ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

УДК 517.97 : 532.526 : 512.816

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

Бильченко Н. Г.
Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет
(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева
Россия, 420111, г. Казань, К. Маркса, 10
e-mail: bilchnat@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются задачи математического моделирования оптимальной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в потоке ионизированного газа. Применён теоретико-групповой подход к оптимизации систем с распределёнными параметрами. Модифицирована таблица инфинитезимальных операторов группы Ли, допускаемой системой нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа. Построены законы сохранения на всех операторах допускаемой группы. Доказана теорема о существовании первого интеграла оптимальной задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, ионизация, группа Ли, инфинитезимальный оператор, закон сохранения, первый интеграл.

Abstract

The problems of mathematical modeling of optimal heat protection of permeable surfaces of hypersonic aircraft in ionized gas are considered. The group theory approach to the optimization of systems with distributed parameters is applied. The table of infinitesimal operators of a Lie group admissible by a system of nonlinear differential equations of parabolic type is modified. Conservation laws on all operators of the admissible group are constructed. A theorem on the existence of the first integral of the optimal problem is proved.

Keywords: optimal control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hypersonic flows, ionization, Lie group, infinitesimal operator, conservation law, first integral.

Введение

Данная работа продолжает исследование свойств математической модели оптимально управляемого пограничного слоя ионизированного газа на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) [1].

Задача построения оптимальной тепловой защиты проницаемых цилиндрических поверхностей ГЛА в рамках точных уравнений пограничного слоя вязкого сжимаемого электропроводящего газа при наличии магнитного поля, являющаяся оптимизационной задачей с распределёнными параметрами [2], была впервые поставлена [3,4]. В математической модели таких задач, представляющих собой двумерные вариационные задачи типа Майера, к которым принадлежит широкий круг оптимальных задач аэрогидродинамики, в качестве минимизируемого функционала выступает интегральный тепловой поток, передаваемый от пограничного слоя к криволинейной пористой стенке; управляющим воздействием является удельный расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке); ограничением — мощность системы, обеспечивающей вдув (определяемая с учётом фильтрационного закона Дарси).

В статье [5] для такого рода задач был предложен теоретико-групповой подход к конструированию законов сохранения (дивергентных форм) и первых интегралов для сопряжённых систем относительно множителей Лагранжа, основанный на совместном использовании инфинитезимального аппарата Ли-Овсянникова [6,7] и теории инвариантных вариационных задач Нётер [8], позволяющий существенно упростить поиск оптимального управления. В [9] была дана конкретизация этого подхода применительно к задаче оптимизации тепломассообмена в сверхзвуковом потоке совершенного газа.

В работах [3, 4] в рамках данного подхода был построен закон сохранения на операторе переноса по поперечной координате, на основе которого был получен первый интеграл для сопряжённой системы, следствие из которого позволило решить задачи оптимизации эффузионной тепловой защиты проницаемых цилиндрических [4, 10] и сферических [11] поверхностей ГЛА.

В данной работе на основе группового анализа исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа [12]:

1) модифицирована таблица инфинитезимальных операторов;

2) построены законы сохранения на всех операторах, допускаемых системой;

3) доказана теорема о существовании первого интеграла оптимальной задачи.

1. Постановка оптимизационной задачи

Задача оптимизации тепломассообмена в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа на проницаемой пористой цилиндрической поверхности при наличии магнитного поля рассматривается в *безразмерном виде* [1]:

1) исходная система имеет вид

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{s}}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}=\beta\left(1-\psi-\overline{u}^2\right)+\frac{\partial R_1}{\partial\overline{t}}-A\left(\overline{s}\right)B^2\left(\overline{s};\overline{t}\right)\overline{u}\left(1-\psi-\alpha_e^2\overline{u}^2\right); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{s}}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{t}}=0; \quad (1.2)$$

$$\overline{u}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{s}}+\overline{w}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{t}}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial\overline{t}}+\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\frac{\partial}{\partial\overline{t}}\left(b\left(\tau\right)\frac{\partial\overline{u}^2}{\partial\overline{t}}\right)-$$
$$-G\left(\overline{s}\right)B^2\left(\overline{s};\overline{t}\right)\overline{u}^2\left(1-\psi-\alpha_e^2\overline{u}^2\right); \quad (1.3)$$

