ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ [1]

В. В. БАСОВ, А. С. ВАГАНЯН

198504, Россия, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, armay@yandex.ru

Аннотация

Рассмотрена эквивалентность гамильтоновых систем в окрестности точки покоя относительно группы формальных канонических преобразований.

Предложены определения метанормальной и нормальной формы гамильтониана и метод их нахождения, не требующие ограничений на степень невозмущенной части гамильтониана.

Исследована связь введенных гамильтоновых нормальных форм с уже имеющимися нормальными формами гамильтоновых систем А.Д. Брюно и К.Р. Мейера.

Получены гамильтоновы нормальные формы вещественных гамильтоновых систем с одной степенью свободы в случае, когда невозмущенная часть гамильтониана мономиальна, а также в случае, когда невозмущенная часть гамильтониана является неприводимым двучленом со взаимно-простыми показателями.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09–01–00734-а)

Часть I

Системы Гамильтона

1 Системы Гамильтона и канонические преобразования

1.1 Формальные системы Гамильтона

В этом разделе приводятся необходимые сведения из теории гамильтоновых систем. Их подробное изложение можно найти, например, в [10].

Пусть f — формальный степенной ряд от переменных $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Слова "формальный степенной" в дальнейшем будем опускать.

Под записью $f(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(u,v)$ будем понимать разложение ряда f в сумму однородных многочленов f_k степени k.

Определение 1 *Порядком ряда f называется наименьшее натуральное число $r \geq 0$, для которого $f_r \not\equiv 0$. Порядок будем обозначать через* $\operatorname{ord} f$. *Если $f \equiv 0$, то* $\operatorname{ord} f = +\infty$.

Определение 2 *Для произвольных рядов $f = f(u,v)$, $\varphi = \varphi(u,v)$ скобкой Пуассона ряда f с φ называется ряд*

$$\widehat{f}(\varphi) = \{f, \varphi\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi}{\partial v_j} - \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}. \tag{1}$$

В частности, для самих переменных u_j, v_k выполняются тождества:

$$\{u_j, v_k\} \equiv \delta_k^j, \ \{u_j, u_k\} \equiv 0, \ \{v_j, v_k\} \equiv 0 \quad (j, k = \overline{1, n}\,),$$

где δ_k^j — символ Кронекера.

Скобка Пуассона обладает следующими свойствами:

1) $\widehat{f}(\varphi) = -\widehat{\varphi}(f)$ (кососимметричность);
2) $\widehat{f}(\alpha\,\varphi + \beta\,\psi) = \alpha\,\widehat{f}(\varphi) + \beta\,\widehat{f}(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (линейность);
3) $\widehat{f}\,(\varphi\,\psi) = \widehat{f}(\varphi)\,\psi + \varphi\,\widehat{f}\,(\psi)$ (правило Лейбница);
4) $\widehat{f}(\{\varphi, \psi\}) = \{\widehat{f}\,(\varphi), \psi\} + \{\varphi, \widehat{f}\,(\psi)\}$ (тождество Якоби).

Рассмотрим гамильтониан, представленный рядом

$$H(u,v) = H_r(u,v) + \sum_{k=r+1}^{\infty} H_k(u,v) \quad (r \geq 2). \tag{2}$$

Однородный многочлен наименьшей степени H_r в разложении (2) будем называть невозмущенным гамильтонианом, а ряд $H - H_r$ — возмущением.

Система уравнений Гамильтона для гамильтониана H имеет вид

$$\dot{u}_j = \frac{\partial H}{\partial v_j}, \quad \dot{v}_j = -\frac{\partial H}{\partial u_j} \qquad (j = \overline{1, n}). \tag{3}$$

Точка O — начало координат — является точкой покоя системы (3), так как $\operatorname{ord} H \geq 2$.

Определение 3 *Ряд $\varphi = \varphi(u, v)$ называется интегралом невозмущенного гамильтониана H_r, если*

$$\widehat{H}_r(\varphi) = \{H_r, \varphi\} = 0.$$

Пусть $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$, тогда $\{H_r, \varphi\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{H_r, \varphi_k\}$ — разложение $\{H_r, \varphi\}$ в сумму однородных слагаемых $\{H_r, \varphi_k\}$ степени $k + r - 2$.

Следовательно, если φ — интеграл невозмущенного гамильтониана H_r, то однородные многочлены φ_k также являются интегралами гамильтониана H_r.

1.2 Формальные канонические преобразования

Рассмотрим произвольные ряды $u_j(x, y)$, $v_k(x, y)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $\operatorname{ord} u_j$, $\operatorname{ord} v_k \geq 1 \quad (j, k = \overline{1, n})$.

Для произвольного ряда $f(u, v)$ положим

$$\widetilde{f}(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Очевидно, что порядок ряда $\widetilde{f}$ не меньше порядка ряда f.

Определение 4 *Ряды $u_j = \widetilde{u}_j(x, y)$, $v_k = \widetilde{v}_k(x, y)$ с $\operatorname{ord} \widetilde{u}_j$, $\operatorname{ord} \widetilde{v}_k = 1$ определяют формальное каноническое преобразование, если*

$$\{\widetilde{u}_j, \widetilde{v}_k\} \equiv \delta_k^j, \quad \{\widetilde{u}_j, \widetilde{u}_k\} \equiv 0, \quad \{\widetilde{v}_j, \widetilde{v}_k\} \equiv 0 \quad (j, k = \overline{1, n}). \tag{4}$$

Данное определение эквивалентно матричному равенству

$$(D(\widetilde{u}, \widetilde{v})/D(x, y))\, I\, (D(\widetilde{u}, \widetilde{v})/D(x, y))^T = I, \tag{5}$$

где $I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\det (D(\widetilde{u}, \widetilde{v})/D(x, y)) = \pm 1$.

Утверждение 1 *Скобка Пуассона инвариантна относительно формальных канонических преобразований $u_j = \widetilde{u}_j(x, y)$, $v_k = \widetilde{v}_k(x, y)$, т. е.*

$$\{f, \varphi\} = \{\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}\}. \tag{6}$$

Доказательство Согласно определению 2,

$$\{\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial y_j} - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y_j} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_j}. \tag{7}$$

Положим в (7) $\dfrac{\partial}{\partial x_j}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial u_k}+\dfrac{\partial\widetilde{v}_k}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial v_k},\quad \dfrac{\partial}{\partial y_j}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial y_j}\dfrac{\partial}{\partial u_k}+\dfrac{\partial\widetilde{v}_k}{\partial y_j}\dfrac{\partial}{\partial v_k}.$

С учетом (4) вычислим скобку Пуассона (7) в старых переменных. Для краткости будем опускать аргументы и подразумевать суммирование по повторяющимся индексам.

Имеем: $\{\widetilde{f},\widetilde{\varphi}\}=$

$$=\left(\frac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial u_k}+\frac{\partial\widetilde{v}_k}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial v_k}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{u}_l}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi}{\partial u_l}+\frac{\partial\widetilde{v}_l}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi}{\partial v_l}\right)-\left(\frac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial y_j}\frac{\partial f}{\partial u_k}+\frac{\partial\widetilde{v}_k}{\partial y_j}\frac{\partial f}{\partial v_k}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{u}_l}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial u_l}+\frac{\partial\widetilde{v}_l}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial v_l}\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\{\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_l\}+\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial\varphi}{\partial v_l}\{\widetilde{u}_k,\widetilde{v}_l\}+\frac{\partial f}{\partial v_k}\frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\{\widetilde{v}_k,\widetilde{u}_l\}+\frac{\partial f}{\partial v_k}\frac{\partial\varphi}{\partial v_l}\{\widetilde{v}_k,\widetilde{v}_l\}\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}-\frac{\partial f}{\partial v_j}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}=\{f,\varphi\}.\ \square$$

Утверждение 2 *Формальное каноническое преобразование* $u_j=\widetilde{u}_j(x,y)$, $v_k=\widetilde{v}_k(x,y)$ *переводит систему* (3) *в систему*

$$\dot{x}_j=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial y_j},\quad \dot{y}_j=-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_j}\quad (j=\overline{1,n}\,),\tag{8}$$

где согласно введенным обозначениям $\widetilde{H}(x,y)=H(\widetilde{u},\widetilde{v})$.

Доказательство Дифференцируя ряды u_j,v_k по времени в силу системы (3), получаем

$$\dot{u}_j=\{u_j,H\}\overset{(6)}{=}\{\widetilde{u}_j,\widetilde{H}\},\quad \dot{v}_k=\{v_k,H\}\overset{(6)}{=}\{\widetilde{v}_k,\widetilde{H}\}.$$

С другой стороны

$$\dot{u}_j=\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial x_l}\dot{x}_l+\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial y_l}\dot{y}_l,\quad \dot{v}_k=\frac{\partial\widetilde{v}_j}{\partial x_l}\dot{x}_l+\frac{\partial\widetilde{v}_j}{\partial y_l}\dot{y}_l.$$

Таким образом, получаем равенства:

$$\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial x_l}\left(\dot{x}_l-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial y_l}\right)+\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial y_l}\left(\dot{y}_l+\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_l}\right)=0,\quad \frac{\partial\widetilde{v}_k}{\partial x_l}\left(\dot{x}_l-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial y_l}\right)+\frac{\partial\widetilde{v}_k}{\partial y_l}\left(\dot{y}_l+\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_l}\right)=0.$$

Якобиан формального канонического преобразования отличен от нуля, поэтому из этих равенств вытекает система (8). $\square$

1.3 Преобразования Ли

Для каждого ряда $f=f(x,y)$ с $\operatorname{ord} f\geq 3$ определим оператор $exp(\widehat{f}\,)$:

$$exp(\widehat{f}\,)(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}^{\,k}(\varphi)}{k!},$$

где $\varphi=\varphi(x,y)$ — ряд, а $\widehat{f}^{\,k}=\widehat{f}\cdots\widehat{f}$ — k-кратная композиция $\widehat{f}$ из (1), $\widehat{f}^{\,0}(\varphi)=\varphi$. При этом $\operatorname{ord}\widehat{f}^{\,k}(\varphi)=\operatorname{ord}\varphi+k(\operatorname{ord} f-2)\geq k$, если $\widehat{f}^{\,k}(\varphi)\not\equiv 0$, иначе $\operatorname{ord}\widehat{f}^{\,k}(\varphi)=+\infty$.

