

**О диапазоне быстрого захвата
для систем фазовой синхронизации
с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора**

Кузнецов Н.В.^{1,2}, Благов М.В.¹, Александров К.Д.¹,
Юлдашев М.В.¹, Юлдашев Р.В.¹

¹ Санкт-Петербургский Государственный Университет,
nkuznetsov239@gmail.com, mikhail.blagov@gmail.com

² Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Аннотация

Системы фазовой синхронизации (СФС) являются классическими нелинейными системами управления для подстройки частоты и фазы в электрических цепях. В данной работе рассматривается задача оценки диапазона быстрого захвата для классической СФС с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора и фильтрами первого порядка. Обсуждается аналитико-численный метод для оценки диапазона быстрого захвата. Результаты, полученные с его помощью, сравниваются с ранее известными.

Ключевые слова: СФС, системы фазовой синхронизации, ФАПЧ, фазовая автоподстройка частоты, нелинейный анализ, диапазон захвата без проскальзывания, диапазон быстрого захвата.

Abstract

Phase-locked loops (PLL) are classical nonlinear control systems that are used to tune frequency and phase in electrical circuits. In this article a problem of the lock-in range estimation for classical PLLs with piecewise-linear phase detector characteristic and first-order filters is studied. A new analytical-numerical method

of the lock-in range estimation is discussed. Estimations obtained using this method are compared with previously known ones.

Key words: PLL, Phase-locked loops, nonlinear analysis, lock-in range.

1 Введение

Системы фазовой синхронизации (СФС) получили широкое применение в телекоммуникациях и компьютерной архитектуре [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Важными характеристиками системы являются *диапазоны удержания, захвата и быстрого захвата* (захвата без проскальзывания циклов). Для классических моделей СФС с различными фильтрами первого порядка диапазоны удержания и захвата хорошо изучены (см., например [9]).

В 1966 году Ф. Гарднером была предложена концепция диапазона быстрого захвата (которая в последнее время получила широкое распространение в инженерной литературе¹) и была поставлена задача его строгого определения. Строгий подход к решению задачи Гарднера был предложен в работах [24, 25, 26].

В данной статье уточняются оценки диапазона быстрого захвата, полученные ранее в работах [9, 27, 25] для классических СФС с фильтром первого порядка и обобщённой треугольной характеристикой фазового детектора. Аналитические результаты проверяются моделированием.

2 Математическая модель СФС

Рассмотрим математическую модель СФС в пространстве фаз сигналов [28, 1, 29, 30] (рис. 1). Здесь $\theta_{\text{ref}}(t)$ — это фаза входного сигнала с постоянной частотой $\dot{\theta}_{\text{ref}}(t) \equiv \omega_{\text{ref}}$. Фаза подстраиваемого генератора — $\theta_{\text{vco}}(t)$, мгновенная частота подстраиваемого генератора — $\dot{\theta}_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco}}(t)$. Фазовый детектор генерирует сигнал $v_e(t)$, который называется характеристикой фазового детектора. В общем случае он зависит от форм сигналов и конструкции СФС [30]. У СФС, работающей с импульсными сигналами, характеристика фазового детектора будет треугольной. Другим примером СФС с треугольной характеристикой является модифицированная квадратурная схема Костаса [31, 8, 7, 32].

¹См. работы [10, стр.34-35], [11, стр.49], [12, стр.4],[13, стр.24], [14, стр.749], [15, стр.56], [16, стр.112], [17, стр.138], [18, стр.576], [19, стр.809], [20, стр.258], [21, стр.417], [22, стр.92], [23, стр.387].

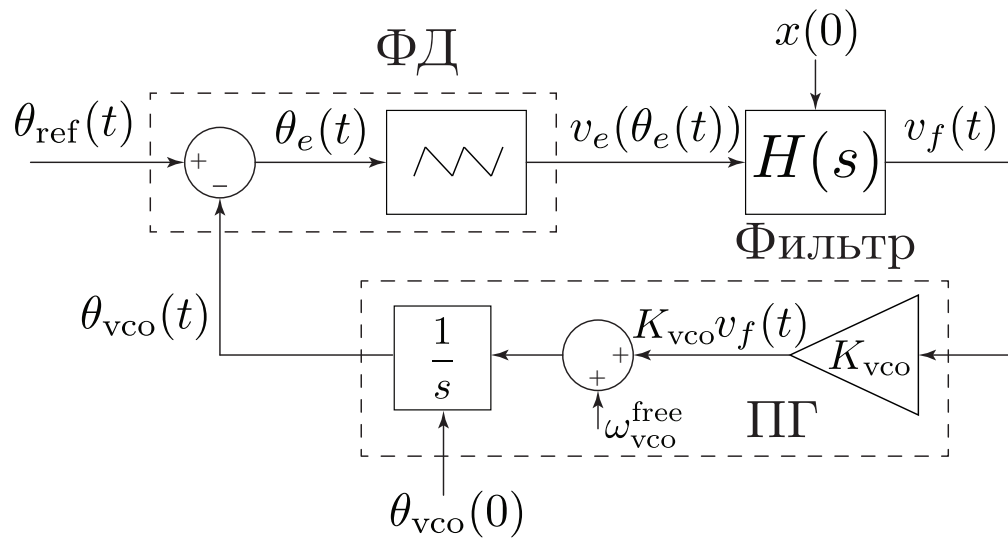


Рис. 1: Модель классической СФС с треугольной характеристикой фазового детектора в пространстве фаз сигналов.

