

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Прикладные задачи

УДК 517.97 : 532.526

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА  
НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ  
ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ:  
ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАИ**

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет

(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева

Россия, 420111, г. Казань, К. Маркса, 10

e-mail: [ggbil2@gmail.com](mailto:ggbil2@gmail.com) , [bilchnat@gmail.com](mailto:bilchnat@gmail.com)

**Аннотация**

Рассмотрены задачи математического моделирования эффективной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов. Приведены постановки одномерных и двумерной обратных задач теплообмена. Обсуждены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению управления (вдува) по параметрам теплообмена (локальным тепловому потоку и трению).

**Ключевые слова:** теплообмен, гиперзвуковые течения, ламинарный пограничный слой, управление, обратные задачи, интерполяционная постановка, аппроксимационная постановка, вычислительные эксперименты.

**Abstract**

The hypersonic aircraft permeable surfaces effective heat protection mathematical modeling problems are considered. The statements of one- and

two-dimensional inverse problems of heat and mass transfer are given. The computational experiments results on control (the blowing) restoration by heat and mass transfer parameters (local heat flow and local friction) are discussed.

**Keywords:** heat and mass transfer, hypersonic flows, laminar boundary layer, control, inverse problems, interpolation statement, approximation statement, computational experiments.

## Введение

Данная работа, продолжающая исследования [1], является расширенным вариантом материалов докладов, представленных на Воронежскую зимнюю математическую школу «Современные методы теории функций и смежные проблемы – 2017» [2] и международную конференцию «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017» [3], и доклада [4], прочитанного 25 мая 2017 года на международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA – 2017), на секции 3 «Проблемы негладкой механики». Кроме того, материал данной статьи был частично использован при прочтении докладов [5, 6] 14 июня 2017 года на секции 3.3 «Прикладные задачи управления» XI Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление».

### 1. Прямая задача тепломассообмена

В работах [7–13] была рассмотрена следующая *прямая* задача.

По заданным управлениям ( $x \in [0; 1]$ ):

$m(x)$  – вдуву в ламинарный пограничный слой,

$\tau(x)$  – температурному фактору поверхности:

$$\tau(x) = T_w(x)/T_{e_0}, \text{ где } T_w(x) \text{ – температура стенки,}$$

$T_{e_0}$  – температура в точке торможения, и

$s(x) = \sigma B_0^2(x)$  – магнитному полю,

**требуется** рассчитать параметры модели пограничного слоя  $\theta_0, \theta_1, \omega_0, \omega_1$

и определить:

локальные тепловой поток  $q(x; m, \tau, s)$

и напряжение трения  $f(x; m, \tau, s)$ ,  
 интегральные тепловой поток  $Q(m, \tau, s)$   
 и силу трения  $F(m, \tau, s)$ ,  
 а также мощность  $N(m, \tau, s)$  системы,  
 обеспечивающей вдув, т.е.

$$(m, \tau, s) \rightarrow (q, f; Q, F, N).$$

### Прямая экстремальная задача

В работах [7–9, 11, 12] для заданных  $\tau(x)$  и  $s(x)$  оптимальное управление  $m(x)$  было построено, как решение экстремальной задачи

$$Q(m, \tau, s) \rightarrow \inf_m$$

(для непрерывных функций  $m(x)$ ), при наличии ограничения

$$N(m, \tau, s) \leq N_{\max}.$$

Для тропо-, страто- и нижних слоёв мезосферы (10–30 [км]) типы расчётных моделей для каждого диапазона скоростей представлены в таблице 1, аналогичной приведённой в [12].

Таблица 1. Типы моделей газа

Число Маха	$2,5 < M_\infty < 6$	$6 < M_\infty < 10$	$10 < M_\infty$
Режим полёта	Сверх-звуковой	Гиперзвуковой	
Тип сжимаемого газа	Совершенный	Равновесно-диссоциирующий	Ионизированный
Метод полных (эффективных) коэффициентов	Не применяется	Применяется	
Электропроводность газа	Отсутствует		Присутствует

## 2. Обратные по вдуву задачи тепломассообмена

Приведём по [1, 14] постановки обратных задач по управлению – *вдуву*  $m(x)$  в ламинарный пограничный слой, где  $x \in X = [0; 1]$  (ось  $x$  направлена вдоль контура тела).

Пусть заданы:

- 1) сетка управления  $X_1: x_0^\wedge = 0 < x_1^\wedge < \dots < x_{n_1}^\wedge = 1$ ;
- 2) сетка наблюдения  $X_2: x_0^\vee = 0 < x_1^\vee < \dots < x_{n_2}^\vee = 1$ ;
- 3) непрерывное управление  $s(x) = \sigma B_0^2(x)$  – магнитное поле.