Утверждение 3 *Оператор* $exp(\widehat{f}\,)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $exp(\widehat{f}\,)(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\, exp(\widehat{f}\,)(\varphi) + \beta\, exp(\widehat{f}\,)(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

2) $exp(\widehat{f}\,)(\varphi\,\psi) = exp(\widehat{f}\,)(\varphi)\, exp(\widehat{f}\,)(\psi)$;

3) $exp(\widehat{f}\,)(\{\varphi, \psi\}) = \{exp(\widehat{f}\,)(\varphi), exp(\widehat{f}\,)(\psi)\}$;

4) $exp(-\widehat{f}\,)(exp(\widehat{f}\,)(\varphi)) = \varphi$,

т.е. $exp(\widehat{f}\,)$ *является автоморфизмом алгебры рядов, снабженной операцией* $\{\,.\,,\,.\,\}$.

Доказательство 1) следует из линейности $\widehat{f}$;

2) доказывается при помощи правила Лейбница:

$$exp(\widehat{f}\,)(\varphi\,\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}^{\,k}(\varphi\,\psi)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{C_k^l\, \widehat{f}^{\,l}(\varphi)\, \widehat{f}^{\,k-l}(\psi)}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{\widehat{f}^{\,l}(\varphi)\, \widehat{f}^{\,k-l}(\psi)}{l!\,(k-l)!} = exp(\widehat{f}\,)(\varphi)\, exp(\widehat{f}\,)(\psi);$$

3) доказывается аналогично с применением тождества Якоби;

4) следует из цепочки равенств

$$exp(-\widehat{f}\,)(exp(\widehat{f}\,)(\varphi)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(-\widehat{f}\,)^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\,\widehat{f}^{\,l}(\varphi)\right) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-\widehat{f}\,)^k(\widehat{f}^{\,l}(\varphi))}{k!\,l!} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\widehat{f}^{\,k+l}(\varphi)}{k!\,l!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}^{\,m}(\varphi)}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k m!}{k!\,(m-k)!} = \widehat{f}^{\,0}(\varphi) = \varphi; \ \square$$

Утверждение 4 *Ряды*

$$u_j = exp(\widehat{f}\,)(x_j), \quad v_k = exp(\widehat{f}\,)(y_k) \qquad (\mathrm{ord}\, f \geq 3,\ j,k = \overline{1,n}\,) \tag{9}$$

определяют формальное каноническое преобразование.

Доказательство Согласно свойству 3 оператора $exp(\widehat{f}\,)$, для преобразования вида (9) имеем следующую цепочку равенств:

$$\{\widetilde{u}_j, \widetilde{v}_k\} = \{exp(\widehat{f}\,)(x_j), exp(\widehat{f}\,)(y_k)\} = exp(\widehat{f}\,)(\{x_j, y_k\}) = exp(\widehat{f}\,)(\delta_k^j) = \delta_k^j.$$

Аналогично получаем $\{\widetilde{u}_j, \widetilde{u}_k\} \equiv 0,\ \{\widetilde{v}_j, \widetilde{v}_k\} \equiv 0$.

Следовательно, (9) — формальное каноническое преобразование по определению 4. $\square$

Следуя [8, 9, 10, 11], введем следующее определение.

Определение 5 *Формальное каноническое преобразование вида* (9) *будем называть преобразованием Ли.*

Утверждение 5 *Преобразования Ли образуют группу.*

Доказательство По определению

$$exp(\widehat{f}\,)\,exp(\,\widehat{g}\,) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\widehat{f}^{\,k}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\,\widehat{g}^{\,l}\right) = \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}^{\,k}\,\widehat{g}^{\,l}}{k!\,l!}.$$

Подстановка этого операторного ряда в логарифмический ряд (см. [7, Лекция 4])

$$\ln Z = (Z-E) - \frac{1}{2}(Z-E)^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(Z-E)^k,$$

где E — тождественный оператор, дает операторный ряд

$$\ln(exp(\widehat{f}\,)\,exp(\,\widehat{g}\,)) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum\frac{\widehat{f}^{\,p_1}\,\widehat{g}^{\,q_1}\cdots\widehat{f}^{\,p_k}\,\widehat{g}^{\,q_k}}{p_1!q_1!\ldots p_k!q_k!},$$

где во внутренней сумме суммирование распространено на всевозможные наборы $(p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k)$ целых неотрицательных чисел, подчиненных условиям:

$$p_1+q_1\geq 1,\ \ldots,\ p_k+q_k\geq 1.$$

Этот ряд называется рядом Кемпбелла–Хаусдорфа. Согласно [7, Лекция 4, Утв. B], каждое однородное слагаемое ряда Кемпбелла–Хаусдорфа как ряда от, вообще говоря, некоммутирующих переменных $\widehat{f},\widehat{g}$ представляется в виде лиевого многочлена, т. е. линейной комбинации скобок Ли этих переменных.

Поскольку, согласно тождеству Якоби, для скобки Ли операторов $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$, имеем: $[\widehat{f},\widehat{g}\,] = \widehat{f}\,\widehat{g} - \widehat{g}\,\widehat{f} = \widehat{\{f,g\}}$ и $\operatorname{ord}\{f,g\}\geq 4$, то существует такой ряд h с $\operatorname{ord} h\geq 3$, что

$$exp(\widehat{f}\,)\,exp(\,\widehat{g}\,) = exp(\widehat{h}).$$

Этим доказано, что композиция преобразований Ли есть преобразование Ли.

Ассоциативность композиции очевидна.

Единицей служит тождественное преобразование $exp(\,\widehat{0}\,)$.

Обратное к преобразованию Ли существует и по свойству 4 оператора $exp(\widehat{f}\,)$ также является преобразованием Ли. □

Как было показано в утверждении 2, при формальных канонических преобразованиях гамильтониан преобразуется по закону $\widetilde{H}(x,y) = H(\widetilde{u},\widetilde{v})$. В случае преобразований вида (9), согласно свойствам 1 и 2 оператора $exp(\widehat{f}\,)$, последнее эквивалентно равенству

$$\widetilde{H}(x,y) = exp(\widehat{f}\,)(H(x,y)). \tag{10}$$

Выпишем первые члены ряда в правой части (10):

$$\widetilde{H} = H + \{f,\ H\} + \frac{1}{2}\{f,\ \{f,\ H\}\} + \ldots. \tag{11}$$

Поскольку предполагается, что $\operatorname{ord}(f)\geq 3$, преобразования Ли не меняют невозмущенный гамильтониан, т. е. в (10) $\widetilde{H}_r = H_r$.

2 Формальная эквивалентность гамильтоновых систем

2.1 Резонансное уравнение

Обозначим пространство полиномов от переменных x, y над $\mathbb{K}$ через $\mathfrak{P}$.

Положим $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $D = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n)$.

Формула

$$\langle\langle P, Q\rangle\rangle = P(D)\overline{Q}(z)|_{z=0} \quad P, Q \in \mathfrak{P},$$

в которой $\overline{Q}$ — полином, полученный из Q комплексным сопряжением коэффициентов, определяет на $\mathfrak{P}$ скалярное произведение со свойствами (см. напр. [6, Гл. 0, §5]):

1) $\langle\langle x^p y^q, x^{p'} y^{q'}\rangle\rangle = p!q!\delta^p_{p'}\delta^q_{q'}$,

2) $\langle\langle PQ, R\rangle\rangle = \langle\langle P, Q^* R\rangle\rangle \quad (P, Q, R \in \mathfrak{P})$,

где $\delta^p_{p'} = \prod_{j=1}^n \delta^{p_j}_{p'_j}$, $\delta^q_{q'} = \prod_{j=1}^n \delta^{q_j}_{q'_j}$ — произведения символов Кронекера, а $Q^* = \overline{Q}(D)$ — дифференциальный оператор, сопряженный к Q относительно скалярного произведения.

Из свойства 1 вытекает, что пространство $\mathfrak{P}$ разбивается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{P}^k$ однородных полиномов степени k.

Рассмотрим гамильтониан

$$H(x, y) = H_r(x, y) + \sum_{|p+q|\geq r+1} h^{(p,q)} x^p y^q \qquad (r \geq 2). \tag{12_r}$$

По свойству 2 скалярного произведения $\langle\langle\,.\,,\,.\,\rangle\rangle$ оператор $\widehat{H}^*_r$, сопряженный к $\widehat{H}_r$, имеет вид

$$\widehat{H}^*_r = \sum_{j=1}^n y_j(\partial H_r/\partial x_j)^* - x_j(\partial H_r/\partial y_j)^* \ \text{ или } \ \widehat{H}^*_r = \sum_{j=1}^n (\partial H_r/\partial x_j)^* y_j - (\partial H_r/\partial y_j)^* x_j. \tag{13}$$

Здесь равенство (13_2) получено из (13_1) по формуле Лейбница.

