмотрим следующую интегродифференциальную задачу:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^3 \tfrac{dy}{dt} = \int_0^t (t-s)\left[(t-s-1)\, y(s,\varepsilon) - \varepsilon y'(s,\varepsilon) - \varepsilon^2 y''(s,\varepsilon)\right] + \\ &+\varepsilon^3 y^3, \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \ \ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь: $K_0(t,s) = t - s - 1$, $K_1(t,s) = K_2(t,s) \equiv -1$, $h(t) \equiv 0$, $f(y,t) = y^3$. При этом задача (4) имеет вид $(w = \{y, z, v\})$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon \tfrac{dw}{dt} = A(t)\, w + \int\limits_0^t B(t,s)\, w(s)\ ds + \varepsilon F(w,t,\varepsilon), \\ &w(0,\varepsilon) = w^0(\varepsilon); \end{aligned}\right. \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon \tfrac{dw}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} w + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} w(s,\varepsilon) + \\ &+\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6yz^2 + 3y^2 v \end{pmatrix}, \ \ w(0,\varepsilon) = w^0(\varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} y^0 \\ \varepsilon \left(y^0\right)^3 \\ 3\varepsilon^2 \left(y^0\right)^5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{31}$$

Спектр матрицы $A(t) \equiv A$ образуют числа $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = +i$. Ясно, что мы имеем дело с резонансным случаем задачи (30). Вычислим собственные векторы матриц A и A^* :

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \ \chi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{i}{4} \\ -\frac{i}{2} \\ -\frac{1}{4} - \frac{i}{4} \end{pmatrix}, \ \chi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{i}{4} \\ \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{4} + \frac{i}{4} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Регуляризацию задачи (31) произведём с помощью переменных

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_0 ds = -\frac{t}{\varepsilon}, \ \ \tau_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1 ds = -\frac{it}{\varepsilon}, \ \ \tau_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2 ds = +\frac{it}{\varepsilon}. \tag{33}$$

При этом получим сначала частично регуляризованную задачу(6). Производя в ней регуляризацию интегрального члена в пространстве U (многочленов по экспонентам вида (8)), а затем определяя решение расширенной задачи (14) в виде ряда (12), получим итерационные задачи (15_k). Поскольку мы ограничимся построением главного члена асимптотики решения исходной задачи (30), то выпишем только первые две итерационные задачи:

$$L_0 w_0 \equiv \sum_{j=0}^{2} \lambda_j \frac{\partial w_0}{\partial \tau_j} - A w_0 = 0, w_0(0,0) = w_0^0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{34_0}$$

$$L_0 w_1 = -\frac{\partial w_0}{\partial t} + R_1 w_0 + \hat{F}\left(w_0, t, 0\right), w_1(0,0) = w_1^0. \tag{34_1}$$

Задача (34_0) имеет в пространстве U следующее решение (см. формулы (21) и (32)):

$$w_0\left(t, \tau\right) =$$

$$= \alpha_0\left(t\right)\varphi_0 e^{\tau_0} + \alpha_1\left(t\right)\varphi_1 e^{\tau_1} + \alpha_2\left(t\right)\varphi_2 e^{\tau_2} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_0 e^{\tau_0} + \alpha_1 e^{\tau_1} + \alpha_2 e^{\tau_2} \\ -\alpha_0 e^{\tau_0} - i\alpha_1 e^{\tau_1} + i\alpha_2 e^{\tau_2} \\ \alpha_0 e^{\tau_0} - \alpha_1 e^{\tau_1} - \alpha_2 e^{\tau_2} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Подчиняя (35) начальному условию $w_0(0,0) = w_0^0$, найдем значения $\alpha_j\left(0\right):$

$$\alpha_0\left(0\right) = \left(\begin{pmatrix} y^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = \frac{y^0}{2},$$

$$\alpha_1\left(0\right) = \left(\begin{pmatrix} y^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 - i/4 \\ -i/2 \\ -1/4 - i/4 \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) y^0, \tag{36}$$

$$\alpha_2\left(0\right) = \left(\begin{pmatrix} y^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 + i/4 \\ i/2 \\ -1/4 + i/4 \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right) y^0.$$