При непрерывно-дифференцируемом управлении  $\tau(x)$  и ограничениях

$$I_{j,k}^m = [b_{j,k}^m; t_{j,k}^m], \quad j = 1, \dots, n_1, \quad k = 0, \dots, \nu_1^m, \quad \nu_1^m \geq 0,$$

для «контрольных» значений локального *теплового потока*

$$q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$$

требуется **найти** непрерывное на  $X$  управление  $m^\sim$ , задаваемое [15] элементами

$$m^\sim(x) = m_j^\sim(x) \quad \text{для} \quad x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad j = 1, \dots, n_1,$$

удовлетворяющими условиям

$$(m^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^m \quad \text{для} \quad x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad k = 0, \dots, \nu_1^m, \quad (1)$$

такое, что вычисленные [7, 8, 12] на  $X_2$  значения

$$q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}, \quad \text{где} \quad q_j^\sim = q(x_j^\vee; m^\sim, \tau, s),$$

должны быть *близкими* к  $q^\vee$ , т.е.

$$q^\vee \rightarrow m^\sim \quad , \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim), \quad (2)$$

где

$$f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}, \quad f_j^\sim = f(x_j^\vee; m^\sim, \tau, s).$$

Если вместо  $q^\vee$  задать «контрольные» значения локального *напряжения трения*

$$f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2},$$

то обратная задача по  $m$  для напряжения трения будет иметь вид:

$$f^\vee \rightarrow m^\sim \quad , \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee). \quad (3)$$

### Замечания

1) Элементы  $m_j^\sim(x)$  управления будем искать в виде многочленов степени  $\deg(m_j^\sim) = \mu \geq \nu_1 + 1$ , а всё  $m^\sim$  будем строить в классе кусочно-полиномиальных функций с точками стыка в узлах  $X_1$ .

В работе [1] приведены постановки обратных задач для кусочно-линейного ( $\mu = 1$ ) случая. Для установления условий однозначной разрешимости задачи в [1] были рассмотрены случаи вида:

- a)  $X_1 = X_2$ ;
- b)  $X_1 \supseteq X_2$  при  $X_1 \neq X_2$ ;
- c)  $X_1 \subseteq X_2$  при  $X_1 \neq X_2$ .

$X_2$	$x_i^\vee$	$x_{i+1}^\vee$	$x_{i+2}^\vee$	$x_i^\vee$	$x_{i+1}^\vee$			$x_i^\vee$	$x_{i+1}^\vee$	$x_{i+2}^\vee$	$x_{i+3}^\vee$
$q^\vee/f^\vee$	↓	↓	↓	↓	↓			↓	↓	↓	↓
$m^\sim$	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑		
$X_1$	$x_i^\wedge$	$x_{i+1}^\wedge$	$x_{i+2}^\wedge$	$x_j^\wedge$	$x_{j+1}^\wedge$	$x_{j+2}^\wedge$	$x_{j+3}^\wedge$	$x_j^\wedge$	$x_{j+1}^\wedge$		

2) Пусть  $\mu \geq \nu_1 + 1$  и  $X_1 \subseteq X_2$ .

Предполагая для простоты, что все множества

$$X_{1,j}^+ = (X_2 \setminus X_1) \cap [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad j = 1, \dots, n_1,$$

содержат одинаковое количество  $\nu_2 \geq 0$  точек, можно считать, что

$$X_{1,j}^+ = (x_{j,k}^+)_{k=1, \dots, \nu_2} \quad - \quad \text{дополнительные сетки управления}$$

(при  $\nu_2 = 0$  – они пусты). В зависимости от соотношения между  $\mu$  и  $\nu_2$  задача будет

- либо *однозначно определённой*,
- либо *недоопределённой*,
- либо *переопределённой*,

что влечёт разные возможности для введения условий близости [1, 14] наборов  $q^\sim$  и  $q^\vee$  (или  $f^\sim$  и  $f^\vee$ ).

