*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru*

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ДВУМЕРНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ ОДУ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ: КЛАССИФИКАЦИЯ И ВЫРОЖДЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ [1]

В. В. БАСОВ, Е. В. ФЕДОРОВА

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, fev.math@gmail.com

Аннотация

Рассмотрены вещественные двумерные автономные системы ОДУ, невозмущенная часть которых представляет собой векторный однородный полином второго порядка, а возмущение – векторный формальный степенной ряд, разложение которого начинается не ниже чем с третьего порядка. Предложена и осуществлена нормализация невозмущенной части системы, а именно: множество векторных квадратичных однородных полиномов разбито на девятнадцать классов эквивалентности относительно линейных неособых замен. Представителем каждого класса является каноническая форма – многочлен, имеющий определенную структуру при максимальном числе нулевых коэффициентов. Для пяти систем, невозмущенные части которых образуют вырожденные канонические формы, выписаны все обобщенные нормальные формы, которые можно получить почти тождественными формальными преобразованиями.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09–01–00734-а)

Часть I

Постановка задачи

1 Введение

Предлагаемая работа продолжает цикл работ ([1] – [6]), посвященных конструктивной нормализации вещественных двумерных автономных систем

$$\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x) \qquad (i = 1, 2), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $P_i = a_i x_1^2 + 2b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2$ – невозмущенная часть, $X_i = \sum_{p=2}^{\infty} X_i^{(p+1)}(x)$ – возмущение системы, а $X_i^{(r)} = \sum_{s=0}^{r} X_i^{(s,r-s)} x_1^s x_2^{r-s}$ – форма порядка r $\quad (P_i = P_i^{(2)})$.

В $[1, \text{ч.}\,1]$ и в [8, §3] изложен метод, называемый методом резонансных уравнений, позволяющий, если удастся преодолеть чисто технические вычислительные трудности, для любой системы с фиксированной невозмущенной частью в явном виде выписать все возможные формально эквивалентные ей обобщенные нормальные формы (ОНФ).

В отличие от единого определения резонансных нормальных форм или, как их еще называют, нормальных форм Пуанкаре, а раньше просто – нормальных форм (НФ), различных определений ОНФ встречается достаточно много. С их кратким описанием можно ознакомиться, например, в [7], [8].

А достаточно полная, со всеми доказательствами, теория резонансных НФ, характеризуемых наличием у системы линейного первого приближения с ненулевым вектором собственных чисел, имеется в [9] и в кратком виде представлена в [10], [11].

Предлагаемая работа преследует две цели.

1) Первая цель заключается в том, чтобы разбить множество невозмущенных по отношению к (1) систем

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2, \qquad \dot{x}_2 = a_2 x_1^2 + 2b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 \tag{2}$$

на классы эквивалентности относительно линейных неособых замен переменных, т. е. выделить конечный набор наиболее простых систем: канонических форм (КФ), попарно линейно неэквивалентных друг другу, и таких, чтобы произвольная система (2) линейной неособой заменой могла быть сведена к одной из КФ. При этом под "простотой" канонической формы понимается ее наибольшая пригодность выступить в роли невозмущенной части системы (1), подлежащей дальнейшей нормализации при помощи почти тождественных замен. Фактически, сведение к канонической форме означает нормализацию квадратичного многочлена (P_1, P_2) в системе (1) или (2).

В части II доказано, что невозмущенная система (2) имеет девятнадцать канонических форм, при этом все они найдены конструктивно, т.е. для каждой КФ в явном виде приведены условия на коэффициенты системы (2) и указана линейная неособая замена, сводящая эту систему к выбранной КФ. При этом пять канонических форм из девятнадцати имеют два представления: основное и вырожденное, которое отличается от основного тем, что один из многочленов в КФ, например P_2, тождественно равен нулю.

Подобная классификация квадратичных канонических форм, включая вырожденные, была осуществлена ранее в [2, § 2]. И на ее основе в работах [2] – [6] были проведены исследования формальной эквивалентности систем (1) с одиннадцатью КФ, взятыми в качестве их невозмущенной части, и построены все ОНФ.

Однако, оказалось, что приведенная классификация была не полна и имела ряд недостатков, связанных с отсутствием на тот момент четко сформулированных принципов, касающихся расположения ненулевых коэффициентов в многочленах P_1, P_2 и их нормировки, которые должны быть заложены в определение канонической формы.

Эти принципы сформулированы ниже в п. 3.3 части II. Они не оказывают существенного влияния на последующую нормализацию системы (1), но позволяют единственным образом выделить, так сказать, основную КФ и линейно эквивалентные ей дополнительные КФ, имеющие то же число ненулевых элементов, но расположенных не на лучших местах или не так нормированных.

Указанные различия в определении КФ привели к тому, что при исследовании ОНФ в некоторых исходных системах в качестве невозмущенной части ранее выбирались не основные, а дополнительные КФ в соответствии с введенной в [2, § 2] классификацией.

В части II все перечисленные недостатки предшествующей классификации устранены, и сама классификация осуществлена на другой идейной основе, что позволило доказать попарную линейную неэквивалентность выделенных КФ и в явном виде указать условия на исходную систему (1), при которых она сводится к определенной канонической форме.

2) Вторая цель предлагаемой работы заключается в том, чтобы нормализовать все системы (1), в которых в качестве невозмущенной части последовательно берутся каждая из пяти вырожденных канонических форм.

Такая нормализация, вообще говоря, менее эффективна по сравнению с нормализацией системы (1), невозмущенная часть которой задана основной канонической формой, эквивалентной вырожденной форме. Но в связи с тем, что основные канонические формы оказались сложнее вырожденных, осуществить полноценную нормализацию с некоторыми из них пока не удается из-за больших технических сложностей.

В части III для системы (1) с каждой из пяти вырожденных КФ, взятых в качестве невозмущенной части, и произвольным возмущением выписаны все обобщенные нормальные формы, которые можно получить при помощи почти тождественных преобразований, и приведены примеры нормальных форм, имеющих специальные структуры.

Для полноты картины следует отметить, что существует еще один путь нормализации системы (1) с вырожденной КФ в невозмущенной части. Для этого на место отсутствующего квадратичного многочлена P_2 ставится и фиксируется какое-либо слагаемое (или слагаемые) более высокого порядка из возмущения X_2 системы (1), но такое, чтобы удалось выровнять порядки в новой невозмущенной части путем придания каждой переменной соответствующего веса.

Указанный путь описан в [1, ч. 1] и осуществлен, например, в [8, § 6]. Ясно, что в ОНФ новый, уже не квадратичный, многочлен P_2 не изменяется (не аннулируется даже частично), но с его помощью удается аннулировать ряд дополнительных членов возмущения.

Наконец, в части IV описано, что к настоящему моменту сделано в решении задачи о нахождении в явном виде всех ОНФ систем, имеющих в качестве невозмущенной части одну из девятнадцати канонических форм.

2 Формальная эквивалентность систем

Итак, рассмотрим двумерную вещественную автономную систему (1)

$$\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x) \quad (i = 1, 2),$$

где $P_i = a_i x_1^2 + 2b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2$, $X_i = \sum_{p=2}^{\infty} X_i^{(p+1)}(x)$, $X_i^{(p+1)} = \sum_{s=0}^{p+1} X_i^{(s,p-s+1)} x_1^s x_2^{p-s+1}$.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \qquad (i = 1, 2), \tag{3}$$

где $y = (y_1, y_2)$, $h_i = \sum_{p=2}^{\infty} h_i^{(p)}(y)$, переводит систему (1) в систему

$$\dot{y}_i = P_i(y) + Y_i(y) \qquad (i = 1, 2), \tag{4}$$

в которой $Y_i = \sum_{p=2}^{\infty} Y_i^{(p+1)}(y)$, $Y_i^{(p+1)} = \sum_{s=0}^{p+1} Y_i^{(s,p-s+1)} y_1^s y_2^{p-s+1}$.

Продифференцировав по t замену (3) в силу систем (1) и (4), получаем

$$\sum_{j=1}^{2} \Big(\frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} P_j(y) - \frac{\partial P_i(y)}{\partial y_j} h_j(y) \Big) = X_i(y+h) + P_i(h) - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} Y_j(y) - Y_i(y).$$

Тогда при любом $p \geq 2$ формы $h_i^{(p)}$, $Y_i^{(p+1)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} (a_1 y_1^2 + 2b_1 y_1 y_2 + c_1 y_2^2) \frac{\partial h_i^{(p)}}{\partial y_1} + (a_2 y_1^2 + 2b_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2) \frac{\partial h_i^{(p)}}{\partial y_2} - \\ -2(a_i y_1 + b_i y_2) h_1^{(p)} - 2(b_i y_1 + c_i y_2) h_2^{(p)} = \widehat{Y}_i^{(p+1)} \qquad (i = 1, 2), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\widehat{Y}_i^{(p+1)} = \widetilde{Y}_i^{(p+1)}(y) - Y_i^{(p+1)}(y)$, а $\widetilde{Y}_i^{(p+1)}(y) = \{X_i(y+h) + P(h) - \sum_{j=1}^{2} Y_j\, \partial h_i / \partial y_j\}^{(p+1)}$ и зависят только от $h^{(r)}$ и $Y^{(r+1)}$ с $2 \leq r \leq p-1$.