$$R_1=b\left(\tau\right)\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}; \quad (1.4)$$

$$R_2=b\left(\tau\right)\frac{\partial\psi}{\partial\overline{t}}, \quad (1.5)$$

где

$$\overline{s}=\frac{1}{\ell}\int\limits_0^x q\cdot dx\,,\quad q=\alpha_e\phi\,,\quad \alpha_e=\frac{U_e}{V_{\max}}\,,\quad V_{\max}=V_\infty\sqrt{1+\frac{2}{\left(\gamma-1\right)M_\infty^2}}\,,$$

$$\phi = \left(1-\alpha_e^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\ , \quad \beta = \frac{\dot{\alpha}_e}{\alpha_e\left(1-\alpha_e^2\right)}\,, \quad \dot{\alpha}_e = \frac{d\alpha_e}{d\overline{s}}\,, \quad \dot{U}_e = \frac{dU_e}{d\overline{s}}\,,$$

$$A\left(\overline{s}\right) = \frac{K}{U_e^2}\,, \quad G\left(\overline{s}\right) = \frac{K}{h_{e_0}}\,, \quad K = \frac{\sigma V_{\max}}{\rho_{e_0}}\cdot\frac{\ell}{\phi^2}\,,$$

в свою очередь, γ – показатель адиабаты, ℓ – характерный размер (в данном случае – радиус кругового цилиндра);

2) граничные условия к ней

$$\text{при}\quad \left(\overline{s}>0\,,\ \bar{t}=0\right):\qquad \overline{u}=0\,,\qquad \overline{w}=m\left(\overline{s}\right)/q\left(\overline{s}\right)\,,\qquad \psi = 1-\tau_w\,; \qquad (2.1)$$

$$\text{при}\quad \left(\overline{s}>0\,,\ \bar{t}\to\infty\right):\qquad \overline{u}\to 1\,,\qquad \psi\to 0\,; \qquad (2.2)$$

$$\text{при}\quad \left(\overline{s}=0\,,\ \bar{t}>0\right):\qquad \overline{u}=1\,,\qquad \psi = 0\,; \qquad (2.3)$$

3) минимизируемый функционал (интегральный тепловой поток, передаваемый от пограничного слоя к обтекаемой поверхности)

$$\overline{Q} = -\int\limits_0^{\overline{s}_k} b\left(\tau_w\right)\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}}\right)_{\bar{t}=0}\cdot d\overline{s}\,; \qquad (3)$$

4) ограничение $\overline{N}\le\overline{N}_{\max}$ на мощность

$$\overline{N} = \int\limits_0^{\overline{s}_k} fm^2\left(1-\psi_w\right)^2\cdot d\overline{s} \qquad (4)$$

системы, обеспечивающей вдув. Здесь $f = \dfrac{1}{\alpha_e\phi^3}$, $\overline{s}_k = \dfrac{1}{\ell}\int\limits_0^{x_k} q\cdot dx$. В дальнейшем чёрточки над переменными $\overline{s}$, $\bar{t}$, $\overline{u}$, $\overline{w}$ опущены.

Вариационная задача (в безразмерном виде) ставится следующим образом: среди непрерывных управлений $m\left(s\right)$ требуется найти такое, которое реализует минимальное значение функционала (3) при связях (1), (2) и ограничении (4).

Используя метод множителей Лагранжа [2,13], исследуем на безусловный экстремум функционал:

$$J = J_1 + J_2\,, \qquad (5.1)$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^{s_k}\Big(-R_2 + \lambda_0 fm^2\left(1-\psi_w\right)^2\Big)\cdot ds\,, \qquad (5.2)$$

$$J_2 = \iint\limits_D \left\{ \lambda_1 \left[u\frac{\partial u}{\partial s} + w\frac{\partial u}{\partial t} - \beta\left(1-\psi-u^2\right) - \frac{\partial R_1}{\partial t} + \right.\right.$$