Определение 6 *Резонансным уравнением для H_r будем называть уравнение*

$$\widehat{H}^*_r P = 0, \quad P \in \mathfrak{P}. \tag{14}$$

Его решения будем называть резонансными многочленами.

Обозначим пространство резонансных многочленов через $\mathfrak{J}$.

Поскольку невозмущенный гамильтониан H_r — однородный полином, пространство $\mathfrak{J}$ разбивается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{J}^k$ однородных резонансных многочленов степени k.

2.2 Эквивалентность гамильтоновых систем относительно группы преобразований Ли

Определение 7 *Будем говорить, что два гамильтониана H и H' с $\operatorname{ord} H, \operatorname{ord} H' = r$ и $H_r = H'_r$ эквивалентны в порядке $r + m$ $(m \geq 1)$, если существует такое преобразование Ли, что для преобразованного гамильтониана $\widetilde{H}$ выполняются равенства*

$$\widetilde{H}_k = H'_k \qquad (k = \overline{r, r+m}\,).$$

Обозначим пространство рядов от переменных x, y над $\mathbb{K}$ через Φ.

Рассмотрим пространства

$$J_s = \{\psi \in \Phi :\ \operatorname{ord}\psi \geq 3,\ \{\psi, H_{r+l}\} = 0 \ \ (l = \overline{0, s}\,)\} \qquad (s = \overline{0, m-2}\,).$$

Обозначим через J_s^k подпространство однородных элементов в J_s степени k.

Лемма 1 *Пусть* $f = \sum_{k=3}^{m+1} f_k + \varphi$, *где* $m \geq 1$, $f_k \in J_{m-k+1}^k$, *а* $\varphi \in \Phi$, $\operatorname{ord}\varphi \geq m+2$. *Тогда преобразование* (9) *сохраняет* $H_r, \ldots, H_{r+m-1}$, *а преобразование возмущения в порядке* $r+m$ *задается равенством*

$$\widetilde{H}_{r+m} = H_{r+m} + \sum_{k=3}^{m+1} \{f_k, H_{r+m-k+2}\} + \{\varphi_{m+2}, H_r\}. \tag{15}$$

Доказательство Пусть $\psi^1, \ldots, \psi^s$ $(s \geq 0)$ — набор рядов (при $s = 0$ пустой) такой, что $\operatorname{ord}\psi^\nu \geq 3$ $(\nu = \overline{1, s}\,)$, и пусть $\psi \in J_{m-k+1}$, $\operatorname{ord}\psi = k$ $(k \in \{3, \ldots, m+1\})$. Тогда

$$\operatorname{ord}\{\psi^1, \{\psi^2, \ldots \{\psi^s, \{\psi, H_{r+l}\}\}\}\} \geq r + m + s \quad (\forall\, l \geq 0),$$

где при $s = 0$ по соглашению в аргументе ord стоит $\{\psi, H_{r+l}\}$.

Действительно, поскольку $\operatorname{ord} 0 = +\infty$, достаточно рассмотреть случай

$$\{\psi^1, \{\psi^2, \ldots \{\psi^s, \{\psi, H_{r+l}\}\}\}\} \not\equiv 0.$$

При этом $l \geq m-k+2$, так как $\psi \in J_{m-k+1}$, и $\{\psi, H_{r+l}\} = 0$ для $l = \overline{0, m-k+1}$. Отсюда

$$\begin{gathered}\operatorname{ord}\{\psi^1, \{\psi^2, \ldots \{\psi^s, \{\psi, H_{r+l}\}\}\}\} = \sum_{\nu=1}^{s} \operatorname{ord}\psi^\nu + \operatorname{ord}\psi - 2s - 2 + r + l \geq \\ \geq 3s + k - 2s - 2 + r + m - k + 2 = r + m + s.\end{gathered}$$

Из полученной оценки вытекает, что все скобки Пуассона в формуле (11) имеют порядки не меньшие чем $r+m$, поэтому $H_r, \ldots, H_{r+m-1}$ инвариантны относительно рассматриваемого преобразования. Кроме того, скобки Пуассона кратностей выше первой имеют порядки строго большие чем $r+m$, что и доказывает формулу (15). $\square$

Теорема 1 *Пусть* $H, H' \in \Phi$, $\operatorname{ord} H, \operatorname{ord} H' = r$ *и* $H_k = H'_k$ $(k = \overline{r, r+m-1}\,)$, *и пусть существуют* $f_k \in J_{m-k+1}^k$ $(k = \overline{3, m+1}\,)$ *такие, что для всякого резонансного многочлена* $P \in \mathfrak{J}^{r+m}$ *выполняется равенство*

$$\langle\langle P, H'_{r+m}\rangle\rangle = \langle\langle P, H_{r+m}\rangle\rangle + \langle\langle P, \sum_{k=3}^{m+1} \{f_k, H_{r+m-k+2}\}\rangle\rangle. \tag{16}$$

Тогда H *и* H' *эквивалентны в порядке* $r+m$.

Доказательство Пусть $m = 1$ и $\langle\langle P, H_{r+1} - H'_{r+1}\rangle\rangle = 0$ для всех $P \in \mathfrak{J}^{r+1}$.

Найдем преобразование Ли, сохраняющее H_r и переводящее H_{r+1} в H'_{r+1}.

Подпространство $\mathfrak{J}^{r+1} \subset \mathfrak{P}^{r+1}$ есть ортогональное дополнение образа линейного оператора $\widehat{H}_r$ из $\mathfrak{P}^3$ в $\mathfrak{P}^{r+1}$. Поскольку $\mathfrak{P}^{r+1}$ конечномерно, $Im(\widehat{H}_r|_{\mathfrak{P}^3}) = (Im(\widehat{H}_r|_{\mathfrak{P}^3}))^{\perp\perp} = (\mathfrak{J}^{r+1})^{\perp}$. Поэтому существует полином $\varphi \in \mathfrak{P}^3$ такой, что $\{H_r, \varphi\} = H_{r+1} - H'_{r+1}$. Отсюда и из формулы (15) получаем, что искомое преобразование имеет вид $exp(\widehat{\varphi})$.

При $m \geq 2$ доказательство аналогично. $\square$

Часть II

Гамильтоновы нормальные формы

3 Гамильтонова метанормальная форма

Определение 8 *Элемент $h^{(p,q)}x^p y^q$ в возмущении гамильтониана (12_r) назовем нерезонансным, если для каждого $P \in \mathfrak{J}$ выполнено $\langle\langle P, x^p y^q\rangle\rangle = 0$. В противном случае будем называть элемент $h^{(p,q)}x^p y^q$ резонансным.*

Тем самым, возмущение $H - H_r$ однозначно разбивается на две части: резонансную и нерезонансную, в них входят резонансные и нерезонансные слагаемые соответственно.

Определение 9 *Ряд H вида (12_r) или порожденную им систему уравнений Гамильтона (3) будем называть гамильтоновой метанормальной формой (ГМНФ), если возмущение $H - H_r$ содержит только резонансные элементы.*

Теорема 2 *Существует формальное каноническое преобразование, приводящее гамильтониан (12_r) к гамильтоновой метанормальной форме.*

Доказательство будет проведено индукцией по m.

Обозначим резонансную часть H_{r+1} через H'_{r+1}.

Из определения 8 следует, что $\langle\langle P, H_{r+1} - H'_{r+1}\rangle\rangle = 0$ для всякого $P \in \mathfrak{J}^{r+1}$.

Последнее равенство совпадает с формулой (16) для $m = 1$. Поэтому по теореме 1 гамильтониан H эквивалентен своей ГМНФ в порядке $r + 1$.

Предположим, что H эквивалентен своей ГМНФ в порядке $r + m - 1$. Без потери общности можем считать, что H совпадает со своей ГМНФ в порядках $r+k$ $(k = \overline{1, m-1}\,)$.

Обозначим резонансную часть H_{r+m} через H'_{r+m}.

Из определения 7 следует, что $\langle\langle P, H_{r+m} - H'_{r+m}\rangle\rangle = 0$ для всякого $P \in \mathfrak{J}^{r+m}$.

Последнее равенство есть частный случай формулы (16) с $f_3, \ldots, f_{m+1} = 0$.

Поэтому из теоремы 1 вытекает эквивалентность H своей ГМНФ в порядке $r + m$.

При этом по лемме 1 соответствующее преобразование имеет вид (9) с $\operatorname{ord} f \geq m + 2$.

Уничтожая последовательно нерезонансные члены степени $r+1, r+2, \ldots$, мы строим последовательность преобразований Ли $exp(\widehat{f^m}\,)$ с $f^m \in \Phi$ и $\operatorname{ord} f^m \geq m + 2$.

Произведение этих преобразований сходится в Φ, т. е. члены любой фиксированной степени, начиная с некоторого шага, не меняются. Поэтому из утверждений 4 и 5 вытекает, что предельное преобразование $\ldots exp(\widehat{f^m}\,) \ldots exp(\widehat{f^2}\,) exp(\widehat{f^1}\,)$ является формальным каноническим преобразованием. $\square$

Замечание 1 ГМНФ — это некая промежуточная нормальная форма (мета- от греч. $\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}$ — между, через). Как будет показано ниже, при помощи формальных канонических преобразований помимо нерезонансных элементов в возмущении гамильтониана (12_r) можно уничтожить и часть резонансных элементов.