Поэтому при последовательном для каждого $p = 2, 3, \ldots$ определении форм $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p+1)}$ в уравнениях (5) формы $\widetilde{Y}_i^{(p+1)}$ уже известны.

Приравнивая в уравнениях (5) коэффициенты при $y_1^s y_2^{p+1-s}$ $(s = 0, 1, \ldots, p+1)$, получаем систему $2(p+2)$ уравнений с $2(p+1)$ неизвестными:

$$\begin{gathered} a_2(p-s+2) h_1^{(s-2,p-s+2)} + (a_1(s-3) + 2b_2(p-s+1)) h_1^{(s-1,p-s+1)} + \\ +(2b_1(s-1) + c_2(p-s)) h_1^{(s,p-s)} + c_1(s+1) h_1^{(s+1,p-s-1)} - \\ -2b_1 h_2^{(s-1,p-s+1)} - 2c_1 h_2^{(s,p-s)} = \widehat{Y}_1^{(s,p-s+1)}, \\[2ex] a_2(p-s+2) h_2^{(s-2,p-s+2)} + (a_1(s-1) + 2b_2(p-s)) h_2^{(s-1,p-s+1)} + \\ +(2b_1 s + c_2(p-s-2)) h_2^{(s,p-s)} + c_1(s+1) h_2^{(s+1,p-s-1)} - \\ -2a_2 h_1^{(s-1,p-s+1)} - 2b_2 h_1^{(s,p-s)} = \widehat{Y}_2^{(s,p-s+1)}. \end{gathered} \tag{6}$$

В системе (6) и всегда в дальнейшем считаем, что коэффициенты рядов $\widehat{Y}_i$ и h_i равны нулю, если один из верхних индексов меньше нуля.

Для всякого $p \geq 2$ условия совместности системы (6) можно записать в виде n_p линейных уравнений, связывающих коэффициенты однородных полиномов $Y_i^{(p+1)}$:

$$\sum_{s=0}^{p+1}(\mathfrak{a}_{\nu 1}^{ps} Y_1^{(s,p-s+1)} + \mathfrak{a}_{\nu 2}^{ps} Y_2^{(s,p-s+1)}) = \widetilde{c} \qquad (\nu = \overline{1, n_p}, \quad n_p \geq 2), \tag{7}$$

где в каждом уравнении $\widetilde{c} = \sum_{s=0}^{p+1}(\mathfrak{a}_{\nu 1}^{ps}\widetilde{Y}_1^{(s,p-s+1)} + \mathfrak{a}_{\nu 2}^{ps}\widetilde{Y}_2^{(s,p-s+1)})$.

Определение 1. *Уравнения (7) будем называть резонансными.*

Получение резонансных уравнений в явном виде, т. е. вычисление множителей $\mathfrak{a}_{\nu i}^{ps}$, является основной целью описываемого одноименного метода.

Однако, решение этой задачи наталкивается на значительные технические трудности тем большие, чем больше ненулевых коэффициентов имеют многочлены P_1, P_2.

Поэтому в первую очередь требуется максимально упростить квадратичную невозмущенную часть системы (1), сведя ее при помощи линейной неособой замены к так называемой канонической форме (КФ).

В случае, когда система имеет линейное первое приближение, сведение его к канонической форме, очевидно, означает приведение матрицы линейной части к жордановой форме. А в рассматриваемом случае общепринятого определения КФ нет.

Принципы определения канонической формы будут сформулированы ниже исходя из потребностей, возникающих при решении системы (6) и облегчающих ее решение.

Важным критерием, упрощающим систему (6), является, как уже отмечалось, минимизация числа ненулевых коэффициентов у P_1 и P_2.

Большое значение имеет также то, какие коэффициенты предпочтительнее обращать в нуль в первую очередь. Так, в многочлене P_1 лучше всего, если это возможно, сделать $c_1 = 0$, а в P_2 – $a_2 = 0$. Одного этого оказывается достаточно, чтобы в левых частях системы (6) исчезло по три слагаемых.

Ясно также, что решать систему (6) будет тем проще, чем больше оставшихся ненулевыми коэффициентов удастся нормировать к единице.

В ряде случаев в системе (1) один из многочленов, например P_2, удается сделать тождественно равным нулю. Тогда последующие упрощения P_1 приводят к появлению вырожденных КФ, которые линейно эквивалентны основным и, как отмечалось выше, имеют свои плюсы и минусы.

В заключение напомним необходимые в дальнейшем определения из работы [1].

Определение 2. *Коэффициенты однородных многочленов $Y_i^{(p+1)}$ системы (4), входящие хотя бы в одно из резонансных уравнений (7), будем называть резонансными, а остальные – нерезонансными. Коэффициенты однородных многочленов $h_i^{(p)}$, остающиеся свободными при решении системы (6), будем называть резонансными.*

Произвольному набору из n_p коэффициентов $Y_{i_k}^{(s_k,p+1-s_k)}$ однородных многочленов $Y_1^{(p+1)}$, $Y_2^{(p+1)}$, где $k = \overline{1, n_p}$, $s_k \in \{0, \ldots, p+1\}$, $i_k \in \{1, 2\}$, сопоставим матрицу $\Upsilon^p = \{\upsilon_{\nu k}^p\}_{\nu,k=1}^{n_p}$, в которой $\upsilon_{\nu k}^p = \mathfrak{a}_{\nu i_k}^{ps_k}$.

Определение 3. *Набор из n_p коэффициентов однородных многочленов $Y_i^{(p+1)}$ будем называть резонансным, если* $\det \Upsilon^p \neq 0$.

Таким образом, при любом $p \geq 2$ резонансный набор – это минимальный набор коэффициентов из $Y_1^{(p+1)}$, $Y_2^{(p+1)}$, каждый из которых реально присутствует хотя бы в одном из уравнений (7) и относительно которых резонансные уравнения однозначно разрешимы. При этом в резонансный набор могут входить только различные резонансные коэффициенты, иначе в Υ^p будут одинаковые столбцы или нулевой столбец.

Определение 4. *Систему (4) будем называть обобщенной нормальной формой (ОНФ), если для любого* $p \geq 2$ *все коэффициенты однородных многочленов* $Y_i^{(p+1)}$ *равны нулю, за исключением, возможно, коэффициентов из какого-либо резонансного набора.*

Предложенное определение ОНФ соответствует понятию обобщенной нормальной формы первого порядка, введенному в [12].

Часть II

Каноническая форма невозмущенной системы

3 Линейная эквивалентность квадратичных систем

3.1 Запись и характеристика квадратичных систем

Рассмотрим двумерную вещественную невозмущенную систему (2)

$$\dot{x} = P(x) \ \text{ or } \ \dot{x} = A\,q^{[2]}(x) \qquad (P(x) \not\equiv 0, \ \ A \neq \mathbf{0}),$$

где $P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + c_1x_2^2 \\ a_2x_1^2 + 2b_2x_1x_2 + c_2x_2^2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad q^{[2]}(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}.$

Определение 5. *Общим множителем* P_0 *многочленов* P_1 *и* P_2 *будем называть общий множитель максимальной ненулевой степени, которую будем обозначать через* l $(l \in \{1,2\})$. *А если общий множитель у многочленов* P_1, P_2 *отсутствует, то будем считать, что* $l = 0$.

Для многочлена P введем функцию R, называемую результантом:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 2b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \delta_{ac}^2 - 4\delta_{ab}\delta_{bc}, \tag{8}$$

где $\delta_{ab} = a_1b_2 - a_2b_1$, $\delta_{ac} = a_1c_2 - a_2c_1$, $\delta_{bc} = b_1c_2 - b_2c_1$.

Утверждение 1. *Многочлены* P_1, P_2 *в системе (2) имеют общий множитель тогда и только тогда, когда* $R = 0$ (см. [13, стр. 59]).

3.2 Линейные преобразования квадратичных систем

Будем упрощать систему (2) при помощи линейных неособых замен

$$x_1 = r_1 y_1 + s_1 y_2, \quad x_2 = r_2 y_1 + s_2 y_2 \quad \text{или} \quad x = Ly, \tag{9}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$, $\delta = \delta_{rs} = \det L \neq 0.$

Пусть замена (9) преобразует систему (2) в систему

$$\dot y = \widetilde P(y) \ \text{ или } \ \dot y = \widetilde A\, q^{[2]}(y), \tag{10}$$

где $\widetilde P = \begin{pmatrix} \widetilde P_1 \\ \widetilde P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde a_1 y_1^2 + 2\widetilde b_1 y_1 y_2 + \widetilde c_1 y_2^2 \\ \widetilde a_2 y_1^2 + 2\widetilde b_2 y_1 y_2 + \widetilde c_2 y_2^2 \end{pmatrix}$, $\widetilde A = \begin{pmatrix} \widetilde a_1 & 2\widetilde b_1 & \widetilde c_1 \\ \widetilde a_2 & 2\widetilde b_2 & \widetilde c_2 \end{pmatrix}$.