$$\left. + A(s)B^2\left(s,t\right)u\left(1-\psi-\alpha_e^2u^2\right)\right] + \lambda_2\left[\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t}\right] +$$

$$+ \lambda_3\Bigg[u\frac{\partial \psi}{\partial s} + w\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{\Pr}\frac{\partial R_2}{\partial t} - 2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}R_1 + u\frac{\partial R_1}{\partial t}\right) +$$

$$\left. + G(s)B^2\left(s,t\right)u^2\left(1-\psi-\alpha_e^2u^2\right)\right] +$$

$$\left. + \lambda_4\left[b\left(\tau\right)\frac{\partial u}{\partial t} - R_1\right] + \lambda_5\left[b\left(\tau\right)\frac{\partial \psi}{\partial t} - R_2\right]\right\} \cdot ds\,dt\,. \tag{5.3}$$

Здесь $\lambda_i(s,t)$ $(i=1,\ldots,5)$, λ_0 — множители Лагранжа; D — область, ограниченная линиями $t=0$, $s=s_k$, $t\to\infty$, $s=0$.

Следует отметить, что при формулировке оптимальной задачи использовано свойство инвариантности вариационной задачи относительно замены переменных.

Для этой задачи после подстановки

$$\lambda_4 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\,, \quad \lambda_5 = \frac{1}{\Pr}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}$$

и упрощений в [3] была получена *сопряжённая система*

$$2\beta u\lambda_1 + \lambda_3\frac{\partial \psi}{\partial s} - u\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} - w\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \lambda_1\frac{\partial w}{\partial t} -$$

$$- b\left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} + 2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial t^2}\right] -$$

$$- 2\alpha_e^2 u\frac{\partial b}{\partial \tau}\left\{\left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\right]\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\Pr}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\} -$$

$$- \frac{\partial b}{\partial t}\left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\right] +$$

$$+ \lambda_1 A\left(s\right)B^2\left(s,t\right)\left(1-\psi-3\alpha_e^2u^2\right) +$$

$$+ 2\lambda_3 G\left(s\right)B^2\left(s,t\right)u\left(1-\psi-\alpha_e^2u^2\right) = 0\,; \tag{6.1}$$

$$\lambda_1\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_3\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0\,; \tag{6.2}$$

$$\beta\lambda_1 - \frac{\partial b}{\partial \tau}\left\{\left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\right]\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda_3 u\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\lambda_3 w + \frac{b}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\right\} -$$
$$- \lambda_1 A(s)\, B^2(s,t)\, u - \lambda_3 G(s)\, B^2(s,t)\, u^2 = 0\,. \qquad (6.3)$$

Краевые условия для множителей Лагранжа (вместо переменной t далее удобно (с учётом (2)) использовать переменную u) имеют вид:

$$\text{при}\quad (s > 0\,,\quad t = 0\,,\quad \text{т.е. } u = 0):\quad \lambda_1 = 0\,,\qquad \lambda_3 = \mathrm{Pr}\,; \qquad (7.1)$$
$$\text{при}\quad (s > 0\,,\quad t \to \infty\,,\ \text{т.е. } u \to 1):\quad \lambda_1 \to 0\,,\quad \lambda_2 \to 0\,,\quad \lambda_3 \to 0\,; \qquad (7.2)$$
$$\text{при}\quad (s = s_k\,,\ t > 0):\quad \lambda_1 = 0\,,\qquad \lambda_3 = 0\,. \qquad (7.3)$$

В точке $(s = s_k\,, t = 0)$ граничные значения λ_3 терпят разрыв $\lim\limits_{s \to s_k - 0} \lambda_3(s{,}0) - \lim\limits_{t \to 0+0} \lambda_3(s_k{,}t) = \mathrm{Pr}$, а граничные значения λ_1 в этой точке непрерывны. Оптимальное управление определяется по формуле

$$m(s) = \frac{\phi^2 \lambda_2(s,0)}{2\lambda_0\left(1 - \psi_w\right)^2}\,. \qquad (8)$$

2. Групповые свойства уравнений ламинарного пограничного слоя сжимаемого электропроводящего газа при гиперзвуковых режимах обтекания

В [12] была найдена группа Ли непрерывных локальных преобразований [7], допускаемая системой (1) при различных видах "произвольных" элементов, входящих в эту систему: $b(\tau)$, $\alpha_e(s)$, $A(s)$, $G(s)$, $B(s,t)$.