Замечание 2 Достоинством введенной в рассмотрение ГМНФ является то, что невозмущенная часть гамильтониана H_r имеет произвольную степень $r \geq 2$. В следующих двух разделах будут приведены два других определения гамильтоновых нормальных форм (ГНФ): ГНФ Брюно и ГНФ Мейера, в которых степень невозмущенного гамильтониана предполагается равной двум.

4 Гамильтонова НФ Брюно, связь с ГМНФ

В работе [5] доказано, что при помощи комплексных линейных канонических преобразований квадратичная часть гамильтониана (12_2) может быть приведена к виду

$$H_2 = (1/2)\, z^T G z,$$

где $z = (x, y)$, а $G = \begin{pmatrix} 0 & C^T \\ C & D \end{pmatrix}$ — блочная матрица, в которой $C = \{C^{(1)}, \ldots, C^{(s)}\}$ — жорданова матрица порядка n с жордановыми клетками $C^{(k)}$ порядка $l^{(k)}$ $(k = \overline{1, s})$, а $D = \{D^{(1)}, \ldots, D^{(s)}\}$ — блочно-диагональная матрица с клетками $D^{(k)} = \sigma^{(k)}\Delta^{(k)}$ порядка $l^{(k)}$. Здесь $\Delta^{(k)} = \operatorname{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}$ и $\sigma^{(k)} = 0$, если соответствующее блоку $C^{(k)}$ собственное число $\lambda^{(k)} \neq 0$. Или в иной записи

$$H_2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j x_j y_{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j y_j^2, \tag{17}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы C, и

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_j \neq \lambda_{j+1}; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \lambda_j = \lambda_{j+1}, \end{cases} \quad \sigma_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_j \neq 0 \text{ или } \varepsilon_{j-1} \neq 0; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \lambda_j = 0 \text{ и } \varepsilon_{j-1} = 0 \end{cases} \quad (\varepsilon_0 = 0). \tag{18}$$

Определение 10 *Гамильтониан* (12_2) *или порожденную им систему уравнений Гамильтона* (3) *будем называть гамильтоновой нормальной формой Брюно* (ГНФБ), *если невозмущенный гамильтониан* H_2 *имеет вид* (17), *а в возмущении* $H - H_2$ *коэффициенты* $h^{(p,q)} = 0$, *если* $\langle p - q, \lambda\rangle \neq 0$, *где* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *а* $\langle \xi, \eta\rangle = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$.

В работе [5] также доказано, что любой гамильтониан может быть приведен к ГНФБ при помощи комплексных формальных канонических преобразований.

Теорема 3 ГМНФ *с невозмущенным гамильтонианом* (17) *является* ГНФБ.

Доказательство Из (13) и (17) получаем, что оператор $\widehat{H}_2^*$ имеет вид

$$\widehat{H}_2^* = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_{j+1}} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j x_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Рассмотрим действие $\widehat{H}_2^*$ на $x^p y^q$.

$$\widehat{H}_2^* x^p y^q = \langle q - p, \overline{\lambda}\rangle x^p y^q + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j (q_{j+1} x^p y^{q+e_j-e_{j+1}} - p_j x^{p-e_j+e_{j+1}} y^q) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j q_j x^{p+e_j} y^{q-e_j}. \tag{19}$$

Как следует из равенств (18) и (19), оператор $\widehat{H}_2^*$ сохраняет степень $|p+q|$ и величину $\langle q-p, \overline{\lambda}\rangle$, т. е. оператор $\widehat{H}_2^*$ действует на подпространстве

$$\mathfrak{P}_a^k = Lin\{x^p y^q : |p+q| = k, \langle q-p, \overline{\lambda}\rangle = a\} \subset \mathfrak{P}^k.$$

Введем на множестве мультииндексов $\mathfrak{A} = \{(p,q) : |p+q| = k\}$ следующий порядок: $(p',q') \prec (p'',q'')$, если $|p'| < |p''|$, или $|p'| = |p''|$, и p'' предшествует p' в лексикографическом порядке, или $p' = p''$, и q' предшествует q'' в лексикографическом порядке.

Выберем в $\mathfrak{P}_a^k$ базис из элементов вида $x^p y^q$, расположенных по возрастанию показателей в смысле введенного порядка.

В формуле (19) q предшествует $q + e_j - e_{j+1}$ в лексикографическом порядке, поэтому $(p,q) \prec (p, q+e_j-e_{j+1})$, $p - e_j + e_{j+1}$ предшествует p в лексикографическом порядке, поэтому $(p,q) \prec (p-e_j+e_{j+1}, q)$, а $|p| < |p+e_j|$, поэтому $(p,q) \prec (p+e_j, q-e_j)$.

Таким образом, $\widehat{H}_2^*$ переводит каждый элемент рассматриваемого базиса в подпространство пространства $\mathfrak{P}_a^k$, натянутое на элементы базиса с неменьшими в смысле введенного порядка индексами. Следовательно, в данном базисе оператор $\widehat{H}_2^*$ представляется верхнетреугольной матрицей с числами a на главной диагонали.

Для существования решения резонансного уравнения в подпространстве $\mathfrak{P}_a^k$ необходимо и достаточно равенство нулю детерминанта этой матрицы, что равносильно условию $a = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно равенству $\langle p-q, \lambda\rangle = 0$. Отсюда согласно определению 8 резонансными могут быть только элементы $h^{(p,q)} x^p y^q$ с $\langle p-q, \lambda\rangle = 0$. $\square$

Покажем теперь, что ГМНФ может иметь более простой вид, нежели чем ГНФБ.

Рассмотрим любой гамильтониан (12_2) и квадратичной невозмущенной частью

$$H_2 = x_1 y_2 + y_1^2/2 \quad (n=2). \tag{20}$$

По определению он является ГНФБ, так как в нем $\lambda_1, \lambda_2 = 0$.

Утверждение 6 ГМНФ *гамильтониана* (12_2) *с* H_2 *из* (20) *имеет вид*

$$H = H_2 + \sum_{\substack{p_2 \geq q_1 + 2q_2 \\ (p_1, q_1) \neq (1,0)}} h^{(p,q)} x^p y^q. \tag{21}$$

Доказательство Резонансное уравнение в этом случае принимает вид

$$\widehat{H}_2^* P = y_1 \frac{\partial P}{\partial y_2} - x_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} - x_2 \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad P \in \mathfrak{P}.$$

Последнее уравнение имеет три независимых решения: $P_1 = x_2$, $P_2 = x_2 y_1 - x_1^2/2$, $P_3 = x_2^2 y_2 + x_1 x_2 y_1 - x_1^3/3$, т. е. всякий резонансный многочлен $P \in \mathfrak{P}$ является полиномом от P_1, P_2, P_3. Поэтому каждый резонансный элемент $H - H_2$ есть произведение целых неотрицательных степеней слагаемых из P_1, P_2, P_3, а значит, с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$x_2^{i_1} (x_2 y_1)^{i_2} x_1^{2i_3} (x_2^2 y_2)^{i_4} (x_1 x_2 y_1)^{i_5} x_1^{3i_6} = x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2},$$

где $p_1 = 2i_3 + i_5 + 3i_6$, $p_2 = i_1 + i_2 + 2i_4 + i_5$, $q_1 = i_2 + i_5$, $q_2 = i_4$.

Эти показатели удовлетворяют условию $p_2 \geq q_1 + 2q_2$. Кроме того, $q_1 \neq 0$ при $p_1 = 1$. В результате получаем ГМНФ (21). $\square$

5 Гамильтонова НФ Мейера, связь с ГМНФ

Рассмотрим вещественный гамильтониан (12_2), невозмущенная часть которого записана в виде

$$H_2 = (1/2)\, z^T G z \quad (G \text{ — симметрическая матрица}), \tag{22}$$

Рассмотрим также линейную гамильтонову систему с гамильтонианом H_2 из (22):

$$\dot{z} = Az, \quad A = IG \quad (I \ \text{ из } (5)). \tag{23}$$

В работе [10] доказано, что если матрица A — симметрическая, то гамильтониан (12_2) с невозмущенной частью (22) при помощи вещественного почти тождественного формального канонического преобразования $z = w + W(w)$ с $\operatorname{ord} W \geq 2$ может быть приведен к гамильтониану H' такому, что

$$H_2' = H_2; \quad \forall k \geq 3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^{2n}:\ H_k'(e^{At}z) \equiv H_k'(z).$$

Позже в [11] этот результат был обобщен на случай произвольной матрицы $A = IG$.

Определение 11 *Вещественный гамильтониан* (12_2) *с невозмущенной частью* (22) *или порожденную им гамильтонову систему* (3) *будем называть гамильтоновой нормальной формой Мейера* (ГНФМ), *если*

$$\forall k \geq 3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^{2n}:\ H_k(e^{A^T t}z) \equiv H_k(z) \quad (A = IG). \tag{24}$$

Согласно [11, Theorem 10.4.2], произвольный вещественный гамильтониан (12_2) может быть приведен к ГНФМ при помощи вещественного почти тождественного формального канонического преобразования $z = w + W(w)$ с $\operatorname{ord} W \geq 2$.