### 3. Аппроксимационная и интерполяционная постановки

Введём

$$R_{\infty}(q^{\sim}; q^{\vee}) = \max_{j=0, \dots, n_2} |q_j^{\sim} - q_j^{\vee}|, \quad (4)$$

$$R_p(q^{\sim}; q^{\vee}) = \left( \sum_{j=0}^{n_2} |q_j^{\sim} - q_j^{\vee}|^p \right)^{1/p} \quad \text{при } p \in [1; +\infty). \quad (5)$$

Постановка обратной задачи (2), (1) называется [1, 14] *интерполяционной* (ИПОЗ), если для **заданного** малого  $\varepsilon_1 > 0$  требуется найти такое управление  $m^{\sim}$ , что в узлах  $X_2$  значения  $q^{\sim}$  совпадают с  $q^{\vee}$  с точностью  $\varepsilon_1$ :

$$R_{\infty}(q^{\sim}; q^{\vee}) \leq \varepsilon_1. \quad (6)$$

При реализации на ЭВМ необходимо, чтобы  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\min}$ , где  $\varepsilon_{\min}$  зависит от способа представления вещественных чисел и применяемых численных методов.

Постановка обратной задачи (2), (1) называется [1, 14] *аппроксимационной* (АПОЗ), если для **заданного**  $p \in [1; +\infty]$  требуется отыскать пару  $(m^{\sim}, q^{\sim})$ , где управление  $m^{\sim}$  является приближённым решением экстремальной задачи

$$R_p^*(q^{\vee}) = \inf_{m^{\sim}} R_p(q^{\sim}; q^{\vee}). \quad (7)$$

Определения ИПОЗ и АПОЗ для (3), (1) – аналогичны (2) и (1): требуется заменить  $q^{\sim}$  и  $q^{\vee}$  на  $f^{\sim}$  и  $f^{\vee}$  в (6) и (7).

### 4. Вычислительные эксперименты по восстановлению вдува

Приведём два примера восстановления вдува  $m^{\sim}$  как по значениям локального теплового потока  $q^{\vee}$ , так и по значениям локального напряжения трения  $f^{\vee}$ .

Зафиксируем значения *неизменяемых параметров*: пусть

$$\text{число Маха} \quad M_{\infty} = 10 \in [10; 40], \quad (8)$$

$$\text{высота полёта} \quad H = 10 \in [10; 30] \text{ [км]}, \quad (9)$$

$$\text{радиус тела} \quad R = 0,1 \in [0,1; 1] \text{ [м]}. \quad (10)$$

Выбор (8), (9), (10) сделан для удобства сравнения с [7–9].

Диапазоны изменения *управляющих параметров* ограничим [14]:

$$m(x) \in [0; 1], \quad (11)$$

$$\tau(x) \in [0,15; 0,9], \quad (12)$$

$$s(x) \in [0; 5 \cdot 10^4] \text{ [Тл/Ом} \cdot \text{М]}. \quad (13)$$

С помощью программы, реализующей *прямую задачу* [7–9, 12], продолжая исследования [13,16] о влиянии температурного фактора на пограничный слой и на восстановление вдува, были получены последовательности значений  $q_{dir}$  и  $f_{dir}$  для законов вдувов  $m_{dir}$ , обобщающих рассмотренные в [9], при различных постоянных законах  $\tau_{dir} \in \{0,15; 0,20; \dots; 0,90\}$ .

К  $q^V = q_{dir}$  и к  $f^V = f_{dir}$  была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при различных постоянных законах температурного фактора  $\tau_{inv}$  с ограничением

$$m^{\sim}(x) \in I^m = [b; t] \quad \text{для} \quad x \in [x_{j-1}^{\wedge}; x_j^{\wedge}],$$

где  $0 \leq b_{j,0} \leq t_{j,0} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n_1$ .

Установлены предельные значения  $\tau_{inv}^*$ , при которых построение вдува возможно, а также зависимости  $\tau_{inv}^*(b, t; \tau_{dir})$ .

**4.1.** К  $q_{dir}$  и  $f_{dir}$ , полученным для **постоянного вдува**  $m_{dir} \equiv 0,3$  при  $\tau_{dir} \equiv 0,25$ , была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при различных постоянных законах  $\tau_{inv} \in \{0,15; 0,20; \dots; 0,90\}$ . На рис. 1 представлены законы  $m^{\sim}$ , построенные по тепловому потоку, на рис. 2 – по напряжению трения.

Для ограничения  $b_{j,0} = 0$  при  $\tau_{inv} \geq \tau_{inv}^*$ , где  $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0,534$  и  $\tau_{inv}^{*,sph} = 0,466$ , построение по тепловому потоку невозможно. Аналогично, для ограничения  $t_{j,0} = 1$  при  $\tau_{inv} > \tau_{inv}^*$ , где  $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0,755$  и  $\tau_{inv}^{*,sph} = 0,858$ , невозможно построение по напряжению трения.