Для случая отсутствия магнитного поля: $AB^2 = 0$, $GB^2 = 0$ окончательные результаты построения инфинитезимальных операторов, допускаемых системой (1), приведены в таблице 1, модифицированной по сравнению с таблицей 1 из [12].

Ядро основных алгебр Ли образовано бесконечномерным оператором

$$X_\infty = f(s)\frac{\partial}{\partial t} + u f'(s)\frac{\partial}{\partial w}\,, \qquad (9)$$

где $f(s)$ — произвольная дифференцируемая функция s. Следует отметить, что этот оператор и соответствующие ему преобразования допускаются при любых функциях $b(\tau)$, $\alpha_e(s)$.

В таблице 1 приняты обозначения

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - w\frac{\partial}{\partial w} + 4\left(1-\psi\right)\frac{\partial}{\partial \psi}\,;$$
$$X_2 = 2s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial w}\,;$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial s}\,;$$
$$X_4 = s\frac{\partial}{\partial s} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2\psi\frac{\partial}{\partial \psi}\,;$$
$$X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - w\frac{\partial}{\partial w} - 4\psi\frac{\partial}{\partial \psi}\,;$$
$$X_6 = \frac{\partial}{\partial \psi}\,;$$
$$X_7 = s\frac{\partial}{\partial s} + u\frac{\partial}{\partial u} - 2\left(1-\psi\right)\frac{\partial}{\partial \psi}\,;$$
$$X_8 = s^{1/3}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{3}s^{-2/3}t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{3}s^{-2/3}u\frac{\partial}{\partial u} - \left[\frac{2}{9}s^{-5/3}tu + \frac{1}{3}s^{-2/3}w\right]\frac{\partial}{\partial w}\,. \tag{10}$$

Следует иметь в виду, что m в таблице 1 — показатель степени в законе распределения скорости на внешней границе пограничного слоя [14].

Таблица 1

$b\left(\tau\right)$ / $\alpha_e\left(s\right)$	Произвольная функция	$Const \neq 0$
Произвольная функция	X_∞.	$X_1,\ X_\infty$.
$Const \neq 0$ $(\beta\left(s\right) \equiv 0)$	$X_2,\ X_3,\ X_\infty$.	$X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_\infty$.
$\alpha_e\left(0\right) = 0$ $(\beta\left(s\right) = m/s,\ \ m \neq 0)$	$m \neq 1/3$: $X_2,\ X_\infty$.	$m \neq 1/3$: $X_1,\ X_7,\ X_\infty$.
	$m = 1/3$: $X_2,\ X_8,\ X_\infty$.	$m = 1/3$: $X_2,\ X_8,\ X_2 + X_7,\ X_\infty$.

Случай ($\alpha_e(s) \equiv Const \neq 0$, $\beta(s) \equiv 0$) соответствует обтеканию плоской пластинки.

Случай ($\alpha_e(0) = 0$, $\beta(s) = m/s$, $m \neq 0$) соответствует сохранению лишь главных членов асимптотических разложений этих функций в окрестности точки $s = 0$ [15], справедливому в окрестности критической точки обтекаемого тела. В этом случае при произвольной функции $b(\tau)$ группа преобразований, соответствующая оператору X_2, совпадает с группой, найденной и использованной в [15] для построения инвариантного решения ранга 1.

Лишённые физического смысла случаи $b(\tau) \equiv 0$ и $\alpha_e(s) \equiv 0$ в таблицу 1 не включены.