Для системы (10) по аналогии с (2) введем результант $\widetilde R$ по формуле (8).

Дифференцируя замену (9) в силу систем (2) и (10), получаем $P(Ly) = L\widetilde P(y)$ или

$$\widetilde P(y) = L^{-1}P(Ly) = L^{-1}Aq^{[2]}(Ly), \tag{11}$$

где $L^{-1} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} s_2 & -s_1 \\ -r_2 & r_1 \end{pmatrix}$, а $L^{-1}A = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{as} & 2\delta_{bs} & \delta_{cs} \\ -\delta_{ar} & -2\delta_{br} & -\delta_{cr} \end{pmatrix}$.

Поэтому в формуле (11) имеем:

$$\begin{pmatrix} \widetilde a_1 y_1^2 + 2\widetilde b_1 y_1 y_2 + \widetilde c_1 y_2^2 \\ \widetilde a_2 y_1^2 + 2\widetilde b_2 y_1 y_2 + \widetilde c_2 y_2^2 \end{pmatrix} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{as} & 2\delta_{bs} & \delta_{ds} \\ -\delta_{ar} & -2\delta_{br} & -\delta_{cr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (r_1y_1 + s_1y_2)^2 \\ (r_1y_1 + s_1y_2)(r_2y_1 + s_2y_2) \\ (r_2y_1 + s_2y_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при $y_1^s y_2^{2-s}$ $(s = \overline{0,2})$, получаем

$$\begin{aligned} \delta\widetilde a_1 &= s_2P_1(r_1, r_2) - s_1P_2(r_1, r_2), \quad -\delta\widetilde a_2 = r_2P_1(r_1, r_2) - r_1P_2(r_1, r_2), \\ \delta\widetilde b_1 &= s_2(a_1r_1s_1 + b_1\delta_* + c_1r_2s_2) - s_1(a_2r_1s_1 + b_2\delta_* + c_2r_2s_2), \\ -\delta\widetilde b_2 &= r_2(a_1r_1s_1 + b_1\delta_* + c_1r_2s_2) - r_1(a_2r_1s_1 + b_2\delta_* + c_2r_2s_2), \\ \delta\widetilde c_1 &= s_2P_1(s_1, s_2) - s_1P_2(s_1, s_2), \quad -\delta\widetilde c_2 = r_2P_1(s_1, s_2) - r_1P_2(s_1, s_2). \end{aligned} \tag{12}$$

где $\delta_* = r_1s_2 + r_2s_1$.

Утверждение 2. *В системах (2) и (10) или $R, \widetilde R = 0$, или $R\widetilde R > 0$, т. е. знак R инвариантен по отношению к любой линейной неособой замене (9).*

Действительно, нетрудно убедиться, что $\widetilde R = \delta^2 R$.

Замечание 1. В дальнейшем для краткости систему (2) будем отождествлять с матрицей коэффициентов A или многочленом P, поступая так же и с другими полученными из нее системами. А замену (9) будем отождествлять с матрицей L.

Среди замен (9), преобразующих (2) в (10), выделим две стандартные:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \text{ – нормировка,} \quad \widetilde A = \begin{pmatrix} a_1r_1 & 2b_1s_2 & c_1s_2^2r_1^{-1} \\ a_2r_1^2s_2^{-1} & 2b_2r_1 & c_2s_2 \end{pmatrix}; \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – перенумерация}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} c_2 & 2b_2 & a_2 \\ c_1 & 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

3.3 Принципы определения канонической формы

Предложение 1. *В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что в системе (2) многочлен $P_1(x) \not\equiv 0$, так как в противном случае в ней $P_2(x) \not\equiv 0$ и можно сделать перенумерацию (14).*

Будем приписывать каждому элементу матрицы A или коэффициенту многочленов P_1 или P_2 системы (2) индекс, равный числу, стоящему на месте этого элемента в матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 6. *Индексом матрицы A системы (2) будем называть сумму индексов ее ненулевых элементов.*

Определение 7. *Систему (2) будем называть канонической формой ($K\Phi^l$) или, что то же самое, основной $K\Phi^l$, если линейной неособой заменой (9) из нее нельзя получить систему, которая предпочтительнее исходной с точки зрения следующих иерархических принципов:*

1) *Система невырождена, т. е. $P_1, P_2 \not\equiv 0$, и, если возможно, $P_1 \equiv P_2$.*

2) *Число ненулевых элементов матрицы A минимально.*

3) *Индекс A минимален.*

4) *Число элементов A, по модулю равных единице, максимально.*

5) *Расположение ненулевых коэффициентов многочлена P_1 :*

  5a) *Порядок первого ненулевого коэффициента P_1 минимален.*

  5b) *Порядок последнего ненулевого коэффициента P_1 максимален.*

6) *Нормировка ненулевых коэффициентов системы:*

  6a) *В P_2 левый ненулевой элемент равен единице.*

  6b) *В P_1 модуль правого ненулевого коэффициента равен единице.*

Замечание 2. Ключевыми при определении КФ^l являются принципы 1 – 4. А принципы 5 и 6 позволяют выделить среди имеющихся линейно эквивалентных канонических форм, так сказать, основную КФ^l, хотя остальные линейно эквивалентные ей канонические формы не хуже с точки зрения выбора любой из них в качестве первого приближения в произвольной возмущенной системе при сведении ее к ОНФ.

Эти соображения приводят к появлению понятия дополнительной КФ^l.

Определение 8. *Систему (2) будем называть дополнительной канонической формой ($ДK\Phi^l$), если она линейно эквивалентна какой-либо основной $K\Phi^l$, но принцип 5 и, возможно, принцип 6 для нее не выполняются. При этом $ДK\Phi^l$, полученную из любой несимметричной $K\Phi^l_i$ при помощи перенумерации (14), будем обозначать $K\Phi^{l\Pi}_i$.*

4 Канонические формы системы (2) в случае $l = 0$

Рассмотрим систему (2) $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + c_1x_2^2 \\ a_2x_1^2 + 2b_2x_1x_2 + c_2x_2^2 \end{pmatrix}$, в которой однородные многочлены $P_1, P_2 \not\equiv 0$ и не имеют общего множителя.

Тогда по определению 5 имеет место случай $l = 0$ и по утверждению 1 введенный в (8) результант $R = \delta_{ac}^2 - 4\delta_{ab}\delta_{bc} \neq 0$. Поэтому, в частности, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Для того чтобы выписать все канонические формы, к которым система (2) сводится линейной заменой (9), необходимо сформулировать ряд условий.

Введем в рассмотрение два кубических многочлена

$$Q_1(t) = t^3 - ut^2 + vt - 1, \quad Q_2(t) = t^3 + (v^2 - 2u)t^2 + (u^2 - 2v)t + 1, \tag{15}$$

у которых входящие в коэффициенты параметры u, v имеют следующие ограничения:

$$uv \neq 0; 1, \quad u \neq v, \quad u^2 + v \neq 0, \quad u + v^2 \neq 0. \tag{16}$$

Утверждение 3. *Нули многочленов Q_1, Q_2 удовлетворяют одному из двух условий:*

$$\begin{array}{l} \exists\, t_1', t_1'' \in \mathbb{R}: \ Q_1(t_1') = 0, \quad Q_1(t_1'') = 0, \quad t_1' \neq t_1''; \\ \exists!\, t_1 \in \mathbb{R}: \ Q_1(t_1) = 0, \quad \forall\, t_2 \in \mathbb{R}: \quad Q_2(t_2) = 0 \ \Rightarrow \ t_2 \neq t_1 \quad (t_1, t_2 \neq 0, u). \end{array} \tag{17}$$

Доказательство. Предположим, что условия (17) не выполняются.

Это значит, что $Q_1(t)$ имеет единственный вещественный нуль $t_1 = -\tau$ и этот нуль является также нулем $Q_2(t)$. Тогда многочлены (15) имеют вид

$$Q_i(t) = (t + \tau)(t^2 + \mathfrak{b}_i t + \mathfrak{c}_i) = t^3 + (\tau + \mathfrak{b}_i)t^2 + (\tau\mathfrak{b}_i + \mathfrak{c}_i)t + \tau\mathfrak{c}_i \qquad (i = 1, 2).$$

Следовательно, $\begin{cases} \mathfrak{b}_1 = -u - \tau \\ \mathfrak{c}_1 = -\tau^{-1} \\ \tau\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 = v \end{cases}$ и $\begin{cases} \mathfrak{b}_2 = v^2 - \tau - 2u \\ \mathfrak{c}_2 = \tau^{-1} \\ \tau\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_2 = u^2 - 2v \end{cases}$. Из второй системы получаем $(u + \tau)^2 = \tau(v + \tau^{-1})^2$. Поэтому $\tau > 0$, иначе $u = -\tau$, $v = -\tau^{-1}$, что противоречит (16).