Вычислим теперь выражения $R_1 w_0$ и $F(w_0, t, 0)$ в правой части системы (34_1) :

$$\begin{aligned}
&R_1 w_0(t,\tau) = R_1\left(\alpha_0(t)\varphi_0 e^{\tau_0} + \alpha_1(t)\varphi_1 e^{\tau_1} + \alpha_2(t)\varphi_2 e^{\tau_2}\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{2}\left(\frac{B(t,t)\alpha_j(t)\varphi_1}{\lambda_j}e^{\tau_j} - \frac{B(t,0)\alpha_j(0)\varphi_1}{\lambda_j}\right) = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\alpha_0(t) \end{pmatrix} e^{\tau_0} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\alpha_0(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\alpha_1(t) \end{pmatrix} e^{\tau_1} - \\
&- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\alpha_1(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i\alpha_2(t) \end{pmatrix} e^{\tau_2} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i\alpha_2(0) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$F(w_0,t,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(6\alpha_0 \mathrm{e}^{\tau_0} + 6\alpha_1 \mathrm{e}^{\tau_1} + 6\alpha_2 \mathrm{e}^{\tau_2}\right)\left(-\alpha_0 \mathrm{e}^{\tau_0} - i\alpha_1 \mathrm{e}^{\tau_1} + i\alpha_2 \mathrm{e}^{\tau_2}\right)^2 + \\ +3\left(\alpha_0 \mathrm{e}^{\tau_0} + \alpha_1 \mathrm{e}^{\tau_1} + \alpha_2 \mathrm{e}^{\tau_2}\right)^2\left(\alpha_0 \mathrm{e}^{\tau_0} - \alpha_1 \mathrm{e}^{\tau_1} - \alpha_2 \mathrm{e}^{\tau_2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9e^{3\tau_2}\alpha_2^3 - 9e^{2\tau_2+\tau_0}\alpha_0\alpha_2^2 - 3e^{2\tau_2+\tau_1}\alpha_1\alpha_2^2 + 6e^{\tau_2+\tau_0+\tau_1}\alpha_0\alpha_1\alpha_2 - \\ -9e^{\tau_0+2\tau_1}\alpha_0\alpha_1^2 - 9e^{3\tau_1}\alpha_1^3 + 12ie^{\tau_0+2\tau_1}\alpha_0\alpha_1^2 + 12ie^{2\tau_0+\tau_1}\alpha_0^2\alpha_1 - \\ -12ie^{2\tau_2+\tau_0}\alpha_0\alpha_2^2 - 12ie^{\tau_2+2\tau_0}\alpha_0^2\alpha_2 + 9e^{\tau_2+2\tau_0}\alpha_0^2\alpha_2 - 3e^{\tau_2+2\tau_1}\alpha_1^2\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

При вложении вектор-функции $F(w_0, t, 0)$ в пространство U удержим только экспоненты e^{τ_j} первого измерения:

$$\begin{aligned}
&\hat{F}^{(1)}(w_0,t,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3e^{\tau_2}\alpha_1\alpha_2^2 + 6e^{\tau_0}\alpha_0\alpha_1\alpha_2 - 3e^{\tau_1}\alpha_1^2\alpha_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} e^{\tau_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_1^2\alpha_2 \end{pmatrix} e^{\tau_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_1\alpha_2^2 \end{pmatrix} e^{\tau_2}.
\end{aligned}$$

В итоге члены правой части системы (34_1), содержащие экспоненты первого измерения, будут такими:

$$H^{(1)}(t,\tau) = -\sum_{j=0}^{2}\dot{\alpha}_j\varphi_j e^{\tau_j} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\alpha_0\left(t\right) \end{pmatrix} e^{\tau_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\alpha_1\left(t\right) \end{pmatrix} e^{\tau_1} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i\alpha_2\left(t\right) \end{pmatrix} e^{\tau_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} e^{\tau_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_1^2\alpha_2 \end{pmatrix} e^{\tau_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_1\alpha_2^2 \end{pmatrix} e^{\tau_2}.$$