Обратимся теперь к группе преобразований, допускаемой системой (1) при наличии магнитного поля: $AB^2 \neq 0$, $GB^2 \neq 0$. Решение соответствующих определяющих уравнений показывает, что в этом случае при произвольных функциях $A(s)$, $G(s)$, $B(s,t)$ система (1) допускает лишь тождественное преобразование. В рассматриваемых в таблице 1 случаях по $b(\tau)$ и $\alpha_e(s)$ возможно расширение группы при определённых видах (специализациях) функций $A(s)$, $G(s)$, $B(s,t)$, приведённых в таблице 2 [12]. В каждом из приведённых в таблице 2 [12] случаев система уравнений (1) допускает группу, порождаемую оператором следующего вида:

$$X = g(s)\frac{\partial}{\partial s} + \Big[f(s) + \Big(g'(s) + C\Big)t\Big]\frac{\partial}{\partial t} - u\Big(g'(s) + 2C\Big)\frac{\partial}{\partial u} + \\ + \Big[u\Big(f'(s) + g''(s)\,t\Big) - w\Big(g'(s) + C\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial w} + h(1-\psi)\frac{\partial}{\partial \psi}. \tag{11}$$

Замечание. При произвольных $\beta(s)$, $b(\tau)$, $B(s,t)$, Pr оператор (11) принимает вид (9).

3. Законы сохранения и первый интеграл оптимальной задачи

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Вариационная задача оптимального управления ламинарным пограничным слоем (1)–(4) при любом распределении скорости на внешней границе, любой зависимости вязкости от температуры, любых значениях магнитной индукции и числа Прандтля допускает первый интеграл.*

Доказательство. Рассмотрим закон сохранения, построенный на бесконечномерном операторе (9):

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[-f(s)(\lambda_1 u+\lambda_2)\frac{\partial u}{\partial t}-f(s)\lambda_3 u\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[-f(s)\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)R_1+\lambda_4 b\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\right.$$
$$+\left(uf'(s)-f(s)\frac{\partial w}{\partial t}\right)\lambda_2-f(s)\left[\lambda_3 w+\lambda_5 b\right]\frac{\partial \psi}{\partial t}+$$
$$\left.+f(s)\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)u\right)\frac{\partial R_1}{\partial t}+f(s)\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t}\right]=0\,. \qquad (12)$$

Перепишем (12) в виде:

$$-f(s)\frac{\partial}{\partial s}\left[(\lambda_1 u+\lambda_2)\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_3 u\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]-$$
$$-f'(s)\left[(\lambda_1 u+\lambda_2)\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_3 u\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]+f'(s)\frac{\partial}{\partial t}\left[u\lambda_2\right]-$$
$$-f(s)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)R_1+\lambda_4 b\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\right.$$
$$+\frac{\partial w}{\partial t}\lambda_2+\left[\lambda_3 w+\lambda_5 b\right]\frac{\partial \psi}{\partial t}-$$
$$\left.-\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)u\right)\frac{\partial R_1}{\partial t}-\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t}\right]=0\,. \qquad (13)$$

С учётом (6.2) равенство (13) после деления на $f(s)\neq 0$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_2 u\right]\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)R_1+\lambda_4 b\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\right.$$
$$+\frac{\partial w}{\partial t}\lambda_2+\left[\lambda_3 w+\lambda_5 b\right]\frac{\partial \psi}{\partial t}-$$
$$\left.-\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)u\right)\frac{\partial R_1}{\partial t}-\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t}\right]=0\,.$$

Таким образом, закон сохранения (12) превращается в первый интеграл для сопряжённой системы (6):

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_2 u\right]+\left[\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)R_1\lambda_3+\lambda_4 b\right]\frac{\partial u}{\partial t}+$$

$$+\lambda_2\frac{\partial w}{\partial t}+\left[\lambda_3 w+\lambda_5 b\right]\frac{\partial \psi}{\partial t}-\frac{\lambda_3}{\Pr}\frac{\partial R_2}{\partial t}-$$
$$-\left[\lambda_1+2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\right]\frac{\partial R_1}{\partial t}=g\left(s\right), \qquad (14)$$

где $g\left(s\right)$ — произвольная функция интегрирования. Предполагая, что функции $\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\lambda_3}{\partial t}$ при $t\to\infty$ являются ограниченными, из этого уравнения с учётом граничных условий (2) и (7) получим $g\left(s\right)\equiv 0$ для $\forall s\in[0;s_k]$.

