*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2 , 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru*

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Бесова М. И.
ФГБОУ ВО “Национальный исследовательский университет ««МЭИ»»

Аннотация

В работе на примере краевой сингулярно возмущенной задачи для уравнения второго порядка демонстрируется метод, основанный на голоморфной регуляризации сингулярных возмущений. Этот метод вытекает из метода регуляризации С.А.Ломова и его главной целью является построение так называемых псевдоголоморфных решений, то есть таких решений, которые представлены в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра. При этом для обоснования глобальной разрешимости краевой задачи предложен алгоритм псевдоголоморфного продолжения. Актуальность изучаемых в статье задач диктуется в первую очередь необходимостью дальнейшего развития аналитической теории сингулярных возмущений, основы которой заложены в трудах С.А. Ломова. Что же касается приложений, то и там вопросы гладкости решений по сингулярно входящему параметру также имеют место. Например, в теоретической физике известен так называемый аргумент Дайсона, суть которого состоит в том, что решение сингулярно возмущенной задачи не может аналитически зависеть от малого параметра (в астрофизике - от гравитационной постоянной). Как доказано в работе, после точного описания сингулярностей регулярная часть решения будет аналитически зависеть от параметра. Весьма важным также является изучение тихоновских систем и их использования для построения математических моделей в биологии. **Ключевые слова:** тихоновская система, аналитические по малому параметру интегралы, псевдоголоморфные решения.

Abstract

In this paper a method based on the singular perturbations' holomorphic regularization was demonstrated on the example of the boundary value problem for a singularly perturbed second-order differential equation. This method follows the regularization method by S.A.Lomov and its main purpose is to construct so called pseudo-holomorphic solutions, i.e. solutions represented in the form of series in terms of powers of a small parameter convergent in the regular sense. Herewith a pseudo-holomorphic continuation algorithm was proposed to prove the global solvabiliy of the boundary value problem. The relevance of the problems studied in the article is dictated primarily by the necessity of further development in the analytical theory of singular perturbations, the fundamental principles of which are laid in the works of S.A. Lomov. In reference to the applications, the questions of solutions' smoothness with respect to the singularly incoming parameter also exist there. For example, in theoretical physics, the so-called Dyson argument is known, the essence of which is that the solution of a singularly perturbed problem cannot analytically depend on a small parameter (in astrophysics it depends on the gravitational constant). As proved in the paper, after a precise description of the singularities, the regular part of the solution will depend analytically on the parameter. It is also very important to study the Tikhonov systems and their use for constructing mathematical models in biology.

Keywords: Tikhonov systems, integrals analytical by small parameter, pseudo-holomorphic solutions

Введение

Наиболее используемым в настоящее время методом решения краевых сингулярно возмущенных задач является метод погранфункций Васильевой-Бутузова-Нефёдова [1]. Для доказательства существования решения на всем промежутке задания уравнения здесь используется метод дифференциальных неравенств, основанный на идеях Чаплыгина и Нагумо [2,5] о верхних и нижних решениях. Для построения решения краевой задачи используется "метод стрельбы", законность применения которого фактически означает существование решения соответствующей начальной задачи на всём промежутке. В данной работе используется подход, связанный с голоморфной регуляризацией сингулярно возмущенных задач [7,8] и являющийся развитием идей С.А. Ломова о существовании, при определенных условиях решений, представимых сходящимися в обычном смысле рядами по степеням малого параметра [3,4,6]. Такие решения называются псевдоаналитическими (псевдоголоморфными) и ранее строились, в основном, для начальных задач, причем локально [7,8,9], поэтому в работе будет применен алгоритм псевдоголоморфного продолжения решений. Псевдоголоморфные решения дают развитие теоремы Пуанкаре о разложении по параметру в теории дифференциальных уравнений. Построение данных решений в сингулярно возмущенных задачах позволяет не проводить исследование функциональны пространств, характеризующихся сложной топологией. Развитие метода голоморфной регуляризации помогает формировать основы аналитического подхода к теории сингулярных возмущений.