Теорема 4 ГНФМ *является* ГМНФ *с возмущением из резонансных многочленов.*

Доказательство Пусть гамильтониан (12_2) с невозмущенной частью (22) — это ГНФМ.

Сопряженная к (23) линейная система имеет вид

$$\dot{z} = A^T z \tag{25}$$

и также является гамильтоновой с гамильтонианом $H_2^T(z) = (1/2)\, z^T G' z$, где $G' = IGI$.

Равенство (24) означает, что однородные слагаемые возмущения ГНФМ являются интегралами линейной системы (25). Поскольку система (25) гамильтонова с гамильтонианом H_2^T, последнее равносильно равенствам

$$\{H_2^T, H_k\} = 0 \quad (k \geq 3). \tag{26}$$

Согласно [11, Lemma 10.4.2] оператор $\widehat{H}_2^T$ является сопряженным к $\widehat{H}_2$ относительно скалярного произведения $\langle\langle\, .\,,\, .\,\rangle\rangle$, т. е. $\widehat{H}_2^T = \widehat{H}_2^*$. Теперь из (26) следует, что однородные слагаемые H_k ($k \geq 3$) возмущения в ГНФМ — это решения резонансного уравнения для H_2. Значит, по определению 9 и по свойству 1 скалярного произведения рассматриваемая ГНФМ является ГМНФ, а ее возмущение $H - H_2$ состоит из резонансных многочленов. $\square$

В ГНФМ коэффициенты при резонансных элементах определяются решениями резонансного уравнения, в ГМНФ же на коэффициенты при резонансных элементах не налагается никаких дополнительных требований.

Например, возмущение ГНФМ гамильтониана (12_2) с H_2 из (20) в отличие от (21) представляет собой ряд от резонансных многочленов P_1, P_2, P_3 из утверждения 6.

6 Гамильтонова нормальная форма

6.1 НФ гамильтониана с однородной невозмущенной частью

Пусть $\{P_i\}_{i=1}^k$ — базис подпространства $\mathfrak{J}^{r+m}$ $(m \geq 1)$ однородных решений резонансного уравнения (14) пространства $\mathfrak{J}$.

Определение 12 *Множество мономов* $\mathfrak{R}^m = \{R_i = x^{p^i} y^{q^i} : \ |p^i + q^i| = r + m\}_{i=1}^k$, *где* p^i, q^i *— мультииндексы, назовем минимальным резонансным набором в порядке* $r+m$, *если определитель матрицы скалярных произведений* $A = \{a_{ij} = \langle\langle P_i, R_j\rangle\rangle\}_{i,j=1}^k$ *отличен от нуля. Множество* $\mathfrak{R} = \cup_{m\geq 1}\mathfrak{R}^m$ *назовем минимальным резонансным набором.*

Определение 13 *Гамильтониан* (12_r) *или порожденную им систему уравнений Гамильтона* (3) *будем называть гамильтоновой нормальной формой* (ГНФ), *если в возмущении* $H - H_r$ *содержатся лишь резонансные члены из некоторого минимального резонансного набора* $\mathfrak{R}$, *т. е.* $h^{(p,q)} = 0$, *если* $x^p y^q \notin \mathfrak{R}$.

Замечание 3 В случае $r = 2$ и невозмущенного гамильтониана вида (17) с $\lambda \neq 0$ ГНФ по аналогии с негамильтоновыми нормальными формами можно называть резонансной (РГНФ), а в случае $r \geq 3$ или $r = 2$ и невозмущенного гамильтониана вида (17) с $\lambda = 0$ — обобщенной ГНФ (ОГНФ).

Теорема 5 *Пусть* $\mathfrak{R} = \cup_{m\geq 1}\mathfrak{R}^m$ *— минимальный резонансный набор. Тогда существует формальное каноническое преобразование, приводящее гамильтониан* (12_r) *к* ГНФ, *в которой* $h^{(p,q)} = 0$, *если* $x^p y^q \notin \mathfrak{R}$.

Доказательство Обозначим $c = \{c_i = \langle\langle H_{r+m}, P_i\rangle\rangle\}_{i=1}^{k_m}$, $H'_{r+m} = \sum_{i=1}^{k_m} b_i R_i^m$, где $R_i^m \in \mathfrak{R}^m$, $b = A^{-1}c$, а A — матрица из определения 12.

Тогда $\langle\langle H'_{r+m} - H_{r+m}, P_i\rangle\rangle = \sum_{j=1}^{k_m} a_{ij} b_j - c_i = 0$ для всех $i = \overline{1, k_m}$.

Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2. □

Приведем пример ГНФ, имеющей более простой вид, чем ГМНФ.

Утверждение 7 *Гамильтониан* (12_2) *с невозмущенной частью* (20) *при помощи формального канонического преобразования можно привести к* ГНФ

$$H = H_2 + \sum_{p_1=0,\ p_2\geq q_1+2q_2} h^{(p,q)} x^p y^q. \tag{27}$$

Доказательство Действительно, при доказательстве утверждения 6 было показано, что многочлены $P_1^{i_1} P_2^{i_2} P_3^{i_3}$, где $P_1 = x_2$, $P_2 = x_2 y_1 - x_1^2/2$, $P_3 = x_2^2 y_2 + x_1 x_2 y_1 - x_1^3/3$, образуют базис в пространстве $\mathfrak{J}$. В качестве минимального резонансного набора можно выбрать множество мономов

$$x_2^{i_1}(x_2 y_1)^{i_2}(x_2^2 y_2)^{i_3} = x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2},$$

где $p_1 = 0$, $p_2 = i_1 + i_2 + 2i_3$, $q_1 = i_2$, $q_2 = i_3$, так как каждый такой моном имеет отличное от нуля скалярное произведение с единственным базисным элементом $P_1^{i_1} P_2^{i_2} P_3^{i_3}$. Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 5. □

Замечание 4 В отличие от ГМНФ (21) также как и от ГНФМ, возмущение которой зависит от резонансных многочленов P_1, P_2, P_3, возмущение ГНФ (27) не зависит от x_1.

6.2 НФ гамильтониана с квазиоднородной невозмущенной частью

До сих пор в качестве невозмущенной части любого гамильтониана выбирался однородный многочлен H_r степени $r \geq 2$. Однако, чем меньше он содержит переменных, или, что то же самое, чем больше компонент в невозмущенной части гамильтоновой системы тождественно равны нулю, тем меньше имеется возможностей для аннулирования членов в каждом порядке возмущения.

Этот факт хорошо известен и проиллюстрирован в теории обобщенных (негамильтоновых) нормальных форм и будет подтвержден ниже в разделе 7.4.

Идеальной выглядит ситуация, когда при помощи линейной канонической замены многочлен H_r максимально упрощен, но при этом зависит от всех переменных. Такой невозмущенный гамильтониан естественно называть невырожденным.

Для получения невырожденного гамильтониана можно использовать прием, широко применяемый в теории обобщенных нормальных форм. А именно, можно искусственно дополнить H_r некоторыми слагаемыми из возмущения гамильтониана (12_r), а часть слагаемых из H_r отнести к возмущению, но только так, чтобы после введения новых, обобщенных, степеней, новый невозмущенный гамильтониан стал бы в известном смысле однородным и имел бы меньшую, чем новое возмущение обобщенную степень.

Приведем несколько общих определений из [1, 4] с соответствующими поправками, связанными с гамильтоновостью рассматриваемых систем.

Определение 14 *Вектор $\gamma = (\alpha, \beta)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, назовем весом переменной $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, если все компоненты γ — натуральные взаимно простые в совокупности такие, что $\alpha_i + \beta_i = \delta$ $(\delta \geq 2,\ i = \overline{1, n})$.*

Определение 15 *Обобщенной степенью монома $Z^{(p,q)} x^p y^q$, назовем скалярное произведение $\langle p, \alpha \rangle + \langle q, \beta \rangle$.*

Определение 16 *Многочлен $Q(z)$ будем называть квазиоднородным многочленом* (КОМ) *степени χ с весом γ и обозначать $Q_\gamma^{[\chi]}(z)$, если он содержит только мономы обобщенной степени χ.*

Все определения предыдущих пунктов переносятся на случай квазиоднородного невозмущенного гамильтониана следующим образом: вместо обычных степеней следует рассматривать обобщенные с весом γ, а вместо разложений в сумму однородных слагаемых рассматривать разложения в сумму квазиоднородных слагаемых. В частности, под порядком ряда f следует понимать наименьшее r такое, что $f_\gamma^{[r]} \not\equiv 0$.

Скобка Пуассона двух КОМ обобщенных степеней k, l также является КОМ обобщенной степени $k + l - \delta$. Следовательно, для каждого ряда f порядка не меньше, чем $\delta + 1$ на пространстве рядов определен оператор $exp(\widehat{f}\,)$, задающий преобразование Ли.

Из приведенных определений и из свойств скалярного произведения $\langle\langle\,.\,,\,.\,\rangle\rangle$ вытекает, что пространство $\mathfrak{P}$ разбивается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{P}_\gamma^{[k]}$ КОМ обобщенной степени k с весом γ.

Резонансное уравнение для квазиоднородного невозмущенного гамильтониана $H_\gamma^{[\chi]}$ принимает вид

$$\left(\widehat{H}_\gamma^{[\chi]}\right)^* P = 0, \quad P \in \mathfrak{P},$$

а пространство его решений $\mathfrak{J}$ раскладывается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{J}_\gamma^{[k]}$ квазиоднородных решений обобщенной степени k с весом γ.