**4.2.** К  $q_{dir}$  и  $f_{dir}$ , полученным для закона «**вертикальная трапеция**»

$$m_{dir}(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1 - x) + m_1 \cdot x$$

при  $m_0 = 0, \quad m_1^{cyl} = 0,3996, \quad m_1^{sph} = 0,3664$

(параметры из таблицы 6 для кривых 8 на рис. 4 и 5 из [9],  $\tau_{dir} \equiv 0,25$ ), была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при  $\tau_{inv} \in \{0,15; 0,20; \dots; 0,90\}$ . На рис. 3 и 4 представлены  $m^{\sim}$ , построенные по тепловому потоку и по напряжению трения.

При ограничении  $b_{j,0} = 0$  построение невозможно при  $\tau_{inv} > \tau_{inv}^* = 0,25$  для восстановления по тепловому потоку, а при  $\tau_{inv} < \tau_{inv}^* = 0,25$  – по напряжению трения. Ограничение  $t_{j,0} = 1$  при построении по напряжению трения достигается при  $\tau > \tau_{inv}^*$ , где  $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0,67$  и  $\tau_{inv}^{*,sph} = 0,79$ .

В приведённых примерах рассмотрен случай обтекания боковой поверхности кругового цилиндра [16] и сферического носка [17] при  $s_{dir} \equiv 0$  и  $s_{inv} \equiv 0$ .

## 5. Допустимые формы локальных тепловых потоков и напряжений трения

Следует отметить различный характер чувствительности  $q$  и  $f$  к ступенчатому изменению управления  $m(x)$ . На рис. 5 и 6 приведены зависимости локальных теплового потока и напряжения трения от координаты.

Кривые соответствуют обобщающим закон вдува «ступенька» (3) из [9] функциям

$$m(x; m_1, m_2, x_*) = \begin{cases} m_1 & \text{при } x \in [0; x_*) ; \\ m_2 & \text{при } x \in (x_*; 1] , \end{cases}$$

где  $x_* \in \{0,01; 0,05; 0,10; \dots; 0,95\}$ ,  $m_1 \equiv 0,3$ ,  $m_2 \in \{0; 0,3; 1\}$ . Чувствительность  $q$  падает при приближении точки переключения  $x_*$  к 1, у  $f$  это менее заметно.

## 6. Обратные по температурному фактору задачи теплообмена

Аналогично п.2 формулируем обратные задачи по управлению – температурному фактору  $\tau(x)$ .

Пусть заданы:

- 1) сетка управления  $X_1: x_0^\wedge = 0 < x_1^\wedge < \dots < x_{n_1}^\wedge = 1$ ;
- 2) сетка наблюдения  $X_2: x_0^\vee = 0 < x_1^\vee < \dots < x_{n_2}^\vee = 1$ ;
- 3) непрерывное управление  $s(x) = \sigma B_0^2(x)$  – магнитное поле.

При непрерывном управлении  $m(x)$  и ограничениях

$$I_{j,k}^\tau = [b_{j,k}^\tau; t_{j,k}^\tau], \quad j = 1, \dots, n_1, \quad k = 0, \dots, \nu_1^\tau, \quad \nu_1^\tau \geq 1,$$

для «контрольных» значений локального теплового потока

$$q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$$



требуется **найти** непрерывно-дифференцируемое на  $X$  управление  $\tau^\sim$ , задаваемое [15] элементами

$$\tau^\sim(x) = \tau_j^\sim(x) \quad \text{для} \quad x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad j = 1, \dots, n_1,$$

удовлетворяющими условиям

$$(\tau^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^\tau \quad \text{для} \quad x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad k = 0, \dots, \nu_1^\tau, \quad (14)$$

такое, что вычисленные [7, 8, 12] на  $X_2$  значения

$$q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}, \quad \text{где} \quad q_j^\sim = q(x_j^\vee; m, \tau^\sim, s),$$

должны быть *близкими* к  $q^\vee$ , т.е.

$$q^\vee \rightarrow \tau^\sim, \quad (m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim), \quad (15)$$

где

$$f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}, \quad f_j^\sim = f(x_j^\vee; m, \tau^\sim, s).$$

Для «контрольных»  $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$  обратная задача по  $\tau$  имеет вид:

$$f^\vee \rightarrow \tau^\sim, \quad (m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee). \quad (16)$$

Определения ИПОЗ и АПОЗ для (15), (14) и (16), (14) – аналогичны (2), (1) и (3), (1): требуется заменить  $m^\sim$  на  $\tau^\sim$  в (6) и (7).

## 7. Двумерная обратная задача тепломассообмена

Аналогично п.2 и п.6 сформулируем [2, 18] обратную задачу по паре управлений  $m$  и  $\tau$ .