1 Метод голоморфной регуляризации и аналитические по параметру интегралы

Рассмотрим на отрезке [0,1] краевую задачу:

$$\varepsilon y'' = f(x, y, y'),\ y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

с малым положительным параметром ε. Сведем задачу (1) к краевой задаче для тихоновской системы [1,9] с одной быстрой и одной медленной переменной:

$$\begin{cases} y' = w, \\ \varepsilon w' = f(x, y, w),\ y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В соответствии с алгоритмом метода голоморфной регуляризации, перейдем от нелинейной системы к линейному уравнению ее интегралов [7,9]:

$$\varepsilon LU + f(x, y, w)U_w = 0 \tag{3}$$

где $L = \partial_x + w\ \partial_y$ - дифференциальный оператор первого порядка в частных производных. Считая оператор L подчиненным оператору $f\partial_w$, будем искать решение уравнения (3) в виде регулярного ряда по степеням малого параметра:

$$U(x,y,w,\varepsilon)=U_0(x,y,w)+\varepsilon U_1(x,y,w)+...+\varepsilon^n U_n(x,y,w)+... \qquad (4)$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, получим следующую серию задач:

$$\begin{aligned}(f\partial_w)U_0&=0\\(f\partial_w)U_1&=-LU_0\\(f\partial_w)U_2&=-LU_1\\&\dots\\(f\partial_w)U_n&=-LU_{n-1}\\&\dots\end{aligned} \qquad (5)$$

Наложим на функцию $f(x,y,w)$ условия (α): $f(x,y,w)$ аналитична на ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega}_{xyw}\subset\mathbb{R}^3$, $f(x,y,w)\neq 0\ \ \forall(x,y,w)\in\Omega_{xyw}$ и обращается в нуль на ее границе Λ . Будем также предполагать, что отрезок [0,1] принадлежит $\overline{\Omega}_{xyw}$ и ее проекции $\overline{\omega_{xy}}$ на пространство $\mathbb{R}^2$. В качестве решения первого уравнения серии (5) возьмем произвольную функцию $\psi(x,y)$, аналитическую на замкнутой области $\overline{\omega_{xy}}$. Обозначим теперь через $\widetilde{w}$ значение быстрой переменной w на левом конце отрезка задания уравнения и потребуем , чтобы $U_n(x,y,\widetilde{w})=0,\ n=1,2,...$.

В итоге имеем:

$$U_1(x,y,w)=-\int_{\widetilde{w}}^{w}\frac{L_1\psi dw_1}{f(x,y,w_1)}\ ,\ L_1=\partial_x+w_1\partial_y\ ;$$

$$U_2(x,y,w)=\int_{\widetilde{w}}^{w}(L_1\int_{\widetilde{w}}^{w_1}\frac{L_2\psi dw_2}{f(x,y,w_2)})\ \frac{dw_1}{f(x,y,w_1)}\ ,\ L_2=\partial_x+w_2\partial_y\ ; \qquad (6)$$

$U_3(x,y,w)=$

$$=-\int_{\widetilde{w}}^{w}(L_1\int_{\widetilde{w}}^{w_1}(L_2\int_{\widetilde{w}}^{w_2}\frac{L_3\psi dw_3}{f(x,y,w_3)})\ \frac{dw_2}{f(x,y,w_2)}\ )\frac{dw_1}{f(x,y,w_1)}\ ,\ L_3=\partial_x+w_3\partial_y\ ;$$

$$\dots$$

Перепишем формулы (6), введя следующие обозначения:

$$h_k=1/f(x,y,v_k),k=1,2,...;$$

$$J_kg=\int_{\widetilde{w}}^{w_k}g(x,y,w_{k+1})dw_{k+1},k=0,1,2,...,$$

причем, пусть $w_0 = w$. В этих обозначениях

$$U(x, y, w, \widetilde{w}, \varepsilon) = \psi - \varepsilon J_0(h_1 L_1 \psi) + \varepsilon^2 J_0(h_1 L_1 J_1(h_2 L_2 \psi)) - \\ -\varepsilon^3 J_0(h_1 L_1 J_1(h_2 L_2 J_2(h_3 J_3 L_3))) + \dots \tag{7}$$

Сходимость этого степенного ряда обосновывается с помощью следующей леммы, доказываемой методом математической индукции.

Лемма 1 . *Если в выражении*

$$(b_n(x)(b_{n-1}(x)(\dots(b_1(x)_x)_x)\dots)_x$$

раскрыть скобки по формуле производной произведения и заменить $b_r^{(s)}(x)$, *где 1* $\leq r \leq n$, *0* $\leq s \leq n$ *на s!, то полученная сумма будет равна* $(2n-1)!!$.