Выражение (14) можно упростить, используя (6.2):

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_2 u\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_2 w\right]+\left[-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)R_1\lambda_3+\lambda_4 b\right]\frac{\partial u}{\partial t}+$$
$$+\lambda_5 b\frac{\partial \psi}{\partial t}-\frac{\lambda_3}{\Pr}\frac{\partial R_2}{\partial t}-\left[\lambda_1+2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\right]\frac{\partial R_1}{\partial t}=0\,. \qquad (15)$$

Отметим, что уравнением (15) можно заменить (6.1) или (6.3), что эквивалентно понижению порядка сопряжённой системы (6) на единицу и даёт возможность упрощения проблемы поиска оптимальных управлений.

Отметим, что если в уравнениях (1) $B=B\left(s\right)$, то они допускают однопараметрическую группу переносов по координате t.

В работе [3] был получен первый интеграл рассматриваемой задачи при $f\left(s\right)\equiv 1$, т.е. на операторе переноса $X=\dfrac{\partial}{\partial t}$, который совпадает с (14). Аналогичный факт был отмечен и в случае неравновесно диссоциирующего газа [16,17]. Это обусловлено тем, что преобразования, отвечающие X_∞, являются преобразованиями эквивалентности, а сам оператор X_∞ может быть преобразован в оператор переноса; при этом уравнения сохраняют форму. Таким образом, можно сделать вывод о том, что вся содержательная информация с точки зрения конструирования первого интеграла содержится в операторе переноса.

Окончательные результаты построения законов сохранения для сопряжённой системы относительно множителей Лагранжа (6) на соответствующих операторах (10) приведены в таблице 2.

Закон сохранения на операторе (11) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial s}\Bigg[\left(-u\left(g'\left(s\right)+2C\right)-g\left(s\right)\frac{\partial u}{\partial s}-\left[f\left(s\right)+\left(g'\left(s\right)+C\right)t\right]\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\lambda_1 u+\lambda_2\right)+$$
$$+\left(h\left(1-\psi\right)-g\left(s\right)\frac{\partial \psi}{\partial s}-\left[f\left(s\right)+\left(g'\left(s\right)+C\right)t\right]\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\lambda_3 u\Bigg]+$$

$$
+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-u\left(g'(s)+2C\right)-g(s)\frac{\partial u}{\partial s}-\left[f(s)+\left(g'(s)+C\right)t\right]\frac{\partial u}{\partial t}\right)\times\right.
$$

$$
\times\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)+\left(u\left(f'(s)+g''(s)t\right)-\right.
$$

$$
\left.-w\left(g'(s)+C\right)-g(s)\frac{\partial w}{\partial s}-\left[f(s)+\left(g'(s)+C\right)t\right]\frac{\partial w}{\partial t}\right)\lambda_2+
$$

$$
+\left(h\left(1-\psi\right)-g(s)\frac{\partial\psi}{\partial t}-\left[f(s)+\left(g'(s)+C\right)t\right]\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\lambda_3 w+\lambda_5 b\right)+
$$

$$
+\left(g(s)\frac{\partial R_1}{\partial s}+\left[f(s)+\left(g'(s)+C\right)t\right]\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)+
$$

$$
\left.+\left(g(s)\frac{\partial R_2}{\partial s}+\left[f(s)+\left(g'(s)+C\right)t\right]\frac{\partial R_2}{\partial t}\right)\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right]=0\,. \tag{16}
$$

Таблица 2

Оператор	Закон сохранения
X_1	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(2u+t\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\lambda_1 u+\lambda_2\right)+\left(4\left(\psi-1\right)+t\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\lambda_3 u\right]+$ $+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(2u+t\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)+\right.$ $+\left(w+t\frac{\partial w}{\partial t}\right)\lambda_2+\left(4\left(\psi-1\right)+t\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\lambda_3 w+\lambda_5 b\right)-$ $\left.-t\frac{\partial R_1}{\partial t}\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)-t\frac{\partial R_2}{\partial t}\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right]=0\,;$
X_2	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(2s\frac{\partial u}{\partial s}+t\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\lambda_1 u+\lambda_2\right)+\left(2s\frac{\partial\psi}{\partial s}+t\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\lambda_3 u\right]+$ $+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(2s\frac{\partial u}{\partial s}+t\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)+\right.$ $+\left(w+2s\frac{\partial w}{\partial s}+t\frac{\partial w}{\partial t}\right)\lambda_2+\left(2s\frac{\partial\psi}{\partial s}+t\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\lambda_3 w+\lambda_5 b\right)-$ $-\left(2s\frac{\partial R_1}{\partial s}+t\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)-$ $\left.-\left(2s\frac{\partial R_2}{\partial s}+t\frac{\partial R_2}{\partial t}\right)\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right]=0\,;$