В данной работе рассматривается обобщённая кусочно-линейная характеристика (рис. 2):

$$v_e(\theta_e) = \begin{cases} k\theta_e - 2\pi kn, & \text{if } -\frac{1}{k} + 2\pi n \leq \theta_e(t) \leq \frac{1}{k} + 2\pi n, \\ -\frac{1}{\pi - \frac{1}{k}}\theta_e + \frac{1}{\pi - \frac{1}{k}}(\pi + 2\pi n), & \text{if } \frac{1}{k} + 2\pi n \leq \theta_e(t) \leq -\frac{1}{k} + 2\pi(n + 1), \end{cases} \quad (1)$$

где $k \in (\frac{1}{\pi}, +\infty)$, $n \in \mathbb{Z}$. В частном случае $k = \frac{2}{\pi}$ такая характеристика является треугольной, а в случае $k = \frac{1}{\pi}$ — пилообразной.

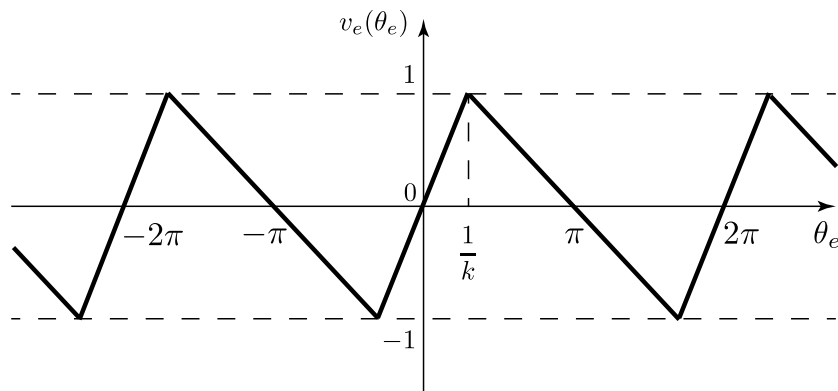


Рис. 2: Кусочно-линейная характеристика фазового детектора

Связь между входом $v_e(\theta_e(t))$ и выходом $v_f(t)$ фильтра описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\tau_1} v_e(\theta_e(t)), \\ v_f(t) &= x(t) + \frac{\tau_2}{\tau_1} v_e(\theta_e(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x(t)$ — состояние фильтра, передаточная функция имеет вид $H(s) = \frac{1+\tau_2 s}{\tau_1 s}$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$.

Сигнал управления $v_f(t)$ изменяет частоту подстраиваемого генератора:

$$\dot{\theta}_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco}}^{\text{free}} + K_{\text{vco}} v_f(t), \quad (3)$$

где $\omega_{\text{vco}}^{\text{free}}$ — частота свободных колебаний подстраиваемого генератора $K_{\text{vco}} > 0$ — коэффициент усиления.

Разность между частотой входного сигнала и частотой свободных колебаний подстраиваемого генератора обозначается как ω_e^{free} :

$$\omega_e^{\text{free}} = \omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{vco}}^{\text{free}}. \quad (4)$$

Объединяя уравнения (2), (3) и (4), получаем *нелинейную математическую модель в пространстве фаз сигналов*:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\tau_1} v_e(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e = \omega_e^{\text{free}} - K_{\text{vco}} \left(x + \frac{\tau_2}{\tau_1} v_e(\theta_e) \right). \end{cases} \quad (5)$$

Начальное состояние системы определяется $\theta_e(0)$ (начальный сдвиг фазы сигнала подстраиваемого генератора по отношению к фазе входного сигнала) и $x(0)$ (начальное состояние фильтра).

Отметим, что система (5) не меняется при преобразовании

$$(\omega_e^{\text{free}}, x(t), \theta_e(t)) \rightarrow (-\omega_e^{\text{free}}, -x(t), -\theta_e(t)), \quad (6)$$

что позволяет проводить исследование (5) только для $\omega_e^{\text{free}} > 0$ и ввести понятие *отклонения частоты*:

$$|\omega_e^{\text{free}}| = |\omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{vco}}^{\text{free}}|. \quad (7)$$

Рассмотрим условия полной синхронизации для нелинейной математической модели СФС в пространстве фаз сигналов (5), т.е. разность частот равняется 0 и разность фаз $\theta_e(t)$ постоянна:

$$\dot{\theta}_e(t) \equiv 0, \quad \theta_e(t) \equiv \theta_{eq}.$$

Состояние фильтра также постоянно $x(t) \equiv x_{eq}$. Состояния равновесия (θ_{eq}, x_{eq}) определяются из равенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1} v_e(\theta_{eq}(\omega_e^{\text{free}})) &= 0, \\ \omega_e^{\text{free}} - K_{\text{vco}} x_{eq}(\omega_e^{\text{free}}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь состояния равновесия

$$(\theta_{eq}^{nu}, x_{eq}^{nu}) = \left(\pi + 2\pi n, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} \right), n \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

устойчивы, а состояния равновесия

$$(\theta_{eq}^{ns}, x_{eq}^{ns}) = \left(2\pi n, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} \right), n \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

являются седлами. Здесь и далее верхний индекс 's' означает устойчивое состояние равновесия, а верхний индекс 'u' — неустойчивое.

3 Диапазон быстрого захвата

Максимальный интервал отклонений частоты $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, \omega_p)$, для которых модель СФС в пространстве фаз сигналов достигает состояния равновесия для любого начального состояния называется *диапазоном захвата* (см., например, [24, 25]). Для модели (5) может быть показано, что диапазон захвата неограничен (см., например, [33, 34]).