Условие единственности вещественного нуля Q_1 влечет неравенство $\mathfrak{b}_1^2 - 4\mathfrak{c}_1 \leq 0$, равносильное невозможному неравенству $(u + \tau)^2 + 4\tau^{-1} \leq 0$, так как $\tau > 0$. $\square$

СПИСОК канонических форм системы (2) в случае $l = 0$:

$$\text{КФ}_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{КФ}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{КФ}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{КФ}_7^0 = \begin{pmatrix} 0 & u & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{КФ}_4^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_5^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_6^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{КФ}_8^0 = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & v \end{pmatrix}, \ \text{КФ}_9^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & v \end{pmatrix}, \ \text{КФ}_{10}^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & u & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $u, v \neq 0$, $\sigma = \pm 1$; в КФ_3^0 $u \geq 1$, в КФ_4^0 $u > 1/4$, в КФ_5^0 $u \neq \pm 1/2$ при $R > 0$, в КФ_9^0 $u \neq 1/2$ при $R < 0$, в КФ_{10}^0 $0 < u < 2^{1/2}$.

Замечание 3. В КФ$^0_1$, КФ$^0_2$, КФ$^0_3$, КФ$^0_6$ и в КФ$^0_7$ $R = 1$, в КФ$^0_4$ $R = u^2$, в КФ$^0_5$ $R = u\sigma$, в КФ$^0_8$ $R = u^2v^2 - uv$, в КФ$^0_9$ $R = u^2v^2 + u\sigma$, в КФ$^0_{10}$ $R = -1/2$.

Теорема 1. *КФ$^0_1$ — КФ$^0_{10}$ в случае $l = 0$ попарно линейно не эквивалентны и система (2) линейной неособой заменой (9) сводится к одной из них.*

Доказательство.

1) $R = \delta^2_{ac} - 4\delta_{ab}\delta_{bc} > 0$.

Покажем сначала, что найдется замена (9), которая сводит (2) к системе (10) вида

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & 0 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{a}_2 & 0 & \widetilde{c}_2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

1a) $\delta_{ab} \neq 0$. Тогда при $r_1 = t^*_1 t^*$, $s_1 = t^*_2 t^*$, $r_2, s_2 = t^*$, где $t^*_1 = (-\delta_{ac} + R^{1/2})(2\delta_{ab})^{-1}$, $t^*_2 = (-\delta_{ac} - R^{1/2})(2\delta_{ab})^{-1}$, $t^* = R^{1/2}(\delta_{ab})^{-1}$ $(\delta = t^{*3})$, получаем систему (18), в которой $\widetilde{a}_i = (-1)^i(t^*_{3-i}P_2(t^*_1, 1) - P_1(t^*_1, 1))$, $\widetilde{c}_i = (-1)^i(t^*_{3-i}P_2(t^*_2, 1) - P_1(t^*_2, 1))$ $(i = 1, 2)$.

1b) $\delta_{ab} = 0$, $\delta_{bc} \neq 0$ $(\delta_{ac} = 0)$.

1b1) $a_2 \neq 0$. Тогда при $r_1 = 1$, $s_1 = -b_2$, $r_2 = 0$, $s_2 = a_2$ получаем систему (18), в которой $\widetilde{a}_1 = a_1 + b_2$, $\widetilde{c}_1 = a_1b_2^2 - 2b_1a_2b_2 + a_2^2c_1 - b_2^3 + a_2b_2c_2$, $\widetilde{a}_2 = 1$, $\widetilde{c}_2 = a_2c_2 - b_2^2$.

1b2) $a_2 = 0$ $(b_2 = 0, a_1, c_2 \neq 0)$. Тогда при $r_1 = a_1^{-1}$, $s_1 = -(a_1c_2)^{-1}b_1$, $r_2 = 0$, $s_2 = c_2^{-1}$ получаем систему (18) с $\widetilde{a}_1 = 1$, $\widetilde{c}_1 = (a_1c_1 - b_1^2 + b_1c_2)c_2^{-2}$, $\widetilde{a}_2 = 0$, $\widetilde{c}_2 = 1$.

1c) $b_1, b_2 = 0$ $(\delta_{ac} \neq 0)$. Тогда в системе (18) $\widetilde{a}_i = a_i$, $\widetilde{c}_i = c_i$ $(i = 1, 2)$.

Теперь произвольная замена (9) сводит систему (18) к системе с коэффициентами

$$\begin{gathered}
\widetilde{\delta}\breve{a}_1 = s_2(\widetilde{a}_1r_1^2 + \widetilde{c}_1r_2^2) - s_1(\widetilde{a}_2r_1^2 + \widetilde{c}_2r_2^2), \quad -\widetilde{\delta}\breve{a}_2 = r_2(\widetilde{a}_1r_1^2 + \widetilde{c}_1r_2^2) - r_1(\widetilde{a}_2r_1^2 + \widetilde{c}_2r_2^2), \\
\widetilde{\delta}\breve{b}_1 = s_2(\widetilde{a}_1r_1s_1 + \widetilde{c}_1r_2s_2) - s_1(\widetilde{a}_2r_1s_1 + \widetilde{c}_2r_2s_2), \\
-\widetilde{\delta}\breve{b}_2 = r_2(\widetilde{a}_1r_1s_1 + \widetilde{c}_1r_2s_2) - r_1(\widetilde{a}_2r_1s_1 + \widetilde{c}_2r_2s_2), \\
\widetilde{\delta}\breve{c}_1 = s_2(\widetilde{a}_1s_1^2 + \widetilde{c}_1s_2^2) - s_1(\widetilde{a}_2s_1^2 + \widetilde{c}_2s_2^2), \quad -\widetilde{\delta}\breve{c}_2 = r_2(\widetilde{a}_1s_1^2 + \widetilde{c}_1s_2^2) - r_1(\widetilde{a}_2s_1^2 + \widetilde{c}_2s_2^2).
\end{gathered} \tag{19}$$

Далее для краткости будем опускать символ $\widetilde{\ }$ над коэффициентами системы (18).

$\mathbf{1_1}$) $a_1c_2 = 0$. Тогда $a_2c_1 \neq 0$.

$\mathbf{1^1_1}$) $a_1, c_2 = 0$. Тогда (19) при $r_1 = (a_2^2c_1)^{-1/3}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = a_2r_1^2$ является КФ$^0_2$.

$\mathbf{1^2_1}$) $a_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. Тогда (19) при $r_1 = 0$, $s_1 = c_1r_2^2$, $r_2 = (a_2c_1^2)^{-1/3}$, $s_2 = 0$ является КФ$^0_6$ с $u = c_2(a_2c_1^2)^{-1/3} \neq 0$.

$\mathbf{1^3_1}$) $a_1 \neq 0$, $c_2 = 0$. Тогда (19) при $r_1 = (a_2^2c_1)^{-1/3}$, $s_1, r_2 = 0$, $r_2 = a_2r_1^2$ является КФ$^0_6$ с $u = a_1(a_2^2c_1)^{-1/3} \neq 0$.

$\mathbf{1_2}$) $a_1c_2 \neq 0$.

$\mathbf{1^1_2}$) $a_2, c_1 = 0$. Тогда (19) при $r_1 = a_1^{-1}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = c_2^{-1}$ является КФ$^0_1$.

$\mathbf{1^2_2}$) $a_2 = 0$, $c_1 \neq 0$.

$\mathbf{1^2_2a}$) $0 \neq a_1c_1c_2^{-2} \leq 1/4$. Тогда (19) при $r_1 = a_1^{-1}$, $s_1 = (2a_1)^{-1}(1 + (1 - 4a_1c_1c_2^{-2})^{1/2})$, $r_2 = 0$, $s_2 = c_2^{-1}$ является КФ$^0_3$ с $u = 1 + (1 - 4a_1c_1c_2^{-2})^{1/2} \geq 1$.

$\mathbf{1^2_2b}$) $a_1c_1c_2^{-2} > 1/4$. Тогда (19) при $r_1 = c_1c_2^{-2}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = c_2^{-1}$ является КФ$^0_4$ с $u = a_1c_1c_2^{-2} > 1/4$.

$\mathbf{1_2^3}$) $a_2 \neq 0,\ c_1 = 0.$

$\mathbf{1_2^3a}$) $0 \neq a_2c_2a_1^{-2} \leq 1/4$. Тогда система (19) при $r_1 = 0,\ s_1 = a_1^{-1},\ r_2 = c_2^{-1},\ s_2 = (2c_2)^{-1}(1 + (1 - 4a_2c_2a_1^{-2})^{1/2})$ является КФ$_3^0$ с $u = 1 + (1 - 4a_2c_2a_1^{-2})^{1/2} \geq 1$.