Пусть **заданы**:

- 1) сетка управления  $X_1: x_0^\wedge = 0 < x_1^\wedge < \dots < x_{n_1}^\wedge = 1$ ;
- 2) сетка наблюдения  $X_2: x_0^\vee = 0 < x_1^\vee < \dots < x_{n_2}^\vee = 1$ ;
- 3) непрерывное управление  $s(x) = \sigma B_0^2(x)$  – магнитное поле.

Для ограничений

$$I_{j,k}^c = [b_{j,k}^c; t_{j,k}^c], \quad j = 1, \dots, n_1, \quad k = 0, \dots, \nu_1^c, \\ c \in \{m, \tau\}, \quad \nu_1^m \geq 0, \quad \nu_1^\tau \geq 1,$$

для пар «контрольных» значений

$$(q^\vee, f^\vee) = ((q_j^\vee, f_j^\vee))_{j=0, \dots, n_2}$$

требуется **найти** пару управлений  $(m^\sim, \tau^\sim)$ , удовлетворяющих условиям из п.2 и п.6, в частности, (1) и (14), таких, что вычисленные [7, 8, 12] на  $X_2$  пары

$$(q^\sim, f^\sim) = ((q_j^\sim, f_j^\sim))_{j=0, \dots, n_2},$$

где

$$q_j^\sim = q(x_j^\vee; m^\sim, \tau^\sim, s), \quad f_j^\sim = f(x_j^\vee; m^\sim, \tau^\sim, s),$$

должны быть *близкими* к  $(q^\vee, f^\vee)$ , т.е.

$$(q^\vee, f^\vee) \rightarrow (m^\sim, \tau^\sim) \quad , \quad (m^\sim, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim \approx f^\vee). \quad (17)$$

ИПОЗ и АПОЗ для (17), (1), (14) вводятся аналогично п.3 с помощью

$$R_\infty((q^\sim, f^\sim); (q^\vee, f^\vee)) = \max \{R_\infty(q^\sim; q^\vee), R_\infty(f^\sim; f^\vee)\}, \quad (18)$$

$$R_p((q^\sim, f^\sim); (q^\vee, f^\vee)) = (R_p^p(q^\sim; q^\vee) + R_p^p(f^\sim; f^\vee))^{1/p} \text{ при } p \in [1; +\infty). \quad (19)$$

В правых частях (18) и (19) используются (4) и (5).

### Заключение

Для предложенных в данной работе постановок одномерных (по вдуву и по температурному фактору) и двумерной (по паре управлений) обратных задач приведены результаты вычислительных экспериментов восстановления по параметрам теплообмена (локальным тепловому потоку и напряжению трения) только одного из управлений – вдува. Анализ результатов восстановления другого управления (температурного фактора) и пары управлений являются предметом отдельного исследования.

Вопросы существования решений ИПОЗ в точке торможения в форме достаточных условий на диапазоны изменяемых параметров, аналогичные рассмотренным в [14], а также приведённым в п.4 (11), (12), (13), излагаются в продолжении [19] данной статьи.

### Благодарности

Работа выполнена:

а) при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (уникальный идентификатор соглашения – RFMEFI57715X0195);

б) при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, госконтракт в рамках 220-го постановления №14.Z50.31.0023.

## Литература

- [1] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Об одной обратной задаче тепломассообмена* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // “Герценовские чтения – 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” в электронном журнале “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 2016. — № 2. — Ч. 2. — С. 50–56. [<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf>]
- [2] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Об обратных задачах тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа (26 января – 1 февраля 2017 г.) — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 39–44.
- [3] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Одномерные и двумерные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017»: Материалы научной конференции, 10 – 14 апреля 2017 г. — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. — С. 26–32.
- [4] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Об одномерных и двумерных обратных задачах тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA – 2017, г. Санкт-Петербург, 22 – 27 мая 2017 г.). — Ч. I. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 224–229.
- [5] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О синтезе управления в обратных задачах тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. I. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 126–135.
- [6] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О вычислительных экспериментах по построению эффективного управления тепломассообменом в прямых и обратных задачах гиперзвуковой аэродинамики* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управле-

- ние: Труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. I. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 136–145.
- [7] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.
- [8] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.
- [9] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.
- [10] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых перфорированных поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16 – 18 декабря 2015 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. — С. 134–136.
- [11] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16 – 18 декабря 2015 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. — С. 137–139.
- [12] **Бильченко Н. Г.** *Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