Определение 1 Если $\sup_{t>0} |\theta_e(0) - \theta_e(t)| > 2\pi$, говорят, что происходит проскальзывание циклов.

Отметим, что это определение проскальзывания циклов допускает попадание траектории системы по сепаратрисе в седловое состояние равновесия.

Определение 2 [24, 25, 35] *Диапазоном быстрого захвата называется максимальный интервал отклонений частот $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, \omega_l)$ внутри диапазона захвата, такой что для модели СФС в пространстве фаз сигналов, находящейся в состоянии равновесия, после резкого изменения частоты ω_e^{free} внутри этого интервала достигает состояния равновесия без проскальзывания циклов.*

Для любого ω_e^{free} из диапазона захвата фазовый портрет системы (5) имеет области, где у траекторий нет проскальзывания циклов (область быстрого притяжения $D_{\text{lock-in}}(\omega_e^{\text{free}})$). Область быстрого притяжения является объединением локальных областей быстрого притяжения $D_{\text{lock-in}}(\omega_e^{\text{free}}, \theta_{\text{eq}}^{n(s,u)}, x_{\text{eq}}^{n(s,u)})$, $n \in \mathbb{Z}$ каждая из которых имеет свою форму (рис. 3).

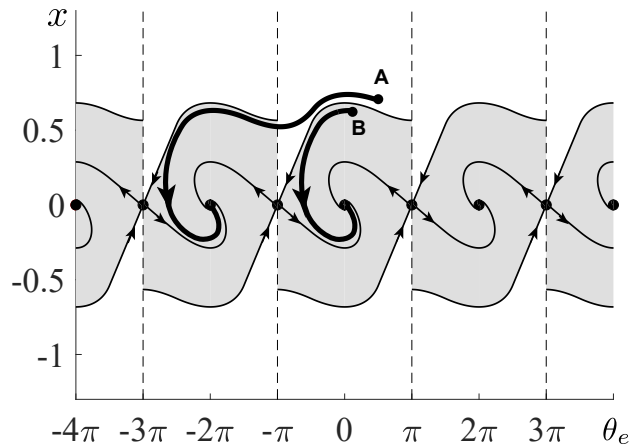


Рис. 3: Фазовый портрет модели (5) с параметрами $H(s) = \frac{1+s\tau_2}{s\tau_1}$, $\tau_1 = 0.0633$, $\tau_2 = 0.0225$, $K_{\text{vco}} = 250$, $\omega_e^{\text{free}} = 0$. Серой заливкой отмечены локальные области быстрого захвата для устойчивых состояний равновесия.

Здесь для траектории, начинающейся в точке A происходят проскальзывания циклов, в отличие от траектории, начинающейся в точке B . Таким образом, даже для нулевой расфазировки можно наблюдать проскальзывание циклов.

4 Аналитическая оценка диапазона быстрого захвата

После переходного процесса СФС с математической точки зрения может находиться в одном из состояний равновесия. Резкое изменение частоты сдвигает фазовый портрет системы (5) по вертикали (рис. 4, левое верхнее изображение). При этом смещаются состояния равновесия и происходит новый переходный процесс. Опишем способ определения максимальной частоты ω_l , для которой он завершится без проскальзывания циклов. Положим отклонение частот $|\tilde{\omega}| = 0$. Тогда состояния равновесия системы (5), находятся внутри $D_{\text{lock-in}}(0)$ и проскальзывания циклов не происходит. Далее увеличиваем $|\tilde{\omega}|$ до тех пор, пока состояния равновесия для $\omega_e^{\text{free}} = \pm |\tilde{\omega}|$ не достигнут границ пересечения $D_{\text{lock-in}}(-|\tilde{\omega}|)$ и $D_{\text{lock-in}}(|\tilde{\omega}|)$ соответственно (рис. 4, правое

верхнее изображение). Этот случай соответствует частоте быстрого захвата ω_l . Дальнейшее увеличение $|\tilde{\omega}|$ ведёт к тому, что симметричные состояния равновесия (5) покидают пересечение областей быстрого захвата.

Отметим, что в работах [27, 9, 25] диапазон захвата без проскальзывания был определён с использованием только устойчивых состояний равновесия. С математической точки зрения, при таких оценках возможно проскальзывание циклов при переключении из неустойчивого состояния равновесия (рис. 4, правое нижнее изображение).

Для определения частоты быстрого захвата ω_l системы (5) по неустойчивым состояниям равновесия получим соотношение

$$x_{eq}(-\omega_l) = Q_0 \left(\theta_{eq}^{(-1)u}, \omega_l \right), \quad (10)$$

где $Q_0(\theta_{eq}^{(-1)u}, \omega_l)$ — сепаратриса седла $(\theta_{eq}^{0u}, \omega_l)$. Отсюда для частоты быстрого захвата ω_l имеем:

$$-\frac{\omega_l}{K_{vco}} = \frac{\omega_l}{K_{vco}} + Q_0(\theta_{eq}^{-1u}, 0), \quad (11)$$

$$\omega_l = -\frac{K_{vco} Q_0(\theta_{eq}^{-1u}, 0)}{2}. \quad (12)$$

Для определённой характеристики фазового детектора (k в (1) фиксировано) частота быстрого захвата может быть рассмотрена как функция от параметров системы (5): $\omega_l = \omega_l(K_{vco}, \tau_1, \tau_2)$, т.е. каждой тройке $(K_{vco}, \tau_1, \tau_2)$ соответствует своё значение ω_l . Для того, чтобы представить зависимость частоты быстрого захвата ω_l от параметров модели (5) на двумерном графике, проведём следующую процедуру. Рассмотрим линейное преобразование $x \rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1}x$, $t \rightarrow \tau_2 t$. Система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_e(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e = \tau_2 \omega_e^{\text{free}} - \frac{K_{vco} \tau_2^2}{\tau_1} (x + v_e(\theta_e)). \end{cases} \quad (13)$$

Такое линейное преобразование изменяет масштаб фазового портрета системы (5) по переменной x и не влияет на проскальзывания циклов и диапазон быстрого захвата.