Везде вместо пространств $\mathfrak{P}^k$ и $\mathfrak{J}^k$ следует рассматривать пространства $\mathfrak{P}_\gamma^{[k]}$ и $\mathfrak{J}_\gamma^{[k]}$.

В определениях ГМНФ и ГНФ следует заменить H_r на $H_\gamma^{[\chi]}$, а в определении минимального резонансного набора $\mathfrak{R}^m$ следует заменить на $\mathfrak{R}_\gamma^{[m]} = \{R_i = x^{p^i}y^{q^i} : \ \langle\alpha, p^i\rangle + \langle\beta, q^i\rangle = r+m\}_{i=1}^k$.

Гамильтониан (12_r), переразложенный по обобщенным степеням, будем обозначать через H_γ, а вместо ГНФ и ГМНФ будем писать ГНФ$_\gamma$ и ГМНФ$_\gamma$.

С учетом вышеизложенного теоремы 2 и 5 также переносятся на случай квазиоднородного невозмущенного гамильтониана.

7 ГНФ некоторых систем с одной степенью свободы

Будем рассматривать случай $n = 1$ и $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. По-прежнему, H_r — невозмущенная часть гамильтониана (12_r) : $H(x,y) = H_r(x,y) + \sum_{|p+q|\geq r+1} h^{(p,q)}x^py^q \quad (r \geq 2)$.

Для краткости в формулах для ГНФ и ГМНФ, приведенных далее, будем считать, что слагаемые возмущения имеют степень, большую степени невозмущенного гамильтониана, опуская при этом соответствующие неравенства в пределах суммирования.

7.1 Невозмущенный гамильтониан — моном от одной переменной

Пусть H_r не зависит от одной из переменных, скажем, от x.

Теорема 6 ГНФ *с вырожденным невозмущенным гамильтонианом* $H_r = hy^r$ $(h \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ *совпадает с* ГМНФ *и имеет вид*

$$H = hy^r + \sum_{q\leq r-2} h^{(p,q)}x^py^q. \tag{28}$$

Доказательство Действительно, согласно (13) $\widehat{H}_r^* = -x(\partial H_r/\partial y)^* = -hrx\partial^{r-1}/\partial y^{r-1}$ и уравнение (14) эквивалентно $\partial^{r-1}P/\partial y^{r-1} = 0$. Его решения — полиномы степени не выше $r-2$ по y. Отсюда по определению 9 получаем ГМНФ (28).

Одночлены $\{P_i = x^{p_i}y^{q_i} | \ p_i = r+m+1-i, \ q_i = i-1\}_{i=1}^{r-1}$ составляют базис пространства полиномиальных решений (14) степени $r+m$, и согласно определению 11 они же образуют минимальный резонансный набор в порядке $r+m$. Поэтому полученная ГМНФ по определению 13 является ГНФ. □

Гамильтониан (28) можно записать стандартно в виде суммы однородных слагаемых:

$$H = hy^r + \sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{r-2} h^{(k-q,q)}x^{k-q}y^q.$$

Рассмотрим два важных частных случая ГНФ (28), а именно, $r=2$ и $r=3$.

1) При $r = 2$ возмущение в (28), очевидно, не зависит от y, а сама ГНФ (28) совпадает с соответствующей ГНФМ (см. [11, с. 263]) и имеет вид

$$H = hy^2 + \sum_{k=3}^{\infty} h^{(k,0)} x^k. \tag{28_2}$$

2) Пусть теперь $r = 3$ и $h = 1/3$. Тогда ГНФ (28) имеет вид

$$H = y^3/3 + \sum_{k=4}^{\infty} (h^{(k,0)} x^k + h^{(k-1,1)} x^{k-1} y). \tag{28_3}$$

Гамильтонова система, порожденная ГНФ (28_3), имеет вид

$$\dot{x} = y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} h^{(k,1)} x^k, \quad \dot{y} = -\sum_{k=3}^{\infty} ((k+1) h^{(k+1,0)} x^k + k h^{(k,1)} x^{k-1} y). \tag{$28_3^{\mathtt{s}}$}$$

Согласно [3, Т. 11], произвольная (негамильтонова) двумерная система дифференциальных уравнений с невозмущенной частью $(y^2, 0)$ формально эквивалентна одной из двух возможных обобщенных нормальных форм (ОНФ):

$$\dot{x} = y^2 + \sum_{p=2}^{\infty} (X^{(p+1,0)} x^{p+1} + X^{(p,1)} x^p y), \quad \dot{y} = \sum_{p=2}^{\infty} (Y^{(p,1)} x^p y + Y^{(p+1,0)} x^{p+1}); \tag{$28_{3.1}^{\mathtt{onf}}$}$$

$$\dot{x} = y^2 + \sum_{p=2}^{\infty} X^{(p+1,0)} x^{p+1}, \quad \dot{y} = \sum_{p=2}^{\infty} (Y^{(p-1,2)} x^{p-1} y^2 + Y^{(p,1)} x^p y + Y^{(p+1,0)} x^{p+1}). \tag{$28_{3.2}^{\mathtt{onf}}$}$$

Первая компонента возмущения в ($28_3^{\mathtt{s}}$) совпадает с первой компонентой возмущения в ОНФ ($28_{3.2}^{\mathtt{onf}}$), а вторая — со второй компонентой возмущения из ($28_{3.1}^{\mathtt{onf}}$).

Таким образом, приходим к выводу, что за счет условия гамильтоновости исходной системы с невозмущенной частью $(y^2, 0)$ становится возможным прийти к ОНФ с меньшим числом отличных от нуля резонансных слагаемых в каждом порядке возмущения.

Отметим тот факт, что при определении ГНФ мы рассматриваем эквивалентность относительно группы формальных канонических преобразований, в то время как в определении ОНФ (см. [1]) рассматривается эквивалентность относительно более широкой группы обратимых формальных преобразований.

7.2 Невозмущенный гамильтониан — моном от двух переменных

Теорема 7 ГНФ *с невырожденным невозмущенным гамильтонианом* $H_r = hx^m y^l$ *с* $m + l = r$, $d = \text{НОД}\,(m, l)$ $(m, l \geq 1,\ h \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ *совпадает с* ГМНФ *и имеет вид*

$$H = hx^m y^l + \sum_{p \leq m-2} h^{(p,q)} x^p y^q + \sum_{\substack{p \geq m-1 \\ q \leq l-2}} h^{(p,q)} x^p y^q + \sum_{j=d}^{\infty} h^{(jm/d-1, jl/d-1)} x^{jm/d-1} y^{jl/d-1}. \tag{29}$$

Доказательство Согласно (13) $\widehat{H}_r^* = (\partial H_r/\partial x)^* y - (\partial H_r/\partial y)^* x = hm\partial_x^{m-1}\partial_y^l y - hl\partial_x^m\partial_y^{l-1}x$, поэтому уравнение (14) эквивалентно уравнению

$$\partial_x^{m-1}\partial_y^{l-1}(m\partial_y yP - l\partial_x xP) = 0 \quad (\partial_x = \partial/\partial x,\ \partial_y = \partial/\partial y).$$

Ищем решения этого уравнения в виде $P = x^p y^q$. Имеем:

$$\partial_x^{m-1}\partial_y^{l-1}(m(q+1) - l(p+1))x^p y^q = 0.$$

Полученное равенство выполняется в одном из трех взаимоисключающих случаев:

1) $p \le m-2$; 2) $p \ge m-1$, $q \le l-2$; 3) $p = jm/d - 1$, $q = jl/d - 1$, где $j \ge d$.

Решения с указанными показателями образуют базис в пространстве $\mathfrak{J}$, а значит, по определению 9 гамильтониан (29) является ГМНФ.

Как и в предыдущем примере, минимальный резонансный набор в каждом порядке определяется единственным образом и состоит из найденных мономиальных решений. Поэтому полученная ГМНФ является ГНФ. $\square$

Перепишем гамильтониан (29) в виде суммы однородных слагаемых:

$$H = hx^m y^l + \sum_{k=r+1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{m-2} h^{(p,k-p)}x^p y^{k-p} + x^{m-1}\sum_{q=0}^{l-2} h^{(k+m-1-q,q)}x^{k-q}y^q + \eta_k(x,y)\right),$$

где $\eta_{k-2}(x,y) = \begin{cases} h^{(km/r-1,kl/r-1)}x^{km/r-1}y^{kl/r-1}, & \text{если } k \,\vdots\, (r/d); \\ 0, & \text{если } k \not\vdots\, (r/d). \end{cases}$

Рассмотрим два важных частных случая.

1) Пусть $r = 2$. Тогда в ГНФ (29) индексы l, $m = 1$, поэтому $H_2 = hxy$, первые две суммы в правой части исчезают, а третья сумма состоит из степеней произведения xy. Следовательно, ГНФ (29) имеет вид

$$H = hxy + \sum_{j=2}^{\infty} h^{(j,j)}x^j y^j. \tag{29_2}$$

Полученный результат согласуется с [11, Corollary 10.4.1]. В этом случае ГНФ (29_2) совпадает с ГНФМ и ГНФБ.