- [13] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.
- [14] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 4. — С. 5–12.
- [15] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016»: Материалы междунар. конф. (Воронеж, 25 – 31 января 2016 г.) / под ред. В. А. Костина. — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2016. — С. 82–86.
- [16] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 4. — С. 13–19.
- [17] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О некоторых вычислительных экспериментах в обратных задачах тепломассообмена* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Сеточные методы для краевых задач и приложения (20 – 25 октября 2016 г.). Материалы XI Междунар. конф. — Казань: Казанский ун-т, 2016. — С. 70–75.
- [18] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. III. О постановке двумерных задач и областях допустимых значений «тепло – трение»* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2017. — № 1. — С. 18–25.
- [19] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Биективность пар управляющих воздействий и локальных параметров тепломассообмена в точке торможения гиперзвукового потока* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 2017. — № 3. — С. 163–175. [<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/>]

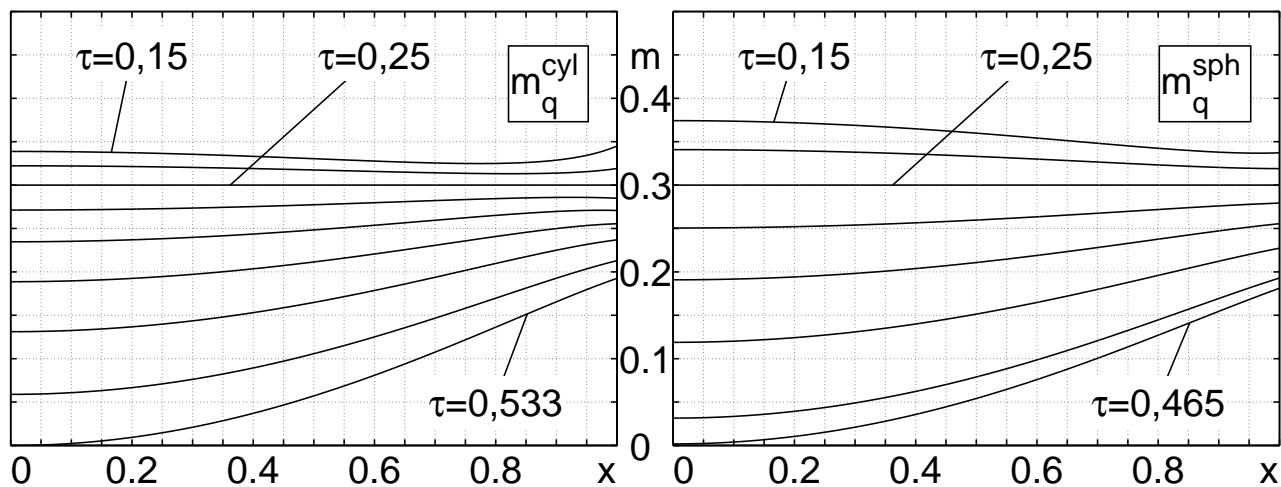


Рис. 1. Вдвух  $m_q^{\sim}$ , восстановленные по  $q^{\vee}$

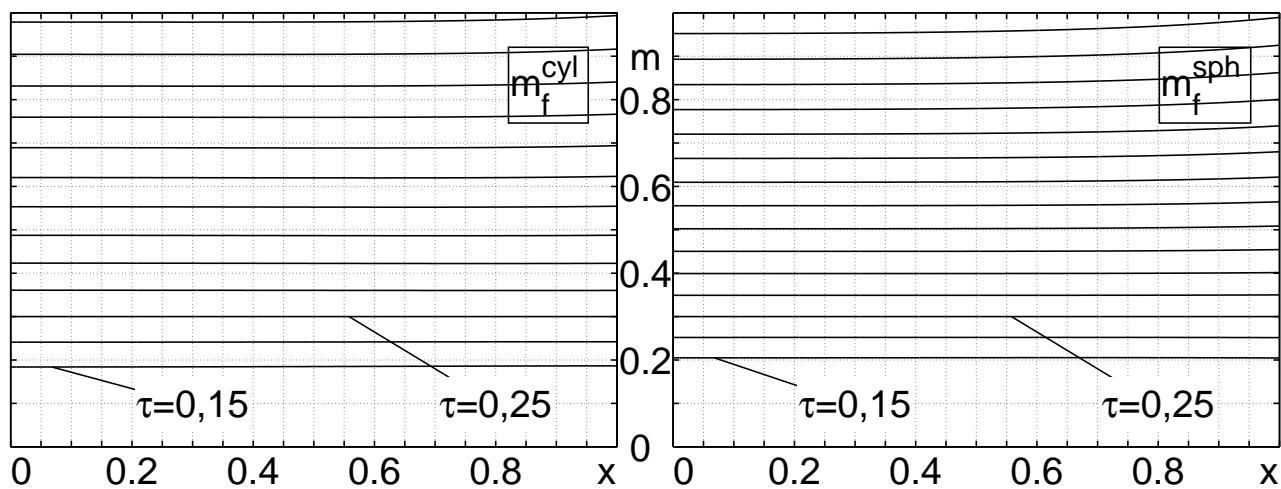


Рис. 2. Вдвух  $m_f^{\sim}$ , восстановленные по  $f^{\vee}$

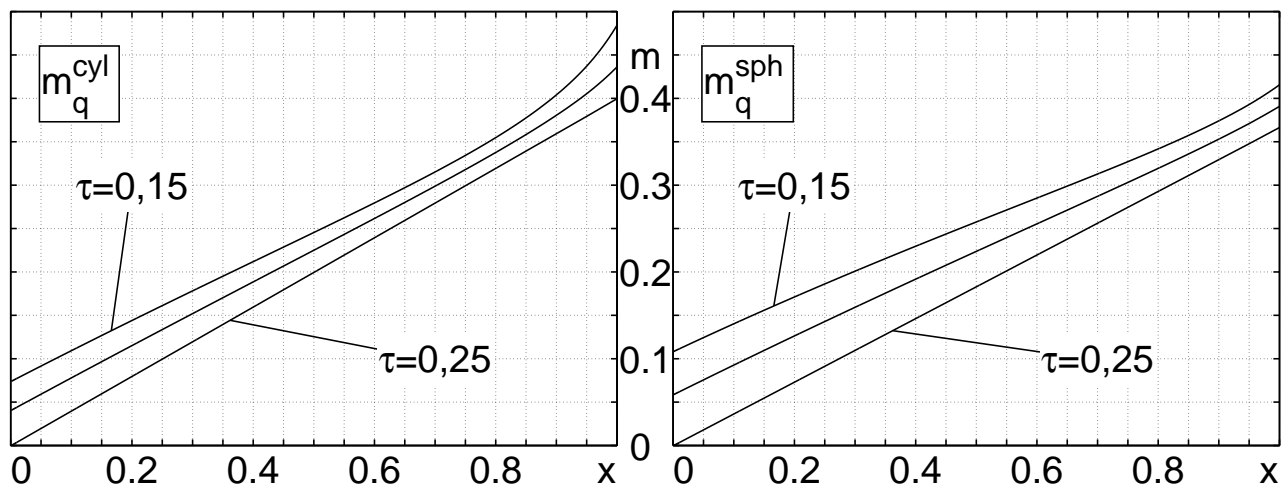


Рис. 3. Вдвух  $m_q^{\sim}$ , восстановленные по  $q^{\vee}$

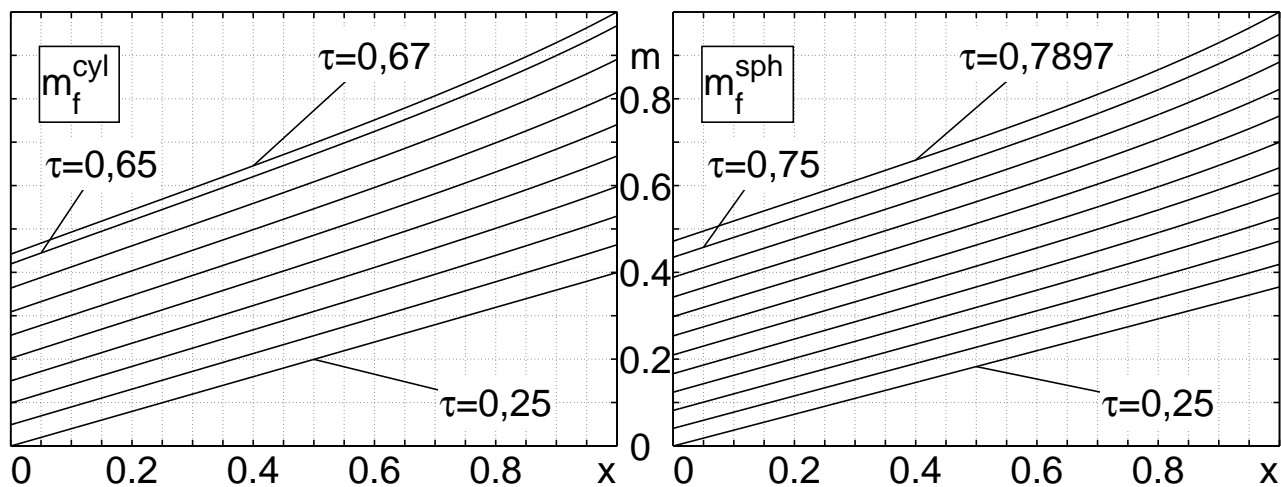


Рис. 4. Вдувы  $m_f^{\sim}$ , восстановленные по  $f^v$

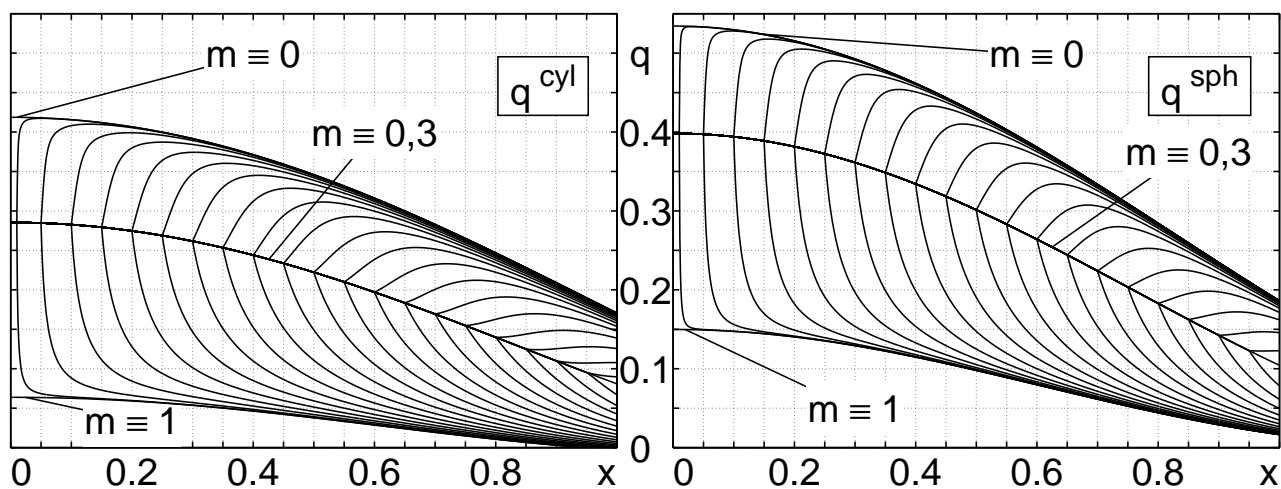


Рис. 5. Реакции  $q$  на ступенчатое изменение вдува

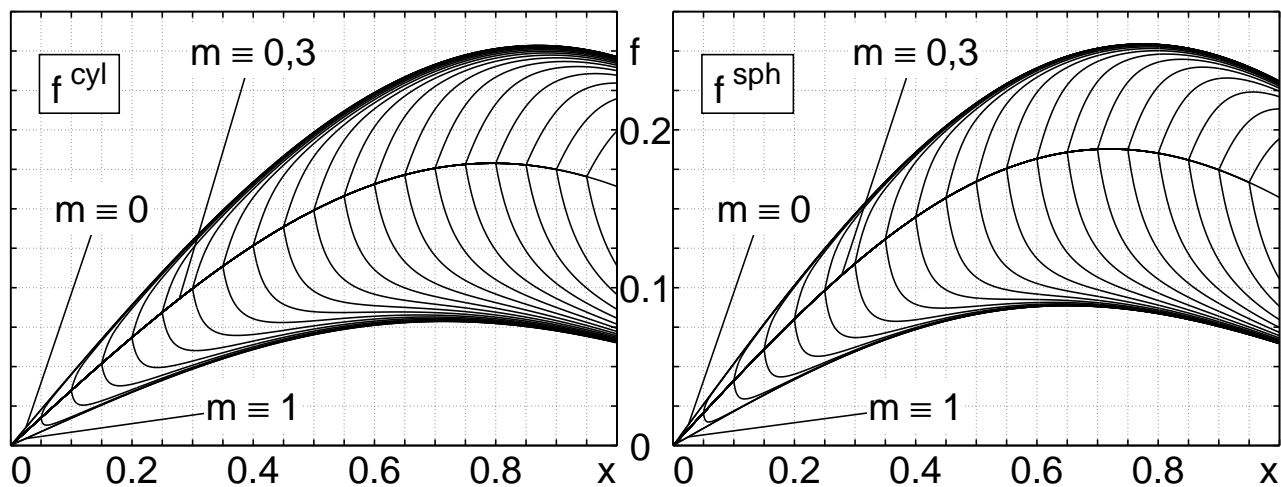


Рис. 6. Реакции  $f$  на ступенчатое изменение вдува