Для системы с изменённым масштабом (13) значение $\tau_2 \omega_l$ является функцией *одного* параметра $\frac{K_0 \tau_2^2}{\tau_1}$. Отметим, что для системы (13) соотношение (12) принимает вид

$$\omega_l = -\frac{K_{vco} \tau_2 Q_0(\theta_{eq}^{-1u}, 0)}{2\tau_1}. \quad (14)$$

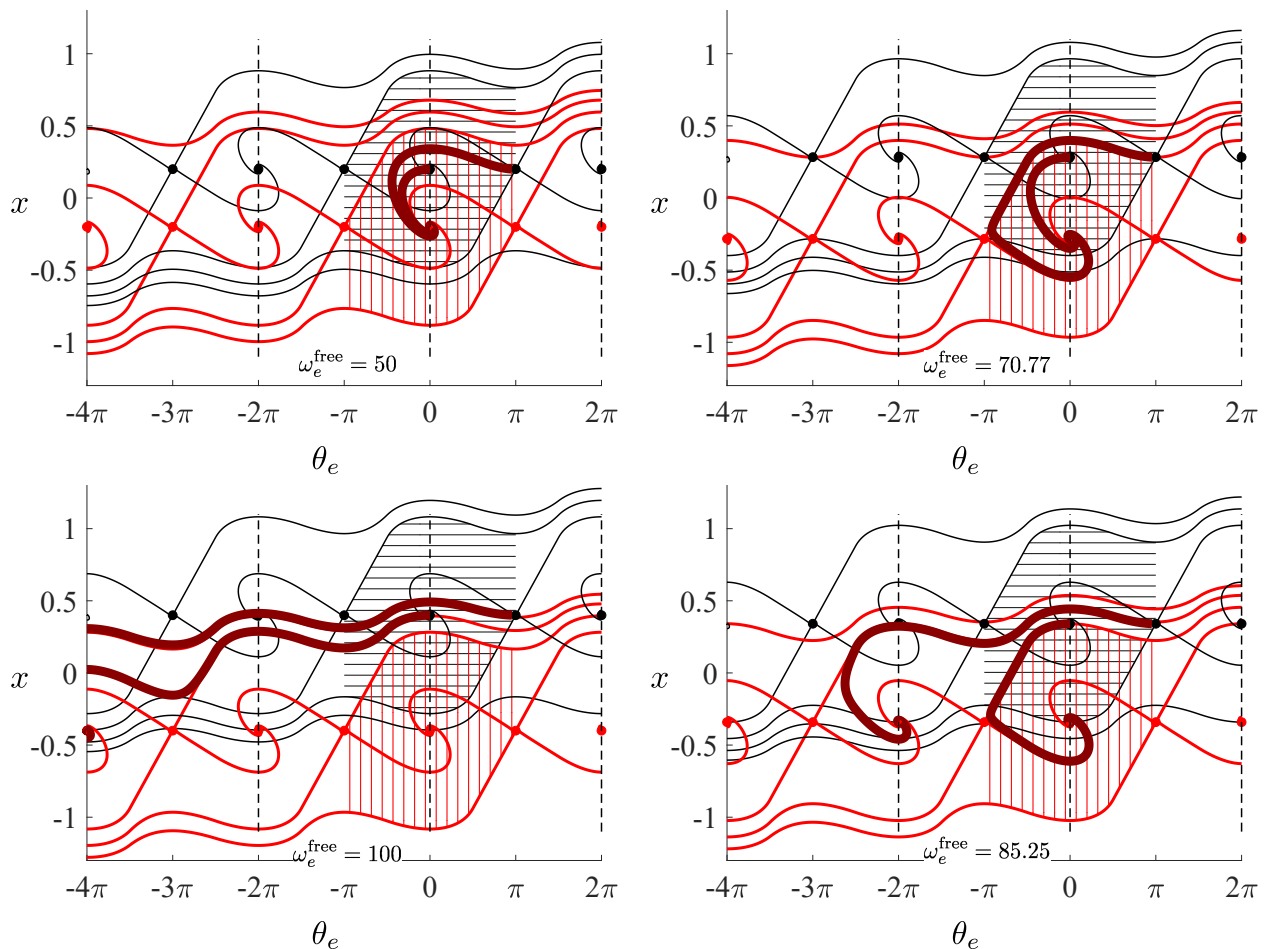


Рис. 4: Фазовые портреты для модели (5) с параметрами: $H(s) = \frac{1+s\tau_2}{s\tau_1}$, $\tau_1 = 0.0633$, $\tau_2 = 0.0225$, $K_{vco} = 250$. Чёрные (тонкие) линии соответствуют модели с положительным $\omega_e^{\text{free}} = |\tilde{\omega}|$. Красные (средней толщины) линии — модели с отрицательным $\omega_e^{\text{free}} = -|\tilde{\omega}|$. Состояния равновесия обозначены точками, сепаратрисы входят в седла и выходят из них, области быстрого захвата заштрихованы (черные горизонтальные линии для $\omega_e^{\text{free}} > 0$, красные вертикальные линии для $\omega_e^{\text{free}} < 0$). Бордовые (толстые) линии из чёрного состояния равновесия после резкого изменения $\omega_e^{\text{free}} = -|\tilde{\omega}|$. Левые верхняя и нижняя иллюстрации изображают поведение системы при $\omega_e^{\text{free}} < \omega_1$ и $\omega_e^{\text{free}} > \omega_1$, соответственно. Правые верхняя и нижняя картинка изображают оценку диапазона быстрого захвата в соответствии со всеми состояниями равновесия ($\omega_1 \approx 70.77$) и только с устойчивыми состояниями равновесия ($\omega_1 \approx 85.25$), соответственно.