$\mathbf{1_2^3b}$) $a_2c_2a_1^{-2} > 1/4$. Тогда (19) при $r_1 = 0,\ s_1 = a_1^{-1},\ r_2 = a_2a_1^{-2},\ s_2 = 0$ является КФ$_4^0$ с $u = a_2c_2a_1^{-2} > 1/4$.

$\mathbf{1_2^4}$) $a_2c_1 \neq 0.$

$\mathbf{1_2^4a}$) $a_1c_1^{1/3} = a_2^{1/3}c_2$. Тогда система (19) при $r_1 = a_1(2a_1^2 - 2a_2c_2)^{-1},\ s_1 = a_1|2a_1^4 - 2a_2^2c_2^2|^{-1/2}\mathrm{sign}\,(a_2c_2),\ r_2 = a_1^2(2a_1^2c_2 - 2a_2c_2^2)^{-1},\ s_2 = -a_1^2c_2^{-1}|2a_1^4 - 2a_2^2c_2^2|^{-1/2}\mathrm{sign}\,(a_2c_2)$ – КФ$_5^0$ с $u = (a_1^2 + a_2c_2)(2a_1^2 - 2a_2c_2)^{-1} \neq 0; \pm 1/2,\ \sigma = \mathrm{sign}\,u$. При этом $a_1^2 \pm a_2c_2 \neq 0$, иначе в (2) $P_2 = a_1^{-1}a_2P_1$ и $l = 3$.

$\mathbf{1_2^4b}$) $a_1^2 + a_2c_2 = 0$. Тогда (19) при $r_1 = a_1(a_1^3 + a_2^2c_1)^{-2/3},\ s_1 = (a_1^3 + a_2^2c_1)^{-1/3},\ r_2 = a_2(a_1^3 + a_2^2c_1)^{-2/3},\ s_2 = 0$ – КФ$_7^0$ с $u = 2a_1(a_1^3 + a_2^2c_1)^{-1/3} \neq 0$, причем $a_1^3 + a_2^2c_1 = -a_2\delta_{ac} \neq 0$.

$\mathbf{1_2^4c}$) $c_2^2 + a_1c_1 = 0$. Тогда (19) при $r_1 = c_1(c_2^3 + c_1^2a_2)^{-2/3},\ s_1 = 0,\ r_2 = c_2(c_2^3 + c_1^2a_2)^{-2/3},\ s_2 = (c_2^3 + c_1^2a_2)^{-1/3}$ – КФ$_7^0$ с $u = 2c_2(c_2^3 + c_1^2a_2)^{-1/3} \neq 0$, причем $c_2^3 + c_1^2a_2 = -c_1\delta_{ac} \neq 0$.

$\mathbf{1_2^4d}$) $a_1c_1^{1/3} \neq a_2^{1/3}c_2,\ a_1^2 + a_2c_2 \neq 0,\ c_2^2 + a_1c_1 \neq 0$. Тогда (19) при $r_1 = (a_2^2c_1)^{-1/3},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (a_2c_1^2)^{-1/3}$ принимает вид

$$\Phi_1^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & v \end{pmatrix}$$

с $u = a_1(a_2^2c_1)^{-1/3},\ v = c_2(a_2c_1^2)^{-1/3}$, удовлетворяющими (16) и $R = (uv - 1)^2 > 0$.

Итак, установлено, что Φ_1^0 с $R > 0$ и индексом восемь при указанных выше условиях на u и v не может быть сведена к системе, имеющей больше двух нулей. Сведем Φ_1^0 к КФ$_8^0$ с индексом шесть, а если не получится, то к КФ$_9^0$ с индексом семь.

Произвольная замена (9) сводит Φ_1^0 к системе с $\widetilde{R} > 0$ и коэффициентами

$$\begin{aligned}
&\widetilde{a}_1 = -((s_1 - us_2)r_1^2 + (vs_1 - s_2)r_2^2)\delta^{-1}, && \widetilde{a}_2 = (r_1^3 - ur_1^2r_2 + vr_1r_2^2 - r_2^3)\delta^{-1},\\
&\widetilde{b}_1 = -((s_1 - us_2)r_1s_1 + (vs_1 - s_2)r_2s_2)\delta^{-1}, && \widetilde{b}_2 = ((r_1 - ur_2)r_1s_1 + (vr_1 - r_2)r_2s_2)\delta^{-1},\\
&\widetilde{c}_1 = -(s_1^3 - us_1^2s_2 + vs_1s_2^2 - s_2^3)\delta^{-1}, && \widetilde{c}_2 = ((r_1 - ur_2)s_1^2 + (vr_1 - r_2)s_2^2)\delta^{-1},
\end{aligned}$$

Коэффициенты $\widetilde{a}_2, \widetilde{c}_1$ в полученной системе можно сделать нулевыми, если $Q_1(t)$ из (15) имеет два различных вещественных нуля, т. е. выполняется условие (17_1).

В этом случае, положив в замене (9) $r_1 = t_1'r_2,\ s_1 = t_1''s_2$, что оставляет ее неособой, получим, что $\widetilde{a}_2 = 0$ и $\widetilde{c}_1 = 0$, и остается сделать нормировку.

Таким образом, Φ_1^0 с $u = u_*,\ v = v_*$, удовлетворяющими (16) и (17_1), при выбранных r_1, s_1 и $r_2 = (t_1' - t_1'')(2(t_1'^2t_1'' + v_*t_1' - u_*t_1't_1'' - 1))^{-1},\ s_2 = (t_1'' - t_1')(2(t_1't_1''^2 - u_*t_1't_1'' + v_*t_1'' - 1))^{-1}$ сводится к КФ$_8^0$ с $u = (u_*t_1'^2 - t_1'^2t_1'' - v_*t_1'' + 1)(2(t_1'^2t_1'' + v_*t_1' - u_*t_1't_1'' - 1))^{-1},\ v = (u_*t_1''^2 - t_1't_1''^2 - v_*t_1' + 1)(2(t_1't_1''^2 - u_*t_1't_1'' + v_*t_1'' - 1))^{-1}$, причем $uv \neq 0$, иначе $R = 0$.

Пусть теперь вместо (17_1) выполняется условие (17_2). Тогда $\widetilde{a}_2^2 + \widetilde{c}_1^2 \neq 0$.

Положив в замене (9) $r_1 = (tv - 1)(u - t)^{-1}t^{-1}r_2,\ s_1 = ts_2$, получим систему

$$\begin{pmatrix} (tv-1)t^{-1}r_2 & 0 & t(t-u)r_2^{-1}s_2^2 \\ Q_2(t)t^{-2}(t-u)^{-2}r_2^2s_2^{-1} & 2(uv-1)(t-u)^{-1}r_2 & (tu+v)s_2 \end{pmatrix},$$

только замена должна быть неособой, т. е. $(1 - tv)(t - u)^{-1}t^{-1} \neq t$ или $Q_1(t) \neq 0$.

Согласно (17_2) $Q_1(t_2) \neq 0$. Поэтому $\widetilde{a}_2 = 0$ при $t = t_2$, т.е. Φ_1^0 с $u = u_*$, $v = v_*$ при условиях (16), (17_2), заменой (9) с $t = t_2$ в выбранных r_1, s_1 и $r_2 = (u_* - t_2)(2u_*v_* - 2)^{-1}$, $s_2 = |2t_2(u_*v_* - 1)|^{-1/2}$ сводится к КФ$_9^0$ с $\sigma = -\mathrm{sign}\,(t_2(u_*v_* - 1))$, $u = (u_* - t_2)(t_2v_* - 1) \times (2t_2(u_*v_* - 1))^{-1}$, $v = (t_2u_* + v_*)|2t_2(u_*v_* - 1)|^{-1/2}$. При этом $uv \neq 0$, иначе, если $t_2v_* - 1 = 0$, то $Q_2(t_2) = t_2(t-u)^2 \neq 0$, а если $t_2u_* + v_* = 0$, то $Q_2(-u_*^{-1}v_*) = (1 - u_*v_*)(1 - u_*^{-3}v_*^3) \neq 0$.

2) $R = \delta_{ac}^2 - 4\delta_{ab}\delta_{bc} < 0$. Тогда $\delta_{ab}\delta_{bc} > 0$.

Покажем сначала, что найдется замена (9), которая сводит (2) к системе (10) вида

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & 2\widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ 0 & 2\widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \end{pmatrix} \qquad (\widetilde{a}_1\widetilde{b}_2 \neq 0). \tag{20}$$

2a) $a_2 \neq 0$. Тогда при $r_1 = r_*$, $s_1 = 1$, $r_2 = -1$, $s_2 = 0$, где r_* – это вещественный нуль многочлена $a_2r_1^3 + (2b_2 - a_1)r_1^2 + (c_2 - 2b_1)r_1 - c_1$, получаем систему (20), в которой $\widetilde{a}_1 = a_2r_*^2 + 2b_2r_* + c_2$, $\widetilde{b}_1 = -a_2r_* - b_2$, $\widetilde{c}_1 = a_2$, $\widetilde{b}_2 = b_1 + a_1r_* - b_2r_* - a_2r_*^2$, $\widetilde{c}_1 = a_2r_* - a_1$.