Представим коэффициент U_n ряда (4) , используя ранее введенные обозначения:

$$U_n = (-1)^n (J_0 J_1 ... J_{n-1})[h_1(L_1(h_2(L_2...(h_n L_n \psi)\dots)] \tag{8}$$

Для оценки модуля U_n воспользуемся тем, что она определяется в первую очередь порядком производных, и не имеет значения, по какой переменной производится дифференцирование. Поэтому, чтобы использовать лемму, заменим в операторе $L_k = \partial_x + w_k \partial_y$ переменные x и y на одну переменную $t : L_k = (w_k + 1)\partial_t$.

Поскольку функция $1/f(x, y, w)$ аналитична в области Ω_{xyw}, то для каждого компакта $\mathfrak{K}$ существует константа $C_{\mathfrak{K}}$ такая, что $|h_k^{(s)}| \leq C_{\mathfrak{K}}^s s!$.

Так как функция $\psi(x, y)$ аналитична на компакте $\overline{\omega_{xy}}$, то для неё существует константа C такая, что $|\psi^{(s)}| \leq C^s s!\ \forall (x, y) \in \overline{\omega_{xy}}$.

Пусть $\widetilde{C_{\mathfrak{K}}} = max(C_{\mathfrak{K}}, C)$. Тогда , если $|w| \leq M$, то на компакте $\mathfrak{K}$

$$|U_n| \leq \left| \int_{\widetilde{w}}^{w} (w_1 + 1) dw_1 \int_{\widetilde{w}}^{w_1} (w_2 + 1) dw_2 \cdots \int_{\widetilde{w}}^{w_{n-1}} (w_n + 1) dw_n \right| \cdot \widetilde{C_{\mathfrak{K}}^n} \cdot (2n-1)!! \leq \\ \leq \frac{\widetilde{C_{\mathfrak{K}}^n}(M+1)^n (2M)^n (2n-1)!!}{n!}, \tag{9}$$

поскольку

$$\int_{\widetilde{w}}^{w} dw_1 \int_{\widetilde{w}}^{w_1} dw_2 \cdots \int_{\widetilde{w}}^{w_{n-1}} dw_n = \frac{(w - \widetilde{w})^n}{n!}.$$

Сходимость ряда (7) в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от компакта $\mathfrak{K}$) следует из признака Даламбера. Таким образом, доказано существование в области Ω_{xyw} аналитических по малому параметру интегралов системы (2). Для определения ее решения нужны два независимых интеграла. Существует бесконечное число способов получения независимых интегралов. Укажем один из них. Пусть $w = V(x,y)$ является корнем уравнения $f(x,y,w)=0$, аналитическим в области $\overline{\omega_{xy}}$, а $\overline{y}(x)$ - решением задачи Коши

$$y' = V(x,y),\ y(0)=0, \tag{10}$$

которое аналитично на отрезке [0,1]. Полагая последовательно $\psi(x,y)$ равной $\varphi(x)$, аналитической на отрезке [0,1] и такой, что $\varphi(0)=0$, а затем равной $y-\overline{y}(x)$, построим два независимых интеграла:

$$U^{[1]}(x,y,w,\widetilde{w},\varepsilon) =$$

$$=\varphi(x)-\varepsilon J_0(h_1\varphi')+\varepsilon^2 J_0(h_1L_1J_1(h_2\varphi'))-\varepsilon^3 J_0(h_1L_1J_1(h_2L_2J_2(h_3\varphi')))+\ldots \tag{11}$$

$$U^{[2]}(x,y,w,\widetilde{w},\varepsilon) = y-\overline{y}(x)-\varepsilon J_0(h_1(w_1-\overline{y}'))+\varepsilon^2 J_0(h_1L_1J_1(h_2(w_2-\overline{y}')))-\ldots$$

Замечание. Действуя подобным образом, можно построить k независимых интегралов для уравнения k-го порядка:

$$\varepsilon y^{(k)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)}).$$

2 Псевдоголоморфные решения и их продолжения

Введем следующее понятие.