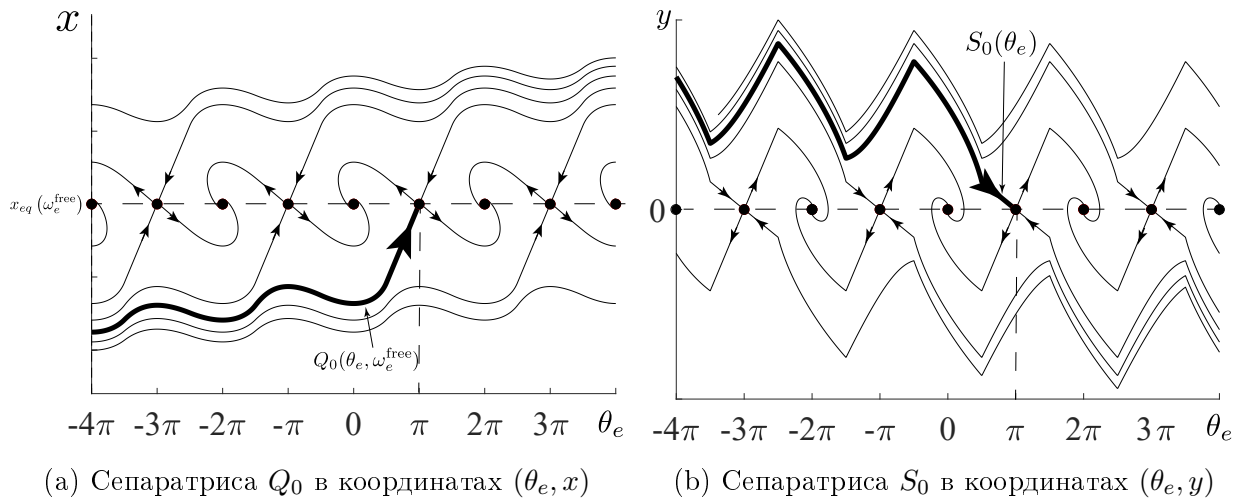


Рис. 5: Фазовые портреты (13) и (15) соответственно.

Перепишем (13), обозначая $a = \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}\tau_2^2}{\tau_1}}$ и применяя преобразования $t \rightarrow \frac{1}{a}t$ и $y = \frac{\tau_2\omega_e^{\text{free}}}{a} - a(x + v_e(\theta_e))$:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_e = y, \\ \dot{y} = -av'_e(\theta_e)y - v_e(\theta_e). \end{cases} \quad (15)$$

Это позволяет исключить ω_e^{free} из дальнейшего рассмотрения.

Отметим, что состояния равновесия (θ_{eq}, y_{eq}) системы (13) и соответствующие состояния равновесия (θ_{eq}, x_{eq}) системы (15) одного и того же типа и связаны соотношением

$$(\theta_{eq}, y_{eq}) = \left(\theta_{eq}, \frac{\tau_2\omega_e^{\text{free}}}{a} - ax_{eq} \right). \quad (16)$$

Сепаратриса $Q_0(\theta_e, \omega_e^{\text{free}})$ из (14) соответствует сепаратрисе $S_0(\theta_e)$ на фазовой плоскости (15) и выполнено соотношение

$$Q_0(\theta_e, \omega_e^{\text{free}}) = \frac{1}{a} \left(\frac{\tau_2\omega_e^{\text{free}}}{a} - S_0(\theta_e) \right). \quad (17)$$

Следовательно, ω_l определяется формулой

$$\omega_l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1}} S_0(\theta_{eq}^{-1u}). \quad (18)$$

Чтобы получить $S_0(\theta_{eq}^{-1u}) = S_0(-\pi)$, поделим второе уравнение системы (15) на первое²:

²Подобный способ рассмотрения используется в работе [36] для оценки частоты выхода из синхронизма для СФС с треугольной характеристикой фазового детектора.

$$\frac{dy}{d\theta_e} = -av'_e(\theta_e) - \frac{v_e(\theta_e)}{y}. \quad (19)$$

После этого следует рассмотреть траектории (19) на трёх отрезках по θ_e и найти для них траектории системы на фазовой плоскости (см. рис. 6).