Продолжение таблицы 2

Оператор	Закон сохранения
X_3	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial u}{\partial s}(\lambda_1 u+\lambda_2)+\frac{\partial \psi}{\partial s}\lambda_3 u\right]+$ $+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial s}\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)+\right.$ $+\frac{\partial w}{\partial s}\lambda_2+\frac{\partial \psi}{\partial s}(\lambda_3 w+\lambda_5 b)-$ $\left.-\frac{\partial R_1}{\partial s}\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)-\frac{\partial R_2}{\partial s}\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right]=0\,;$
X_4	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(u-s\frac{\partial u}{\partial s}\right)(\lambda_1 u+\lambda_2)+\left(2\psi-s\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)\lambda_3 u\right]+$ $+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(u-s\frac{\partial u}{\partial s}\right)\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)-\right.$ $-s\frac{\partial w}{\partial s}\lambda_2+\left(2\psi-s\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)(\lambda_3 w+\lambda_5 b)+$ $\left.+s\frac{\partial R_1}{\partial s}\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)+s\frac{\partial R_2}{\partial s}\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right]=0\,;$
X_5	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(2u+t\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\lambda_1 u+\lambda_2)+\left(4\psi+t\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\lambda_3 u\right]+$ $+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(2u+t\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)+\right.$ $+\left(w+t\frac{\partial w}{\partial t}\right)\lambda_2+\left(4\psi+t\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)(\lambda_3 w+\lambda_5 b)-$ $\left.-t\frac{\partial R_1}{\partial t}\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)-t\frac{\partial R_2}{\partial t}\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right]=0\,;$
X_6	$\frac{\partial}{\partial s}[\lambda_3 u]+\frac{\partial}{\partial t}[\lambda_3 w+\lambda_5 b]=0\,;$
X_7	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(u-s\frac{\partial u}{\partial s}\right)(\lambda_1 u+\lambda_2)+\left(2(\psi-1)-s\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)\lambda_3 u\right]+$ $+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(u-s\frac{\partial u}{\partial s}\right)\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)-\right.$ $-s\frac{\partial w}{\partial s}\lambda_2+\left(2(\psi-1)-s\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)(\lambda_3 w+\lambda_5 b)+$ $\left.+s\frac{\partial R_1}{\partial s}\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)+s\frac{\partial R_2}{\partial s}\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right]=0\,;$

Продолжение таблицы 2

Оператор	Закон сохранения
X_8	$\frac{\partial}{\partial s}\left[s^{-\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{1}{3}u+s\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{3}t\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\lambda_1 u+\lambda_2)+ +\left(s\frac{\partial\psi}{\partial s}+\frac{1}{3}t\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\lambda_3 u\right\}\right]+ +\frac{\partial}{\partial t}\left[s^{-\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{1}{3}u+s\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{3}t\frac{\partial u}{\partial t}\right)\times \times\left(\lambda_1 w-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right)+ +\left(\frac{2}{9}s^{-1}tu+\frac{1}{3}w+s\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{1}{3}t\frac{\partial w}{\partial t}\right)\lambda_2+ +\left(s\frac{\partial\psi}{\partial s}+\frac{1}{3}t\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)(\lambda_3 w+\lambda_5 b)- -\left(s\frac{\partial R_1}{\partial s}+\frac{1}{3}t\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)\left(\lambda_1+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_3 u\right)- -\left(s\frac{\partial R_2}{\partial s}+\frac{1}{3}t\frac{\partial R_2}{\partial t}\right)\frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\right\}\right]=0\,.$

Важно отметить, что функционал (5.3) допускает бесконечномерный оператор (9) при любом распределении скорости на внешней границе $U_e\,(s)$, любой зависимости вязкости от температуры $b\,(\tau)$, любых значениях магнитной индукции $B\,(s,t)$ и числа Прандтля Pr, в то время как остальные операторы оставляют этот функционал инвариантным только для специальных видов выше перечисленных функций, а это означает, что законы сохранения, построенные на этих операторах, носят ограниченный характер и могут позволить найти оптимальное управление только в исключительных случаях.