2b) $a_2 = 0$. Тогда в системе (20) $\widetilde{a}_i = a_i$, $\widetilde{b}_i = b_i$, $\widetilde{c}_i = c_i$ $(i = 1, 2)$.

Произвольная замена (9) с $r_2 = 0$ сводит систему (20) к системе

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1r_1 & 2(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2)s_1 + 2\widetilde{b}_1s_2 & ((\widetilde{a}_1 - 2\widetilde{b}_2)s_1^2 + (2\widetilde{b}_1 - \widetilde{c}_2)s_1s_2 + \widetilde{c}_1s_2^2)r_1^{-1} \\ 0 & 2\widetilde{b}_2r_1 & 2\widetilde{b}_2s_1 + \widetilde{c}_2s_2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Далее опускаем $\widetilde{\ }$ над коэффициентами (20), а коэффициенты (21) отмечаем $\breve{\ }$.

$\mathbf{2_1}$) $(a_1 - b_2)c_2 - 2b_1b_2 = 0$ (т.е. можно сделать $\breve{b}_1, \breve{c}_2 = 0$). Тогда система (21) при $r_1 = (2b_2)^{-1}$, $s_1 = -|a_1|^{1/2}c_2(-2|b_2|R)^{-1/2}\mathrm{sign}\,b_2$, $r_2 = 0$, $s_2 = |2a_1b_2|^{1/2}(-R)^{-1/2}$ является КФ$_5^0$ с $u = a_1(2b_2)^{-1} \neq 0$, $\sigma = -\mathrm{sign}\,u$.

$\mathbf{2_2}$) $(a_1 - b_2)c_2 - 2b_1b_2 \neq 0$. Пусть $d_* = (2b_1 - c_2)^2 + 4c_1(2b_2 - a_1)$.

$\mathbf{2_2^1}$) $d_* \geq 0$, т.е. можно сделать $\breve{c}_1 = 0$. При этом $b_* = 2c_1(a_1 - b_2) + b_1(c_2 - 2b_1 + d_*^{1/2}\mathrm{sign}\,(c_2 - 2b_1)) \neq 0$, иначе при $r_1 = a_1^{-1}$, $s_1 = 2c_1$, $r_2 = 0$, $s_2 = (c_2 - 2b_1 + d_*^{1/2}\mathrm{sign}\,(c_2 - 2b_1))$ в системе (21) $\breve{R} = \breve{c}_2^2 \geq 0$, что невозможно. Поэтому при $r_1 = (2b_2)^{-1}$, $s_1 = c_1b_*^{-1}$, $r_2 = 0$, $s_2 = (2b_*)^{-1}(c_2 - 2b_1 + d_*^{1/2}\mathrm{sign}\,(c_2 - 2b_1))$ система (21) – это КФ$_8^0$ с $u = a_1(2b_2)^{-1}$, $v = (2b_*)^{-1}(4c_1b_2 + c_2^2 - 2b_1c_2 + c_2d_*^{1/2}\mathrm{sign}\,(c_2 - 2b_1))$ и $0 < uv < 1$, так как $R = uv(uv - 1) < 0$.

$\mathbf{2_2^2}$) $d_* < 0$.

$\mathbf{2_2^2}$**a)** $a_1 \neq b_2$. Тогда $c_* = 2b_2((a_1 - b_2)(a_1c_1 + b_1c_2 - c_1b_2) - a_1b_1^2) \neq 0$, иначе при $r_1 = (2b_2)^{-1}$, $s_1 = b_1$, $r_2 = 0$, $s_2 = b_2 - a_1$ в системе (21) $\breve{c}_1 = 0$ – невозможно при $d_* < 0$.

При $r_1 = (2b_2)^{-1}$, $s_1 = b_1|c_*|^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = (b_2 - a_1)|c_*|^{-1/2}$ система (21) является КФ$_9^0$ с $u = a_1(2b_2)^{-1} \neq 0; 1/2$, $v = (2b_1b_2 - (a_1 - b_2)c_2)|c_*|^{-1/2} \neq 0$, $\sigma = \mathrm{sign}\,c_*$. При этом $\breve{R} = u(uv^2 + \sigma) = R(a_1 - b_2)^2b_2^{-2}|4c_*|^{-1} < 0$, следовательно, $|u|v^2 < -\mathrm{sign}\,(uc_*)$. А значит, $\sigma = -\mathrm{sign}\,u$ и $|u|v^2 < 1$.

$\mathbf{2_2^2}$**b)** $a_1 = b_2$ $(\breve{b}_1 \neq 0)$. Тогда (21) при $r_1 = (2a_1)^{-1}$, $s_1 = -c_2(-2R)^{-1/2}\mathrm{sign}\,(a_1b_1)$, $r_2 = 0$, $s_2 = 2^{1/2}a_1(-R)^{-1/2}\mathrm{sign}\,(a_1b_1)$ является КФ$_{10}^0$ с $u = 2^{3/2}|a_1b_1|(-R)^{-1/2}$, причем $0 < u < \sqrt{2}$, так как $u^2 - 2 = -2a_1^2(4b_1^2 - 4b_1c_2 + c_2^2 + 4a_1c_1)R^{-1} = -2a_1^2d_*R^{-1} < 0$. $\square$

Замечание 4. КФ$_3^0$ с $u = u_* < 1$ заменой (9) с $r_1 = 1$, $s_1 = 1 - u_*$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ опять сводится к КФ$_3^0$, но с $u = 2 - u_* > 1$.

КФ$_4^0$ с $u = u_* \leq 1/4$ – не каноническая по принципу 3. Заменой (9) с $r_1 = u_*^{-1}$, $s_1 = (1 + (1 - 4u_*)^{1/2})(2u_*)^{-1}$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ она сводится к КФ$_3^0$ с $u = 1 + (1 - 4u_*)^{1/2} \geq 1$.

КФ_5^0 с $|u| = 1/2$, $\sigma = \operatorname{sign} u$ $(R = 1/2)$ по принципу 2 канонической формой не является. При $u = 1/2$ заменой (9) с $r_1, s_1 = 1$, $r_2 = 2^{-1/2}$, $s_2 = -2^{-1/2}$ КФ_5^0 сводится к КФ_1^0. А при $u = -1/2$ заменой (9) с $r_1, s_1 = -1$, $r_2 = 2^{-1/2}$, $s_2 = -2^{-1/2}$ КФ_5^0 сводится к КФ_2^0.

КФ_9^0 с $u = u_* = 1/2$, $\sigma = -1$ $(R = (v^2 - 2)/4 < 0)$ – неканоническая по принципу 2. Заменой (9) с $r_1 = 1$, $s_1 = -2^{1/2} v(2 - v^2)^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = 2^{1/2}(2 - v^2)^{-1/2}$ она сводится к КФ_5^0 с $u = 1/2$, $\sigma = -1$ $(R = -1/2)$.

КФ_{10}^0 с $u = u_* \notin (0, 2^{1/2})$ канонической не является в силу принципов 2 или 3. При $|u_*| = 2^{1/2}$ заменой (9) с $r_1 = 1$, $s_1 = 0$, $r_2 = 2^{-1/2}\operatorname{sign} u_*$, $s_2 = \operatorname{sign} u_*$ КФ_{10}^0 сводится к КФ_9^0 с $u = 1$, $\sigma = -1$, $v = 2^{-1/2}$ $(R = -1/2)$. При $|u_*| > 2^{1/2}$ заменой (9) с $r_1 = (u_* + (u_*^2 - 2)^{1/2}) u_*^{-1}$, $s_1 = (u_* - (u_*^2 - 2)^{1/2}) u_*^{-1}$, $r_2, s_2 = u_*^{-1}$ КФ_{10}^0 сводится к КФ_8^0 с $u = (u_*^2 - 2 + u_*^2 (u_*^2 - 2)^{1/2}) u_*^{-1} (u_*^2 - 2)^{-1/2} \neq 0$, $v = (-u_*^2 + 2 + u_*^2 (u_*^2 - 2)^{1/2}) u_*^{-1} (u_*^2 - 2)^{-1/2} \neq 0$, причем $uv = 2u_*^{-2} < 1$. А при $-2^{1/2} < u_* < 0$ КФ_{10}^0 заменой (9) с $r_1 = 1$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = -1$ опять сводится к КФ_{10}^0, но с $u = -u_*$, т.е. $0 < u < 2^{1/2}$.

Замечание 5. Формы $\Phi_2^0 = \begin{pmatrix} u_* & v_* & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ с $u_* v_* \neq 0$, $R = 1$, и $\Phi_3^0 = \begin{pmatrix} u_* & v_* & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ с $u_* v_* \neq 0$, $R = u_*^2$, отсутствующие в списке, – неканонические по принципу 2 или 3.