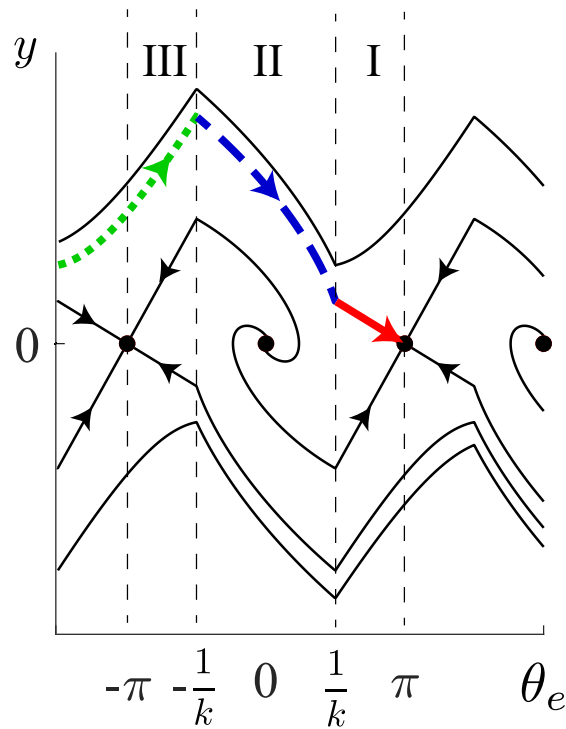


Рис. 6: Фазовый портрет (15), иллюстрирующий шаги процесс интегрирования сепаратрисы. Красная (толстая сплошная) линия на отрезке I — собственный вектор седла $(\pi, 0)$. Синяя (пунктирная) линия на отрезке II и зелёная (пунктирная) линия на отрезке III — интегральные кривые.

Для отрезка $\theta_e \in I = [\frac{1}{k}, \pi]$, сепаратрисой является собственный вектор седлового состояния равновесия. Траектория системы представляет из себя прямую

$$y = \frac{\sqrt{a^2 + 4(\pi - \frac{1}{k})} - a}{2(\pi - \frac{1}{k})} (\pi - x), \quad (20)$$

Тогда

$$S\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + 4(\pi - \frac{1}{k})} - a}{2}. \quad (21)$$

Для $\theta_e \in \text{II} = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ уравнение (19) примет вид

$$\frac{dy}{d\theta_e} = -ak - \frac{k\theta_e}{y}. \quad (22)$$

После замены $z = \frac{y}{\theta_e}$ уравнение (22) сводится к уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{zdz}{z^2 + akz + k} = -\frac{d\theta_e}{\theta_e}. \quad (23)$$

Взяв интеграл от левой и правой частей и вернувшись обратно к координатам (θ_e, y) , получаем общее решение уравнения (22) в виде $F(\theta_e, y, a, k) + C_F = 0$.

Аналогично для $\theta_e \in \text{III} = [-\pi, -\frac{1}{k}]$:

$$\frac{dy}{d\theta_e} = \frac{1}{\pi - \frac{1}{k}} \left(a + \frac{\theta_e + \pi}{y} \right). \quad (24)$$

После замены $z = \frac{y}{\theta_e + \pi}$ уравнение примет вид

$$\left(\pi - \frac{1}{k} \right) \frac{zdz}{\left(\pi - \frac{1}{k} \right) z^2 - az - 1} = -\frac{d\theta_e}{\theta_e + \pi}. \quad (25)$$

Взяв интеграл от левой и правой частей и вернувшись обратно к координатам (θ_e, y) , получаем общее решение уравнения (24) в виде $G(\theta_e, y, a, k) + C_G = 0$.

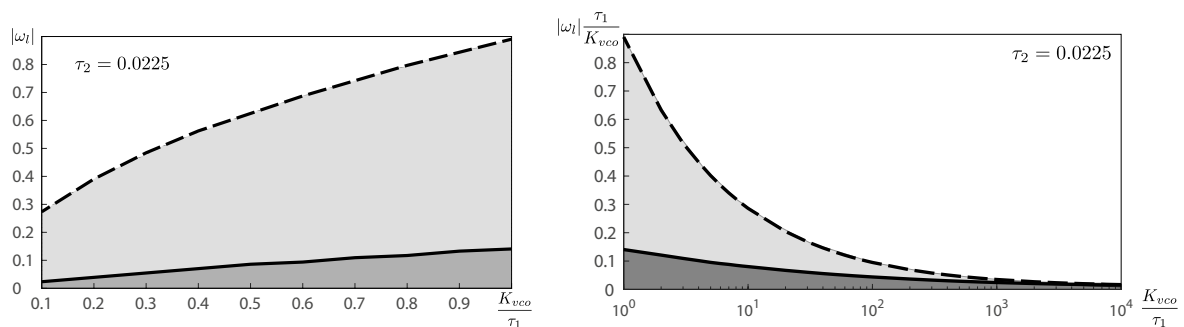


Рис. 7: Диаграммы диапазона быстрого захвата для классической СФС с треугольной характеристикой фазового детектора и фильтром типа «идеальный интегратор» при $\tau_2 = 0.0225$. Прерывистая линия и светло-серая заливка соответствуют оценке, данной в [27], сплошная линия и тёмно-серая заливка — оценке, данной в этой работе.

Константы интегрирования следует определить, установив для каждого из промежутков краевую задачу: $(\theta_e, y) = (\frac{1}{k}, S(\frac{1}{k}))$ и $(\theta_e, y) = (-\frac{1}{k}, S(-\frac{1}{k}))$ соответственно. Здесь $S(-\frac{1}{k})$ — решение уравнения $F(\theta_e, y, a, k) + C_F = 0$ относительно y . Искомое $S(-\pi)$ — решение уравнения $G(\theta_e, y, a, k) + C_G$.

Для пропорционально интегрирующего фильтра с передаточной функцией $H(s) = \frac{1+\tau_2 s}{1+(\tau_1+\tau_2)s}$ можно провести аналогичные построения. В этом случае необходимо учитывать специфику нелинейного изменения положений состояний равновесия (рис. 8).