2) Пусть $r = 3$, $l = 1$, $m = 2$, $h = -1/2$. Тогда $H_3 = -x^2y/2$ и ГНФ (29) имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}x^2 y + \sum_{k=4}^{\infty} h^{(0,k)}y^k + \sum_{j=1}^{\infty} h^{(2j+1,j)}x^{2j+1}y^j, \tag{29_3}$$

а нормальная форма гамильтоновой системы, порожденная ГНФ (29_3), имеет вид

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2 + \sum_{k=3}^{\infty}(k+1)h^{(0,k+1)}y^k + \sum_{j=1}^{\infty} jh^{(2j+1,j)}x^{2j+1}y^{j-1},\ \dot{y} = xy - \sum_{j=1}^{\infty}(2j+1)h^{(2j+1,j)}x^{2j}y^j. \tag{$29_3^{\mathfrak{s}}$}$$

Интересно сравнить систему ($29_3^{\mathfrak{s}}$) с ОНФ системы, имеющей ту же гамильтонову невозмущенную часть и произвольное (не обязательно гамильтоново) возмущение.

Дело в том, что невозмущенная часть системы ($29_3^{\mathfrak{s}}$) — векторный многочлен $(-x^2/2, xy)$ является одной из девятнадцати линейно неэквивалентных канонических форм, к которым линейной неособой заменой сводится невозмущенная часть двумерной системы, представленная произвольным невырожденным векторным квадратичным многочленом (см. [2, разд. 5.2], [3, § 2]). А именно, согласно введенной в [3] классификации $(-x^2/2, xy) = \text{КФ}_1^1$ с $u = -1/2$. В [2, § 5] в явном виде указаны все ОНФ, формально эквивалентные произвольной системе с невозмущенной частью $(\alpha x^2, xy)$.

7.3 Невозмущенный гамильтониан — неприводимый двучлен со взаимно-простыми показателями

Рассмотрим неприводимый двучлен $(h_1/\beta)x^\beta - (h_2/\alpha)y^\alpha$, в котором $h_1h_2 \neq 0$ и НОД$(\alpha, \beta) = 1$. По определению 16 — это КОМ обобщенной степени $\alpha\beta$ с весом (α, β).

Рассмотрим гамильтониан H_γ с квазиоднородной невозмущенной частью

$$H_\gamma^{[\chi]} = (h_1/\beta)x^\beta - (h_2/\alpha)y^\alpha, \qquad (30)$$

где НОД$(\alpha, \beta) = 1$, $h_1h_2 \neq 0$, $\chi = \alpha\beta$ с весом $\gamma = (\alpha, \beta)$.

Квазиоднородный невозмущенный гамильтониан (30) является невырожденным. Можно считать, что он получен из невозмущенного гамильтониана $H_r = hy^r$ (если $\alpha < \beta$) добавлением слагаемого возмущения гамильтониана (28), содержащего x.

Резонансное уравнение для квазиоднородного невозмущенного гамильтониана $H_{(\alpha,\beta)}^{[\chi]}$ имеет вид

$$h_1 y\partial_x^{\beta-1}P + h_2 x\partial_y^{\alpha-1}P = 0, \quad P \in \mathfrak{P}. \qquad (31)$$

В обозначениях, принятых в пункте 6.2, $\mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}^{[k]}$ — это пространство квазиоднородных решений уравнения (31) обобщенной степени k с весом (α, β).

Лемма 2 *$x^py^q \in \mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}^{[k]}$ тогда и только тогда, когда $k = \alpha p + \beta q$, $p \le \beta - 2$ и $q \le \alpha - 2$.*

Доказательство Проверяется непосредственной подстановкой x^py^q в (31). □

Лемма 3 *Пусть $x^py^q \in \mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}^{[k]}$, а $x^{p'}y^{q'} \in \mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}^{[k']}$. Тогда либо $(p, q) = (p', q')$, либо $k \not\equiv k' \mod \chi$.*

Доказательство Пусть $\alpha p + \beta q \equiv \alpha p' + \beta q' \mod \chi$. Тогда $\alpha p \equiv \alpha p' \mod \beta$ и $\beta q \equiv \beta q' \mod \alpha$. Поскольку α и β взаимно просты, последние равенства эквивалентны следующим

$$p \equiv p' \mod \beta, \quad q \equiv q' \mod \alpha. \qquad (32)$$

Пусть теперь $x^py^q \in \mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}^{[k]}$, $x^{p'}y^{q'} \in \mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}^{[k']}$ и $k \equiv k' \mod \chi$. По лемме 2 $p, p' \le \beta - 2$, $q, q' \le \alpha - 2$. Отсюда и из (32) следует, что $(p, q) = (p', q')$. □

Лемма 4 *Пусть* $P \in \mathfrak{I}^{[k]}_{(\alpha,\beta)}$ *и* $P \not\equiv 0$. *Тогда существует единственное* $Q \in \mathfrak{I}^{[k+\chi]}_{(\alpha,\beta)}$ *такое, что*

$$xP = h_1 \partial_x^{\beta-1} Q, \quad yP = -h_2 \partial_y^{\alpha-1} Q. \tag{33}$$

Более того, если $\mathfrak{I}^{[k]}_{(\alpha,\beta)} \neq \{0\}$, *то существует такое* $k' \geq 0$, *что* $k \equiv k' \mod \chi$ *и пространство* $\mathfrak{I}^{[k']}_{(\alpha,\beta)}$ *содержит мономиальное решение уравнения* (31). *При этом имеет место изоморфизм пространств* $\mathfrak{I}^{[k]}_{(\alpha,\beta)}$ *и* $\mathfrak{I}^{[k']}_{(\alpha,\beta)}$.

Доказательство Существование Q. Положим

$$Q = \frac{1}{h_1} \underbrace{\int \cdots \int}_{\beta-1 \text{ раз}} xP dx^{\beta-1} + \sum_{j=0}^{\beta-2} R_j(y) x^j,$$

где R_j — произвольные полиномы. Тогда первое из равенств (33) выполняется тождественно, а после подстановки Q во второе равенство, в силу уравнения (31), получим

$$h_2 \partial_y^{\alpha-1} Q = -y \underbrace{\int \cdots \int}_{\beta-1 \text{ раз}} \partial_x^{\beta-1} P dx^{\beta-1} + \sum_{j=0}^{\beta-2} h_2 x^j \partial_y^{\alpha-1} R_j(y).$$

Для каждой первообразной в первом слагаемом можно выбрать такие полиномы R_j, чтобы выполнялось второе равенство в (33), что доказывает существование полинома Q, удовлетворяющего (33). В свою очередь из (33) и из квазиоднородности P следует, что Q может быть выбран квазиоднородным.

Умножая первое равенство из (33) на y и вычитая второе, умноженное на x, получаем, что Q удовлетворяет уравнению (31).

Единственность Q. Пусть для $Q, Q' \in \mathfrak{I}^{[k+\chi]}_{(\alpha,\beta)}$ выполняются соотношения (33) с одинаковым $P \in \mathfrak{I}^{[k]}_{(\alpha,\beta)}$, $P \not\equiv 0$. Тогда $\partial_x^{\beta-1}(Q - Q') = 0$ и $\partial_y^{\alpha-1}(Q - Q') = 0$. Отсюда по лемме 2 решения Q и Q' могут отличаться только на мономиальные решения резонансного уравнения (31), а из квазиоднородности $Q - Q'$ и леммы 3 следует, что

$$Q - Q' = C x^p y^q, \tag{34}$$

где $k + \chi = \alpha p + \beta q$, $p \leq \beta - 2$ и $q \leq \alpha - 2$.

Обозначим $P_1 = P$. Построим последовательность $P_j \in \mathfrak{I}^{[k-(j-1)\chi]}_{(\alpha,\beta)}$, последовательно применяя соотношения (33):

$$xP_{j+1} = h_1 \partial_x^{\beta-1} P_j, \quad yP_{j+1} = -h_2 \partial_y^{\alpha-1} P_j.$$

В силу резонансного уравнения (31) все P_j определяются однозначно.

Существует такой номер $m \in \{1, \ldots, [k/\chi] + 1\}$, что $P_m \not\equiv 0$, а $P_{m+1} \equiv 0$.

Из соотношений (33) вытекает, что P_m — мономиальное решение обобщенной степени $k - (m-1)\chi < k + \chi$. Поэтому согласно леммы 3 в (34) $C = 0$, что равносильно $Q = Q'$.

Попутно мы нашли для каждого немономиального КОМ $Q \in \mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}$ (немономиальность Q следует из $P \not\equiv 0$ и леммы 2) единственное мономиальное решение P_m, из которого

Q получается m-кратным применением соотношений (33), что задает взаимно-однозначное соответствие между решениями $Q \in \mathfrak{I}^{[k+\chi]}_{(\alpha,\beta)}$ и мономиальными решениями обобщенной степени $k-(m-1)\chi$ уравнения (31). Поскольку соотношения (33) линейны по P и Q, это соответствие является изоморфизмом пространств. □

Теорема 8 ГМНФ *для квазиоднородного невозмущенного гамильтониана* (30) *имеет вид*

$$H = (h_1/\beta)x^\beta - (h_2/\alpha)y^\alpha + \sum_{\substack{p\not\equiv -1 \bmod \beta \\ q \not\equiv -1 \bmod \alpha}} h^{(p,q)}x^p y^q \quad (\alpha p + \beta q \geq \chi + 1), \tag{35}$$

а любая ГНФ *представляется в виде*

$$H = H^{[\chi]}_{(\alpha,\beta)} + \sum_{k=\chi+1}^{\infty} H^{[k]}_{(\alpha,\beta)}, \tag{36}$$

где $H^{[k]}_{(\alpha,\beta)} = h^{(p,q)}x^p y^q$ *с* $k = \alpha p + \beta q \geq \chi + 1$ *и* $p \not\equiv -1 \bmod \beta$, $q \not\equiv -1 \bmod \alpha$.