Подчиняя эту вектор-функцию условиям ортогональности (17), получим систему уравнений

$$\begin{array}{l} -\dot{\alpha}_0 - \alpha_0 + 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2 = 0, \\ -\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}\left(1+i\right)\alpha_1 + \frac{3}{4}\left(1-i\right)\alpha_1^2\alpha_2 = 0, \\ -\dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2}\left(1-i\right)\alpha_2 + \frac{3}{4}\left(1+i\right)\alpha_1\alpha_2^2 = 0. \end{array} \tag{37}$$

Умножая второе уравнение этой системы на α_2, а третье уравнение на α_1 и складывая результаты, получим уравнение $-\left(\alpha_1\alpha_2\right)^{\bullet} + \left(\alpha_1\alpha_2\right) + \frac{3}{2}\left(\alpha_1\alpha_2\right)^2 = 0$. Из равенств (36) находим начальное условие $\left(\alpha_1\alpha_2\right)(0) = \frac{\left(y^0\right)^2}{8}$, а значит, и функцию

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{2\left(y^0\right)^2}{3e^{-t}\left(y^0\right)^2 - 3\left(y^0\right)^2 + 16e^{-t}}. \tag{38}$$

Подставляя эту функцию в (37), найдем однозначно решение (35) первой итерационной задачи (34_0). Производя в нем сужение на функциях (33), получим главный член $w_{\varepsilon 0}\left(t\right)$ асимптотики решения задачи (31). Первая компонента $y_{\varepsilon 0}\left(t\right)$ вектор-функции $w_{\varepsilon 0}\left(t\right)$ будет главным членом асимптотики для исходной задачи (30).

Для решения задачи инициализации надо выбрать (в соответствии с условиями (29)) значение $y^0 = 0$. Тогда предельным решением будет функция $\bar{\bar{y}}\left(t\right) \equiv 0$ и она совпадает с точным решением задачи (31). Вряд ли когонибудь заинтересует этот случай.

Проанализируем функцию (38). Она имеет вертикальную асимптоту $t = -\ln\left(\frac{3b^2}{3b^2+16}\right)$, где $b = \left(y^0\right)^2$. Для того чтобы решение системы (37) существовало на отрезке $[0,T]$, надо, чтобы асимптота проходила правее прямой $t = T$. В противном случае система (37) не имеет решений на отрезке $[0,T]$, и в этой ситуации мы не можем построить асимптотическое решение задачи (30). Варьируя начальное условие y^0 в соответствии с неравенством $-\ln\left(\frac{3b^2}{3b^2+16}\right) > T$, мы укажем область начальных данных y^0, для которых существует построенная нами асимптотика. Заметим, что не всегда в резонансной задаче (3) условия ортогональности (24) будут нелинейными. Например, если в уравнении (30) вместо нелинейности $\varepsilon^3 y^3$ будет стоять нелинейность $\varepsilon^3 y^2$, то в системе (37) будут отсутствовать нелинейные члены и все уравнения будут линейными: $-\dot{\alpha}_0 - \alpha_0 = 0,\ -\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}(1+i)\,\alpha_1 = 0,\ -\dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2}(1-i)\,\alpha_2 = 0$. В этом случае областью начальных данных y^0 будет вся действительная ось Oy, т.е. построение асимптотики решения исходной задачи будет возможным для любых начальных значений y^0.

Список литературы

[1] **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных интегральных систем с диагональным вырождением ядра. *Дифференц. Уравн.*, **37**(2001),10,1330-1341.

[2] **Ломов С.А.** *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* Москва, Наука, **1981.**

[3] **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Сингулярно возмущенные нелинейные интегродиф-ференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами.*Мат.Заметки*, **72**(2002),5, 654-664.

[4] **Срубщик Л. С., Юдович В. И.** О применении метода Ньютона в задачах асимптотического интегрирования нелинейных уравнений .*Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской конференции по применению методов функционального анализа к решению нелинейных задач.* Баку, **1975**.

[5] **Ломов С.А., Ломов И.С.** *Основы математической теории пограничного слоя.* Москва. Изд-во Московского университета, **2011.**

[6] **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Метод регуляризации для нелинейных интегро-дифференциальных систем типа Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами .*Дифференц. Уравн.*,**51** 2015, 2,251-262 .

[7] **Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф.** Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части. *Дифференц. Уравн.*, **47** 2011 ,4, 519-536.