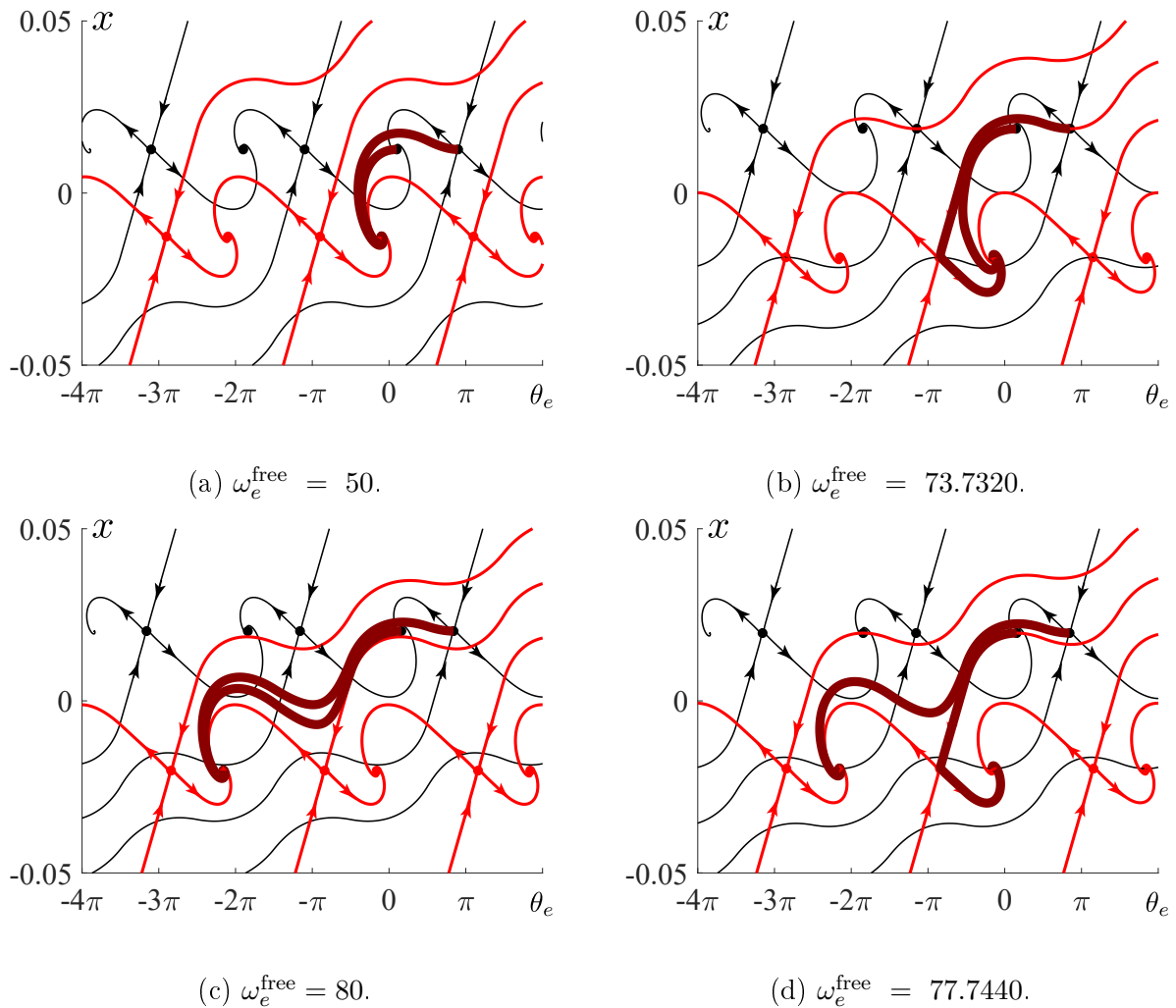


Рис. 8: Фазовый портрет СФС с пропорционально-интегрирующим фильтром $H(s) = \frac{1+\tau_2 s}{1+(\tau_1+\tau_2)s}$ и треугольной характеристикой фазового детектора для параметров $K_{\text{vco}} = 250$, $\tau_1 = 0.0225$, $\tau_2 = 0.0633$. На каждом изображении черные (тонкие) линии отвечают фазовому портрету до переключения частоты, красные (средней толщины) линии отвечают фазовому портрету после переключения частоты. Бордовые (толстые) линии отвечают состояниям синхронизации системы до переключения частоты.

Отметим, что деление уравнений и дальнейшее рассмотрение решений в виде неявных функций позволяет избавиться от времени и упростить выкладки, использовавшиеся для анализа СФС в работах [27, 37]. Более детально сравнение будет приведено в [38].

На рис.7 для $\tau_2 = 0.0225$ приведены диаграммы, полученные с помощью описанного метода и их сравнение с результатами из работы [27], где в определении диапазона учитывалось только устойчивое состояние равновесия.

5 Заключение

В данной работе обсуждается строгое определение диапазона быстрого захвата, приводится метод для вычисления диапазона быстрого захвата для классической СФС с обобщённой кусочно-линейной характеристикой фазового детектора. Результаты, полученные аналитическим методом, подтверждаются численным моделированием.

Благодарности

Данная работа выполнена при поддержке гранта Российского Научного Фонда №19-41-02002.