Определение. Решение $y(x,\varepsilon)$ краевой задачи (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon=0$, если существует функция $Y(x,\eta,\varepsilon)$, аналитическая по третьей переменной в точке $\varepsilon=0$ при каждом $x\in[0,1]$ и каждом η из некоторого неограниченного множества T, и такая, что для некоторой функции $\varphi(x)$ выполняется равенство для

$$y(x,\varepsilon) = Y(x,\varphi(x)/\varepsilon,\varepsilon),\ \forall x\in[0,1], \tag{12}$$

когда ε принадлежит достаточно малой окрестности значения $\varepsilon=0$.

Сформулируем достаточные условия существования псевдоголоморфного решения у краевой задачи.

Теорема 1 *Пусть аналитическая на отрезке [0,1] функция* $\varphi(x)$ *такова, что* $\varphi(0) = 0$, *и уравнение*

$$\varphi'(x) \int_{\widetilde{w}}^{w} \frac{dw_1}{f(x, \overline{y}(x), w_1)} = \varphi(x)/\varepsilon \tag{13}$$

имеет решение вида

$$w = W_0(x, \Psi(\varphi(x)/\varepsilon), \widetilde{w}),$$

в котором $q = \Psi(\eta)$ *— целая функция с асимптотическим значением, равным* p_0, *и функция* $W_0(x, q, \widetilde{w})$ *является аналитической на параллелепипеде* $\Pi_0 = [0, 1] \times Q \times G$, *где* Q *и* G *— отрезки, причем* Q *содержит точки* $\Psi(0)$ *и* p_0. *Тогда решение* $y(x, \varepsilon)$ *краевой задачи (1) является псевдоголоморфным в точке* $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Сначала докажем, что при любом $\widetilde{w} \in G$ на всём отрезке [0,1] существует решение задачи Коши

$$\varepsilon y'' = f(x, y, y'); \; y(0, \varepsilon) = 0, \; y'(0, \varepsilon) = \widetilde{w} \tag{14}$$

при достаточно малом положительном ε. Сведем задачу (14) к начальной задаче для системы

$$\begin{cases} y' = w, \\ \varepsilon w' = f(x, y, w); \; y(0, \varepsilon) = 0, \; w(0, \varepsilon) = \widetilde{w}, \end{cases} \tag{15}$$

к которой применим метод голоморфной регуляризации [9]. Запишем первые интегралы системы (15):

$$\begin{cases} \widetilde{U}^{[1]}(x, y, w, \widetilde{w}, \varepsilon) = \varphi(x)/\varepsilon \\ y = \overline{y}(x) + \varepsilon \widetilde{U}^{[2]}(x, y, w, \widetilde{w}, \varepsilon), \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\widetilde{U}^{[1]} = J_0(h_1\varphi') - \varepsilon J_0(h_1 L_1 J_1(h_2\varphi')) + \varepsilon^2 J_0(h_1 L_1 J_1(h_2 L_2 J_2(h_3\varphi'))) - \ldots;$$

$$\widetilde{U}^{[2]} = J_0(h_1(w_1 - \overline{y}')) - \varepsilon J_0(h_1 L_1 J_1(h_2(w_2 - \overline{y}'))) + \ldots$$

Вычислим значения функции Ψ от левой и правой частей первого из уравнений системы (16):

$$\Psi(\widetilde{U}^{[1]}(x, y, w, \widetilde{w}, \varepsilon)) = \Psi(\varphi(x)/\varepsilon).$$

Обозначим правую часть через q и в левой части выделим главный член. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} \Psi(J_0(h_1\varphi')) + \varepsilon\Phi(x, y, w, \widetilde{w}, \varepsilon) = q, \\ y = \overline{y}(x) + \varepsilon\widetilde{U}^{[2]}(x, y, w, \widetilde{w}, \varepsilon). \end{cases} \tag{17}$$

Возьмем $p > p_0$ очень близким к p_0 , предположим, что $p_0 < \Psi(0)$ и построим параллелепипед $\Pi = [0,1] \times [p, \Psi(0)] \times G$. Поскольку $W_0(x, q, \widetilde{w})$ аналитична на замкнутом параллелепипеде Π_0, то оценка ее модуля не зависит от p. Очевидно, что для системы (17) выполнены все условия теоремы о неявной функции и при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} w = W_0(x, q, \widetilde{w}), \\ y = \overline{y}(x). \end{cases}$$

Следовательно, в некоторой окрестности $\sigma_{xq\widetilde{w}}$ каждой точки $(x, q, \widetilde{w}) \in \Pi$ существует решение

$$\begin{cases} w = W(x, q, \widetilde{w}, \varepsilon), \\ y = Y(x, q, \widetilde{w}, \varepsilon), \end{cases} \tag{18}$$