Форма Φ_2^0 при $v_*^3 - 4u_* v_* - 8 = 0$, $v_*^4 + 32 v_* < 0$ заменой (9) с $r_1 = 4v_*^{-2}$, $s_1 = 0$, $r_2 = -2v_*^{-1}$, $s_2 = 2v_*^{-1}$ сводится к КФ_4^0 с $u = -8v_*^{-3} > 1/4$; при $v_*^3 - 4u_* v_* - 8 = 0$, $v_*^4 + 32 v_* \geq 0$ заменой (9) с $r_1 = -v_*/2$, $s_1 = 4v_*^{-1}(v_*^2 \pm (v_*^4 + 32 v_*)^{1/2})(16 + v_*^3 \pm v_*(v_*^4 + 32 v_*)^{1/2})^{-1}$, $r_2 = v_*^2/4$, $s_2 = 32 v_*^{-1}(16 + v_*^3 \pm v_*(v_*^4 + 32 v_*)^{1/2})^{-1}$ сводится к КФ_3^0 с $u = 16 v_*^{-2}(\mp(v_*^4 + 32 v_*)^{1/2} - v_*^2)(16 + v_*^3 \pm v_*(v_*^4 + 32 v_*)^{1/2})^{-1} \neq 0$. А при $v_*^3 - 4u_* v_* - 8 \neq 0$, если $4u_* = v_*^2$, то заменой (9) с $r_1 = 0$, $s_1 = 1$, $r_2 = 1$, $s_2 = -v_*/2$ Φ_2^0 сводится к КФ_7^0 с $u = v_*/2 \neq 0$; если $4u_* \neq v_*^2$, то заменой (9) с $r_1 = 0$, $s_1 = 4(v_*^3 - 4u_* v_* - 8)^{-2/3}$, $r_2 = -2(v_*^3 - 4u_* v_* - 8)^{-1/3}$, $s_2 = -2v_*(v_*^3 - 4u_* v_* - 8)^{-2/3}$ Φ_2^0 сводится к Φ_1^0 с $u = -v_*(v_*^3 - 4u_* v_* - 8)^{-1/3}$, $v = (4u_* - v_*^2)(v_*^3 - 4u_* v_* - 8)^{-2/3}$, при этом $uv \neq 0; 1$.

Форма Φ_3^0 при $v_*^2 - 2v_* - 4u_* + 1 < 0$ заменой (9) с $r_1 = (2v_* - v_*^2 + 4u_*)(4u_*)^{-1}$, $s_1 = -(2u_*)^{-1} v_*$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ сводится к КФ_4^0 с $u = (2v_* - v_*^2 + 4u_*)/4 > 1/4$. А при $v_*^2 - 2v_* - 4u_* + 1 \geq 0$, если $v_*^2 - 2v_* - 4u_* \neq 0$, то заменой (9) с $r_1 = u_*^{-1}$, $s_1 = (1 - v_* + (v_*^2 - 2v_* - 4u_* + 1)^{1/2})(2u_*)^{-1}$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ Φ_3^0 сводится к КФ_3^0 с $u = 1 + (v_*^2 - 2v_* - 4u_* + 1)^{1/2} \geq 1$; если $v_*^2 - 2v_* - 4u_* = 0$ $(v_* \neq 2)$, то заменой (9) с $r_1 = u_*^{-1}$, $s_1 = -v_*(2u_*)^{-1}$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ Φ_3^0 сводится к КФ_1^0.

Замечание 6. Формы $\Phi_4^0 = \begin{pmatrix} u_* & 0 & 1 \\ 1 & v_* & 0 \end{pmatrix}$ с $u_* v_* \neq 0$, $R = 1 + u_* v_*^2$ и $\Phi_5^0 = \begin{pmatrix} 0 & u & 1 \\ 1 & v & 0 \end{pmatrix}$ с $uv \neq 0$, $R = 1 - uv \neq 0$, отсутствующие в списке, – неканонические по принципам 2, 3.

Форма Φ_4^0 с $u_* = u$, $v_* = -2u$ при $R > 0$ заменой (9) с $r_1 = (R + R^{1/2})(2u^3)^{-1} s_2^2$, $s_1 = -(1 + R^{1/2})(2u^2)^{-1} s_2$, $r_2 = (R + R^{1/2})(1 + R^{1/2})(4u^4)^{-1} s_2^2$ сводится к системе с коэффициентами $\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \widetilde{c}_2 = 0$, $\widetilde{a}_2 = -R^{3/2}(R^{1/2} + 1 + 2u^3)(2u^6)^{-1} s_2^3 \neq 0$, иначе $\widetilde{P}_2 \equiv 0$, что невозможно. При $s_2 = -2^{1/3} u^2 R^{-1/2}(R^{1/2} + 1 + 2u^3)^{-1/3}$ полученная система – КФ_2^0.

Форма Φ_4^0 с $u_* = u$, $v_* = v \neq -2u$ при $R > 0$ заменой (9) с $r_1 = 2(R + R^{1/2})(uv^2)^{-1} s_2^2$, $s_1 = (1 + R^{1/2})(uv)^{-1} s_2$, $r_2 = (R + R^{1/2})(1 + R^{1/2})(uv)^{-2} s_2^2$ сводится к системе с $\widetilde{a}_2 = s_*(uv)^{-3} s_2^3$, где $s_* = R((uv^2 - 2u^2 v + 4)(R^{1/2} + 1) + 2uv^2)$, $\widetilde{b}_2, \widetilde{c}_2 = 0$, при этом $s_* \neq 0$, иначе $\widetilde{P}_2 \equiv 0$, что невозможно. При $s_2 = uv s_*^{-1/3}$ полученная система является Φ_2^0 с $u_* = u(2u + v)(R + R^{1/2}) s_*^{-2/3} \neq 0$, $v_* = (2u + v)(1 + R^{1/2}) s_*^{-1/3} \neq 0$.

Форма Φ_4^0 с $u_*=u,\ v_*=-2u$ при $R<0$ заменой (9) с $r_1=(u+t^2)(2(u^2-ut^2+t))^{-1}$, $s_1=|2(u^2-ut^2+t)|^{-1/2},\ r_2=(1-2tu)(2(u^2-ut^2+t))^{-1},\ s_2=t|2(u^2-ut^2+t)|^{-1/2}$, где t – вещественный корень кубического многочлена $t^3+6u^2t^2-3ut+2u^3+1$, сводится к КФ$_6^0$ с $u=-1/2,\ \sigma=\mathrm{sign}(u^2-ut^2+t)=1$.

Форма Φ_4^0 с $u_*=u,\ v_*=v\neq-2u$ при $R<0$ заменой (9) с $r_1=(u+t^2)(vt^2+2t-uv)^{-1},\ s_1=|vt^2+2t-uv|^{-1/2},\ r_2=(1+tv)(vt^2+2t-uv)^{-1},\ s_2=t|vt^2+2t-uv|^{-1/2}$, где t – вещественный корень кубического многочлена $t^3+(v-u)vt^2+(u+2v)t-u^2v+1$, сводится к системе вида

$$\begin{pmatrix}u_* & v_* & \sigma\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{22}$$

с $u_*=(ut^2-t+u^2+uv)(vt^2+2t-uv)^{-1}<0,\ v_*=(2u+v)|vt^2+2t-uv|^{-1/2}\neq0$, $\sigma=\mathrm{sign}\,(vt^2+2t-uv)$.

1) $v_*^2+4\sigma_*(1-u_*)\geq0$. Если $4\sigma_*u_*-2\sigma_*-v_*^2-|v_*|(v_*^2+4\sigma_*(1-u_*))^{1/2}\neq0$, то система (22) заменой (9) с $r_1=1,\ s_1=2\sigma_*(4\sigma_*u_*-2\sigma_*-v_*^2-|v_*|(v_*^2+4\sigma_*(1-u_*))^{1/2})^{-1}$, $r_2=0,\ s_2=(-v_*-(v_*^2+4\sigma_*(1-u_*))^{1/2}\mathrm{sign}\,v_*)(4\sigma_*u_*-2\sigma_*-v_*^2-|v_*|(v_*^2+4\sigma_*(1-u_*))^{1/2})^{-1}$ сводится к КФ$_8^0$ с $u=u_*,\ v=2\sigma_*(4\sigma_*u_*-2\sigma_*-v_*^2-|v_*|(v_*^2+4\sigma_*(1-u_*))^{1/2})^{-1}$. А если $4\sigma_*u_*-2\sigma_*-v_*^2-|v_*|(v_*^2+4\sigma_*(1-u_*))^{1/2}=0$ (например, $\sigma_*=1,u_*=1,v_*=\pm1$), то система (22) заменой (9) с $r_1=1,\ s_1=u_*^{-1},\ r_2=(-v_*-(v_*^2+4\sigma_*(1-u_*))^{1/2}\mathrm{sign}\,v_*)(2\sigma_*)^{-1}$, $r_2=0$ сводится к КФ$_3^0$ с $u=u_*^{-1}$.