Список литературы

- [1] Viterbi A. Principles of coherent communications. New York: McGraw-Hill, 1966. P. 321.
- [2] Leonov G.A. Phase-locked loops. Theory and application // Automation and Remote Control. 2006. Vol. 10. P. 1573–1609.
- [3] Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Nonlinear dynamics of phase synchronization systems (in Russian). Nizhni Novgorod University Press, 2013.
- [4] Shakhtarin B.I., Sizykh V.V., Sidorkina Yu.A. Sinkhronizatsiya v radiosvyazi i radionavigatsii [Synchronization in radio communication and navigation] // Moscow, Goryachaya Liniya-Telekom Publ. 2011.
- [5] Best R.E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Application. 6th edition. McGraw-Hill, 2007. P. 490.

- [6] Kolumban G. Software Defined Electronics: A Revolutionary Change in Design and Teaching Paradigm of RF Radio Communications Systems // ICT Express. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 44 – 54.
- [7] Best R.E. Costas Loops: Theory, Design, and Simulation. Springer International Publishing, 2018.
- [8] Ladvánszky J. A Costas loop variant for large noise // Journal of Asian Scientific Research. 2018. Vol. 8, no. 3. P. 144–151.
- [9] Alexandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Pull-in range of the classical PLL with impulse signals // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 1. P. 562–567.
- [10] Best R.E. Phase-locked Loops: Design, Simulation, and Applications. McGraw Hill, 1984.
- [11] Kihara M., Ono S., Eskelinen P. Digital Clocks for Synchronization and Communications. Artech House, 2002. P. 269.
- [12] Abramovitch D. Phase-Locked Loops: A control Centric Tutorial // American Control Conf. Proc. Vol. 1. IEEE, 2002. P. 1–15.
- [13] De Muer B., Steyaert M. CMOS Fractional-N Synthesizers: Design for High Spectral Purity and Monolithic Integration. Springer, 2003.
- [14] Dyer S.A. Wiley Survey of Instrumentation and Measurement. Wiley, 2004.
- [15] Shu K., Sanchez-Sinencio E. CMOS PLL synthesizers: analysis and design. Springer, 2005.
- [16] Goldman S.J. Phase-Locked Loops Engineering Handbook for Integrated Circuits. Artech House, 2007.
- [17] Egan W.F. Phase-Lock Basics. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [18] Baker R.J. CMOS: Circuit Design, Layout, and Simulation. IEEE Press Series on Microelectronic Systems. Wiley-IEEE Press, 2011.
- [19] Ndjountche T. CMOS Analog Integrated Circuits: High-Speed and Power-Efficient Design. CRC Press, 2017.
- [20] Kroupa V.F. Frequency Stability: Introduction and Applications. IEEE Series on Digital & Mobile Communication. Wiley-IEEE Press, 2012. P. 328.

- [21] Roupheal T.J. *Wireless Receiver Architectures and Design: Antennas, RF, Synthesizers, Mixed Signal, and Digital Signal Processing*. Elsevier Science, 2014.
- [22] Purkayastha B.B., Sarma K.K. *A Digital Phase Locked Loop based Signal and Symbol Recovery System for Wireless Channel*. Springer, 2015.
- [23] Middlestead R.W. *Digital Communications with Emphasis on Data Modems: Theory, Analysis, Design, Simulation, Testing, and Applications*. Wiley, 2017.
- [24] Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Rigorous mathematical definitions of the hold-in and pull-in ranges for phase-locked loops // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, no. 11. P. 710–713.
- [25] Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory // *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Regular Papers*. 2015. Vol. 62, no. 10. P. 2454–2464.
- [26] Kuznetsov N. V. *Analytical-numerical methods for the study of hidden oscillations (Habilitation thesis, in Russian)*. Saint-Petersburg State University, 2016.
- [27] Aleksandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Lock-in range of classical PLL with impulse signals and proportionally-integrating filter // *arXiv preprint arXiv:1603.09363*. 2016.
- [28] Gardner F.M. *Phaselock techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1966. P. 182.
- [29] Shakhgil'dyan V.V., Lyakhovkin A.A. *Fazovaya avtopodstroika chastoty (in Russian)*. Moscow: Svyaz', 1966.
- [30] Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Analytical method for computation of phase-detector characteristic // *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Express Briefs*. 2012. Vol. 59, no. 10. P. 633–647.
- [31] Ladvánszky J. A Costas loop with differential coding // *IJCRR*. 2017. P. 20305–20310.
- [32] Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Leonov G.A. et al. Simulation of nonlinear models of QPSK Costas loop in MatLab Simulink // *2014 6th International*

- Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Vol. 2015-January. IEEE, 2014. P. 66–71.
- [33] Leonov G.A., Aleksandrov K.D. Frequency-Domain Criteria for the Global Stability of Phase Synchronization Systems // *Doklady Mathematics*. 2015. Vol. 92, no. 3. P. 764–768.
- [34] Alexandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Pull-in range of the PLL-based circuits with proportionally-integrating filter // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, no. 11. P. 720–724.
- [35] Best R.E., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop // *IFAC Annual Reviews in Control*. 2016. Vol. 42. P. 27–49.
- [36] Huque A.S., Stensby J.L. An exact formula for the pull-out frequency of a 2nd-order type II phase lock loop // *IEEE Communications Letters*. 2011. Vol. 15, no. 12. P. 1384–1387.
- [37] Shakhtarin B.I. Study of a piecewise-linear system of phase-locked frequency control // *Radiotechnica and elektronika* (in Russian). 1969. no. 8. P. 1415–1424.
- [38] Blagov M.V. Analytical-numerical methods of lock-in range estimation for two-dimensional PLL (thesis) (scientific supervisor — N.V. Kuznetsov). (in preparation), 2019.