системы (17), аналитическое в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$. Выберем из покрытия $\{\sigma_{xq\widetilde{w}}\}$ параллелепипеда Π конечное подпокрытие, тогда функции (18) будут аналитическими в наименьшей окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, соответствующей этому подпокрытию. Обозначим через $\widetilde{\Pi}$ прямоугольник, являющийся проекцией Π на плоскость переменных (x, q). Если величина параметра ε в уравнении (1) удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, и кривая Γ, описываемая уравнением $q = \Psi(\varphi(x)/\varepsilon)$, целиком принадлежит $\widetilde{\Pi}$, то решение $(y(x, \varepsilon), w(x, \varepsilon))$ системы (15) представимо в виде рядов:

$$\begin{cases} y(x, \varepsilon) = \overline{y}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(x, \Psi(\varphi(x)/\varepsilon), \widetilde{w}), \\ w(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_n(x, \Psi(\varphi(x)/\varepsilon), \widetilde{w}), \end{cases} \tag{19}$$

которые сходятся равномерно на отрезке [0,1]. Если же прямоугольнику $\widetilde{\Pi}$

принадлежит только часть кривой Γ, соответствующая $x \in [0, x_1](0 < x_1 < 1)$, то ряды (19) сходятся равномерно лишь на $[0, x_1]$. Обозначим это решение через $(y^{[0]}(x,\varepsilon), w^{[0]}(x,\varepsilon))$. В этом случае его нужно продолжить вправо, для чего применим алгоритм псевдоголоморфного продолжения. Решим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy^{[1]}}{dx} = w^{[1]}, \\ \varepsilon \frac{dw^{[1]}}{dx} = f(x, y^{[1]}, w^{[1]}), y^{[1]}(x_1,\varepsilon) = y^{[0]}(x_1,\varepsilon), w^{[1]}(x_1,\varepsilon) = w^{[0]}(x_1,\varepsilon)). \end{cases} \tag{20}$$

Запишем систему, аналогичную системе (16) первых интегралов:

$$\begin{cases} \widetilde{U}^{[1]}(x, y^{[1]}, w^{[1]}, w(x_1,\varepsilon), \varepsilon) = (\varphi(x) - \varphi(x_1))/\varepsilon, \\ y = \overline{y}(x) + \varepsilon \widetilde{U}^{[2]}(x, y^{[1]}, w^{[1]}, w(x_1,\varepsilon), \varepsilon). \end{cases} \tag{21}$$

Она задаёт неявно решение $(y^{[1]}(x,\varepsilon), w^{[1]}(x,\varepsilon))$ системы (20). В итоге решение $(y^{[0]}(x,\varepsilon), w^{[0]}(x,\varepsilon))$ продолжится на некоторый отрезок $[x_1, x_2]$, причем псевдоголоморфным образом, и т.д. Не ограничивая общности, будем предполагать, что регуляризирующая функция $\varphi(x)$, описывающая погранслой, строго монотонно убывает на промежутке [0,1] (например, в методе погранфункций $\varphi(x) = -x$), а функция Ψ, напротив, на интервале $(p_0, \Psi(0))$ строго возрастает (в большинстве случаев это экспонента) [1,3]. При продолжении с помощью систем, аналогичных (21), получим цепочку следующих равенств:

$$\frac{\varphi(x_1)}{\varepsilon} = \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{\varepsilon} = \cdots = \frac{\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})}{\varepsilon} = \ldots, m = 2, 3, ..., j.$$

По формуле Лагранжа $\varphi'(\widetilde{x_m})(x_m - x_{m-1}) = \varphi(x_1)$, где $\widetilde{x}_m \in (x_{m-1}, x_m), m = \overline{2, j}$. Так как $\varphi(x)$ голоморфна на отрезке [0,1], то $|\varphi'(x)| \leq l$ $\forall x \in [0,1]$ для некоторой константы l , а значит, $x_m - x_{m-1} \geq |\varphi(x_1)|/l$ при каждом $m \in \{1, 2, 3, ..., j\}$. Таким образом, точки $x = 1$ можно достичь за конечное число шагов. В итоге решение $y^{[0]}(x,\varepsilon)$ будет продолжено на весь отрезок, а под решением начальной задачи (15) будем понимать совокупность элементов $(y^{[0]}(x,\varepsilon), y^{[1]}(x,\varepsilon), \ldots, y^{[j]}(x,\varepsilon))$.