Заключение

С помощью следствия (8) [1] из первого интеграла (15), полученного из закона сохранения (12), построенного на бесконечномерном операторе (9), удалось [1] существенно упростить процесс поиска оптимального управления для боковой поверхности прямого кругового цилиндра и поверхности сферического носка.

На всех остальных операторах допускаемой группы построены законы сохранения, которые можно также применить для синтеза оптимального управления в специальных случаях.

Благодарности

Работа выполнена:

а) при государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских вузах (ведущий учёный – С. А. Исаев, КНИТУ – КАИ, г. Казань) по гранту Правительства России № 14.Z50.31.0003;

б) в рамках Государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 9.3236.2017/4.6.

Литература

[1] **Бильченко Н. Г.** *Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

[2] **Сиразетдинов Т. К.** *Оптимизация систем с распределёнными параметрами.* — М.: Наука, 1977. — 478 с.

[3] **Бильченко Н. Г., Гараев К. Г., Дербенёв С. А.** *К задаче оптимального управления пограничным слоем электропроводящей жидкости в магнитном поле* / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев, С. А. Дербенёв // Известия ВУЗов. Авиационная техника. — 1994. — № 1. — С. 23–27.

[4] **Bilchenko N. G., Garaev K. G.** *On optimum control of laminar boundary layer of electroconductive gas by supersonic flow conditions* // Proceedings of 12th NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE (UIT). — L'Aquila, Italy. — 1994. — pp. 213–224.

[5] **Гараев К. Г.** *Об одном следствии из теоремы Э. Нётер для двумерных вариационных задач типа Майера* / К. Г. Гараев // Прикладная математика и механика. — 1980. — Т. 44. — № 3. — С. 448–453.

[6] **Lie S., Scheffers G.** *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationsgruppen.* — Leipzig, Teubner, 1891. — 568 s.

[7] **Овсянников Л. В.** *Групповой анализ дифференциальных уравнений.*— М.: Наука, 1978. — 399 с.

[8] **Нётер Э.** *Инвариантные вариационные задачи* // Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 611–630.

[9] **Гараев К. Г.** *Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях* / К. Г. Гараев // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1988. — № 3. — С. 92–100.

[10] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

[11] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

[12] **Бильченко Н. Г., Овчинников В. А.** *О группе Ли, допускаемой одной нелинейной системой уравнений в частных производных параболического типа* / Н. Г. Бильченко, В. А. Овчинников // Известия ВУЗов. Математика. — 1997. — № 1(416). — С. 69–74.

[13] **Миеле А.** *Обобщение вариационной задачи на несколько функций двух независимых переменных* // Теория оптимальных аэродинамических форм. — М.: Мир, 1969. — 507 с.

[14] **Краснов Н. Ф.** *Аэродинамика тел вращения.*— М.: Машиностроение, 1964. — 572 с.

[15] **Павловский Ю. Н.** *Численный расчёт пограничного слоя в сжимаемом газе* // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Т. 2. — № 5. — С. 884–901.

[16] **Бильченко Н. Г., Гараев К. Г.** *О существовании первого интеграла в одной оптимальной задаче с распределёнными параметрами* / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев // Известия ВУЗов. Математика. — 1993. — № 12(379). — С. 31–34.

[17] **Бильченко Н. Г., Гараев К. Г., Овчинников В. А.** *Группа симметрии и законы сохранения в задаче оптимального управления ламинарным пограничным слоем неравновесно диссоциирующего газа* / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев, В. А. Овчинников // Известия ВУЗов. Математика. — 1999. — № 11(450). — С. 11–19.