Доказательство Пусть моном $x^p y^q$ входит в $P \in \mathfrak{I}^{[k]}_{(\alpha,\beta)}$ $(k = \alpha p + \beta q \geq 0)$ с отличным от нуля коэффициентом. Значит, $\langle\langle P, x^p y^q\rangle\rangle \neq 0$.

По лемме 4 существует единственное $Q \in \mathfrak{I}^{[k+\chi]}_{(\alpha,\beta)}$ такое, что выполнены равенства (33). Поэтому

$$\langle\langle xP, x^{p+1}y^q\rangle\rangle \overset{(33)}{=} \langle\langle h_1\partial_x^{\beta-1}Q, x^{p+1}y^q\rangle\rangle \neq 0, \quad \langle\langle yP, x^p y^{q+1}\rangle\rangle \overset{(33)}{=} \langle\langle -h_2\partial_y^{\alpha-1}Q, x^p y^{q+1}\rangle\rangle \neq 0.$$

Пользуясь свойством 2 скалярного произведения $\langle\langle\,.\,,\,.\,\rangle\rangle$, получаем

$$\langle\langle Q, x^{p+\beta}y^q\rangle\rangle \neq 0, \quad \langle\langle Q, x^p y^{q+\alpha}\rangle\rangle \neq 0. \tag{37}$$

Пусть моном $x^{p+\beta}y^q$ входит в немономиальный КОМ $Q \in \mathfrak{I}^{[k+\chi]}_{(\alpha,\beta)}$ с отличным от нуля коэффициентом, т. е. $\langle\langle Q, x^{p+\beta}y^q\rangle\rangle \neq 0$. Тогда по лемме 4 существует $P \in \mathfrak{I}^{[k]}_{(\alpha,\beta)}$, $P \not\equiv 0$, удовлетворяющее (33). Пользуясь соотношениями (33) и свойством 2 скалярного произведения $\langle\langle\,.\,,\,.\,\rangle\rangle$, получаем $\langle\langle h_1\partial_x^{\beta-1}Q, x^{p+1}y^q\rangle\rangle \overset{(33)}{=} \langle\langle xP, x^{p+1}y^q\rangle\rangle \neq 0$, откуда $\langle\langle P, x^p y^q\rangle\rangle \neq 0$. А значит, и $\langle\langle Q, x^p y^{q+\alpha}\rangle\rangle \neq 0$ согласно (37).

Аналогично доказывается, что из $\langle\langle Q, x^p y^{q+\alpha}\rangle\rangle \neq 0$ следует $\langle\langle P, x^p y^q\rangle\rangle \neq 0$ и $\langle\langle Q, x^{p+\beta}y^q\rangle\rangle \neq 0$.

Следовательно, для каждых p и q таких, что $\alpha p + \beta q \geq \chi + 1$, мономы $x^p y^q$, $x^{p+\beta}y^q$, $x^p y^{q+\alpha}$ либо все резонансные, либо все нерезонансные.

Отсюда, с учетом леммы 4, получаем, что резонансные элементы должны иметь вид $x^{p+j\beta}y^{q+k\alpha}$, где $x^p y^q \in \mathfrak{I}_{(\alpha,\beta)}$.

Следовательно, по лемме 2 ГМНФ с невозмущенной частью (30) имеет вид (35).

Из лемм 3 и 4 вытекает, что для каждого $k \geq 0$ справедливо неравенство $\dim \mathfrak{I}^{[k]}_{(\alpha,\beta)} \leq 1$.

Следовательно, всякий минимальный резонансный набор получается выбором одного резонансного элемента в каждой обобщенной степени возмущения ГМНФ (35). Отсюда приходим к ГНФ (36). □

Следствие 1 *Множество* $\mathfrak{R} = \{x^{p+k\beta}y^q | \ p \le \beta - 2, \ q \le \alpha - 2, \ k \ge 0\}$ *представляет собой минимальный резонансный набор для невозмущенного гамильтониана* (30) *согласно определению* 12, *а по определению* 13 *ряд*

$$H = (h_1/\beta)x^\beta - (h_2/\alpha)y^\alpha + \sum_{\substack{p \not\equiv -1 \bmod \beta \\ q \le \alpha - 2}} h^{(p,q)} x^p y^q \tag{38}$$

является ГНФ, соответствующей выбранному минимальному резонансному набору $\mathfrak{R}$.

7.4 Сравнение ГНФ с вырожденным и невырожденным невозмущенными гамильтонианами

Рассмотрим частный случай гамильтонианов из разделов 7.1, 7.3, а именно, гамильтониан

$$H = y^2/2 - x^3/3 + h^{(2,1)}x^2y + h^{(1,2)}xy^2 + h^{(0,3)}y^3 + \sum_{p+q \ge 4} h^{(p,q)}x^p y^q.$$

Однородный невозмущенный гамильтониан имеет вид $H_2 = y^2/2$. Он не зависит от x, и по теореме 6 ГНФ совпадает с ГМНФ и имеет вид

$$H = y^2/2 + \sum\nolimits_{k=3}^{\infty} h^{(k,0)}x^k. \tag{39}$$

С другой стороны, в качестве невозмущенной части гамильтониана H можно выбрать невырожденный КОМ $H^{[6]}_{(2,3)} = y^2/2 - x^3/3$ (см. определение 16).

Тогда по теореме 8 с $\chi = 6$, $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ получаем следующую ГМНФ:

$$H = y^2/2 - x^3/3 + \sum_{\substack{p \not\equiv 2 \mod 3 \\ q \equiv 0 \mod 2}} h^{(p,q)}x^p y^q \qquad (2p + 3q \ge 7).$$

А ГНФ (36), соответствующая выбранному в следствии 1 минимальному резонансному набору $\mathfrak{R}$ с $\chi = 6$, $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, согласно (38) имеет вид

$$H = y^2/2 - x^3/3 + \sum_{j=1}^{\infty}(h^{(3j+1,0)}x^{3j+1} + h^{(3j+3,0)}x^{3j+3}) \tag{40}$$

и порождает гамильтонову систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2 - \sum_{j=1}^{\infty}\left((3j + 1)h^{(3j+1,0)}x^{3j} + (3j + 3)h^{(3j+3,0)}x^{3j+2}\right). \tag{41}$$

Сравнивая выражения (39) и (40), видим, что появление в невозмущенном гамильтониане слагаемого $(-x^3/3)$ вместе с подходящим выбором минимального резонансного набора позволяет усилить гамильтонову нормальную форму.

В работе [4] двумерная система с линейно-квадратичной невозмущенной частью (y, x^2) рассмотрена относительно группы общих (не канонических) формальных преобразований. Согласно [4, §5, т. 4], такая система может быть преобразована в ОНФ с той же невозмущенной частью, но в которой для любого $k \ge 1$ все коэффициенты форм $Y^{[6k-2]}$, $Y^{[6k-1]}$,

$Y^{[6k+1]}$ равны нулю, а среди коэффициентов форм $Y^{[6k-4]}$, $Y^{[6k-3]}$, $Y^{[6k]}$ равны нулю все, кроме, возможно, одного коэффициента в каждой из форм. Такая ОНФ отличается от ГНФ (41), в которой после переразложения по обобщенным степеням в обозначениях работы [4] могут быть отличны от нуля векторы $Y^{[6k-3]}$ и $Y^{[6k+1]}$, а остальные равны нулю.

Различие нормальных форм объясняется тем, что в первом случае условиями на нормальную форму являются гамильтоновость исходной системы с одной стороны и эквивалентность относительно группы формальных канонических преобразований с другой. Во втором случае условие гамильтоновости системы снимается, вместе с тем рассматривается эквивалентность относительно более широкой группы формальных преобразований.

Список литературы

[1] В. В. Басов. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами. // Дифференциальные уравнения. — 2003.— Т. 39, № 2.— С. 154–170.

[2] В. В. Басов, А. В. Скитович. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, I // Дифференциальные уравнения.— 2003.— Т. 39, № 8.— С. 1016–1029.

[3] В. В. Басов, Е. В. Федорова. Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы// Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).— 2010.— № 4.— С. 49–85.

[4] В. В. Басов, А. А. Федотов. Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестник СПбГУ. Сер. 1.— 2007.— вып. 1.— С. 25–30.

[5] А. Д. Брюно. Нормальная форма системы Гамильтона // Успехи мат. наук.— 1988.— Т. 43, № 1.— С. 23–56.

[6] Д. П. Желобенко. Представления редуктивных алгебр Ли.— М.: Физматлит, 1994.— 352 с.

[7] М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли.— М.: Наука, 1982.— 448 с.

[8] A. Deprit. Canonical transformations depending on a small parameter // Celestial Mechanics.— 1969.— V. 1, № 1.— P. 12–30.

[9] G. I. Hori. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // Astron Soc. Japan.— 1966.— V. 18, № 4.— P. 287–296.

[10] K. R. Meyer. Normal forms for Hamiltonian systems // Celestial Mechanics.— 1974.— V. 9, № 4.— P. 517–522.

[11] K. R. Meyer, G. R. Hall, D. Offin. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, 2nd Edition.— Springer, 2009.— xiii+399 p.