Поскольку каждый элемент зависит от $\widetilde{w}$, то

$$y^{[j]}(x,\varepsilon) = F^{[j]}(x, ((\varphi(x) - \varphi(x_{j-1}))/\varepsilon), \widetilde{w}),$$

откуда вытекает уравнение для определения $\widetilde{w}$:

$$F^{[j]}(1, (\varphi(1) - \varphi(x_{j-1})/\varepsilon), \widetilde{w}) = 0.$$

Одно из найденных значений подставим в формулы для $y^{[m]}(x,\varepsilon)(\overline{m} = \overline{1,j})$ и получим псевдоголоморфное решение $y(x,\varepsilon)$ краевой задачи (1). Теорема доказана.

3 Пример нахождения $y^{[0]}(x,\varepsilon)$ первого порядка, удовлетворяющего краевым условиям.

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y'' = x^2 + y^2/4 + (y')^2 - 4, x \in [0,1], y(0,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 0.$$

Здесь предельная задача

$$\begin{gathered} y' = \sqrt{4 - x^2 - y^2/4},\ x \in [0,1], \\ y(0) = 0. \end{gathered}$$

Докажем существование решения этой задачи на всем отрезке с помощью теоремы Чаплыгина [2]. Поскольку $0 \le y'(x) \le 2$, то $0 \le y(x) \le 2$. Далее, $\widetilde{f}(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2/4}$ аналитична вместе со своей частной производной по y на прямоугольнике $[0,1]\times[0,2]$, и легко построить нижнее и верхнее решения: $\overline{y}_{н} = 2\sqrt{3}sin(x/2), \overline{y}_{в} = 4sin(x/2)$. Значит, решение $\overline{y}(x)$ существует на всем промежутке.

Вернемся к исходной задаче и сведем ее к системе.

$$\begin{cases} y' = w, \\ \varepsilon w' = x^2 + y^2/4 + w^2 - 4;\ y(0,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Здесь поверхностью Λ служит эллипсоид $x^2 + y^2/4 + w^2 = 4$. Будем строить интегралы этой системы в области $\Omega_{xyw} = \Big\{(x,y,w) : x^2 + y^2/4 + w^2 < 4\Big\}$, в которой $f(x,y,w) < 0$. В результате, применив метод голоморфной регуляризации, получим решение $y_1^{[0]}(x,\varepsilon)$ первого порядка поставленной краевой задачи:

$$y_1^{[0]}(x,\varepsilon) = \overline{y}(x) + \varepsilon ln \frac{2A(x)}{\widetilde{w} + A(x) - (\widetilde{w} - A(x))e^{2\overline{y}(x)/\varepsilon}},$$

где

$$A(x) = \sqrt{4 - x^2 - \overline{y}^2(x)/4}, \widetilde{w} = A(1)th(\overline{y}(1)/2\varepsilon).$$

В заключение следует отметить, что метод голоморфной регуляризации применим также для построения уравнений и систем уравнений высших порядков. Данный метод сочетает в себе принципы метода регуляризации С. А. Ломова, а также основы метода линеаризации, позволяющего свести нелинейную дифференциальную задачу к линейной и впоследствии исследовать ее с точки зрения метода регуляризации. Таким образом, развитие метода голоморфной регуляризации может существенно оптимизировать процесс решения нелинейных сингулярно возмущенных задач.

Список литературы

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений - М.: Высшая школа 1990

[2] Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина - М.: Изд-во МГУ 2007

[3] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений - М.:Наука 1981

[4] Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя - М.:Изд-во МГУ 2011

[5] Chang K. W, Howes F. A Nonlinear singular perturbation phenomena : theory and applications - New York : Springer-Verlag 1984

[6] Качалов В. И., Ломов С. А. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Доклады РАН 1994 т. 334 вып. 6 с. 694–695

[7] Качалов В. И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестник МЭИ 2010 вып. 6 с. 54-62

[8] Качалов В. И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики 2017 т. 57 вып. 4 с. 64–71

[9] Качалов В. И. Об одном методе решения сингулярно возмущенных систем тихоновского типа // Известия вузов. Математика 2018,вып. 6,с. 25–30