2) $v_*^2+4\sigma_*(1-u_*)<0$. Заменой (9) с $r_1=1,\ s_1=v_*|u_*v_*^2-\sigma_*(2u_*-1)^2|^{-1/2}$, $r_2=0,\ s_2=(1-2u_*)|u_*v_*^2-\sigma(2u_*-1)^2|^{-1/2}$ система (22) сводится к КФ$_9^0$ с $u=u_*$, $\sigma=-\mathrm{sign}\,(u_*v_*^2-\sigma_*(2u_*-1)^2),\ v=v_*|u_*v_*^2-\sigma_*(2u_*-1)^2|^{-1/2}$, причем $u_*v_*^2\neq\sigma_*(2u_*-1)^2$, иначе $v_*^2+4\sigma_*(1-u_*)\geq0$.

Форма Φ_5^0 при $u\neq v$ заменой (9) с $r_1=v(v-u^2)s_*^{-2/3},\ s_1=us_*^{-1/3},\ r_2=u(u-v^2)s_*^{-2/3}$, $s_2=-vs_*^{-1/3}$, где $s_*=(uv-1)(v-u)(u^2+uv+v^2)\neq0$, сводится к Φ_4^0 с $u_*=uv(1-uv)s_*^{-2/3}$, $v_*=(u^3-2uv+v^3)s_*^{-2/3}$. А при $u=v=u_*$ заменой (9) с $r_1,r_2=-1/2,\ s_1=|2u_*-2|^{-1/2}$, $s_2=-s_1$ форма Φ_5^0 сводится к КФ$_5^0$ с $u=-(u_*+1)/2,\ \sigma=\mathrm{sign}\,(u_*-1)$.

В теореме 1 все линейные неособые замены (9) приведены в явном виде. Поэтому условия, гарантирующие сведение системы (2) к соответствующей КФ$_i^1$, можно записать непосредственно через коэффициенты системы (2).

При $R=\delta_{ac}^2-4\delta_{ab}\delta_{bc}>0$ положим

$$\widetilde{a}_1=\begin{cases}P_1(t_1^*,1)-t_2^*P_2(t_1^*,1),\ \text{если}\ \delta_{ab}\neq0,\\ a_1+b_2,\ \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2\neq0,\\ 1,\quad \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2=0,\\ a_1,\quad \text{если}\ b_1,b_2=0,\end{cases}\qquad \widetilde{a}_2=\begin{cases}t_1^*P_2(t_1^*,1)-P_1(t_1^*,1),\ \text{если}\ \delta_{ab}\neq0,\\ 1,\quad \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2\neq0,\\ 0,\quad \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2=0,\\ a_2,\quad \text{если}\ b_1,b_2=0,\end{cases}$$

$$\widetilde{c}_1=\begin{cases}P_1(t_2^*,1)-t_2^*P_2(t_2^*,1),\ \text{если}\ \delta_{ab}\neq0,\\ a_1b_2^2-2b_1a_2b_2+a_2^2c_1-b_2^3+a_2b_2c_2,\\ \qquad \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2\neq0,\\ (a_1c_1-b_1^2+b_1c_2)c_2^{-2},\\ \qquad \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2=0,\\ c_1,\quad \text{если}\ b_1,b_2=0,\end{cases}\qquad \widetilde{c}_2=\begin{cases}t_1^*P_2(t_2^*,1)-P_1(t_2^*,1),\ \text{если}\ \delta_{ab}\neq0,\\ 1,\quad \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2\neq0,\\ 1,\quad \text{если}\ \delta_{ab}=0,\ \delta_{bc}\neq0,\ a_2=0,\\ c_2,\quad \text{если}\ b_1,b_2=0,\end{cases} \tag{23}$$

где $t_1^* = (-\delta_{ac} + R^{1/2})(2\delta_{ab})^{-1}$, $t_2^* = (-\delta_{ac} - R^{1/2})(2\delta_{ab})^{-1}$, а при $R < 0$ положим

$$
\begin{gathered}
\widetilde{a}_1 = \left[\begin{array}{l} a_2 r_*^2 + 2b_2 r_* + c_2, \quad \text{если } a_2 \neq 0, \\ \qquad a_1, \quad \text{если } a_2 = 0, \end{array}\right. \\
\widetilde{b}_1 = \left[\begin{array}{l} -a_2 r_* - b_2, \quad \text{если } a_2 \neq 0, \\ b_1, \quad \text{если } a_2 = 0, \end{array}\right. \quad
\widetilde{b}_2 = \left[\begin{array}{l} b_1 + a_1 r_* - b_2 r_* - a_2 r_*^2, \quad \text{если } a_2 \neq 0, \\ b_2, \quad \text{если } a_2 = 0, \end{array}\right. \\
\widetilde{c}_1 = \left[\begin{array}{l} a_2, \quad \text{если } a_2 \neq 0, \\ c_1, \quad \text{если } a_2 = 0, \end{array}\right. \qquad
\widetilde{c}_2 = \left[\begin{array}{l} a_2 r_* - a_1, \quad \text{если } a_2 \neq 0, \\ c_2, \quad \text{если } a_2 = 0, \end{array}\right.
\end{gathered} \tag{24}
$$

где r_* – это вещественный нуль кубического многочлена $a_2 r_1^3 + (2b_2 - a_1) r_1^2 + (c_2 - 2b_1) r_1 - c_1$.

Следствие 1. *Система (2), в которой* $R = \delta_{ac}^2 - 4\delta_{ab}\delta_{bc} \neq 0$, *линейной неособой заменой (9) сводится к* $K\varPhi_i^0$ $(i = \overline{1,10})$, *если шесть коэффициентов системы:* a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$ *удовлетворяют условиям:*

$K\varPhi_1^0$: $R > 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{c}_2 \neq 0$, $\widetilde{a}_2, \widetilde{c}_1 = 0$;

$K\varPhi_2^0$: $R > 0$, $\widetilde{a}_1, \widetilde{c}_2 = 0$;

$K\varPhi_3^0$: *1)* $R > 0$, $0 \neq \widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2^{-2} \leq 1/4$, $\widetilde{a}_2 = 0$, *тогда* $u = 1 + (1 - 4\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2^{-2})^{1/2} \geq 1$; *2)* $R > 0$, $0 \neq \widetilde{a}_2\widetilde{c}_2\widetilde{a}_1^{-2} \leq 1/4$, $\widetilde{c}_1 = 0$, *тогда* $u = 1 + (1 - 4\widetilde{a}_2\widetilde{c}_2\widetilde{a}_1^{-2})^{1/2} \geq 1$;

$K\varPhi_4^0$: *1)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2^{-2} > 1/4$, $\widetilde{a}_2 = 0$, *тогда* $u = \widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2^{-2} > 1/4$; *2)* $R > 0$, $\widetilde{a}_2\widetilde{c}_2\widetilde{a}_1^{-2} > 1/4$, $\widetilde{c}_1 = 0$, *тогда* $u = \widetilde{a}_2\widetilde{c}_2\widetilde{a}_1^{-2} > 1/4$;

$K\varPhi_5^0$: *1)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1^{1/3} = \widetilde{a}_2^{1/3}\widetilde{c}_2 \neq 0$, *тогда* $u = (\widetilde{a}_1^2 + \widetilde{a}_2\widetilde{c}_2)(2\widetilde{a}_1^2 - 2\widetilde{a}_2\widetilde{c}_2)^{-1} \neq 0; \pm 1/2$, $\sigma = \operatorname{sign} u$; *2)* $R < 0$, $(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2)\widetilde{c}_2 - 2\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2 = 0$, *тогда* $u = \widetilde{a}_1(2\widetilde{b}_2)^{-1} \neq 0$; $\sigma = -\operatorname{sign} u$;

$K\varPhi_6^0$: *1)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1 = 0$, $\widetilde{c}_2 \neq 0$, *тогда* $u = \widetilde{c}_2(\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1^2)^{-1/3} \neq 0$; *2)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1 \neq 0$, $\widetilde{c}_2 = 0$, *тогда* $u = \widetilde{a}_1(\widetilde{a}_2^2\widetilde{c}_1)^{-1/3} \neq 0$;

$K\varPhi_7^0$: *1)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2 \neq 0$, $\widetilde{a}_1^2 + \widetilde{a}_2\widetilde{c}_2 = 0$, *тогда* $u = 2\widetilde{a}_1(\widetilde{a}_1^3 + \widetilde{a}_2^2\widetilde{c}_1)^{-1/3} \neq 0$; *2)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2 \neq 0$, $\widetilde{c}_2^2 + \widetilde{a}_1\widetilde{c}_1 = 0$, *тогда* $u = 2\widetilde{c}_2(\widetilde{c}_2^3 + \widetilde{c}_1^2\widetilde{a}_2)^{-1/3} \neq 0$;

$K\varPhi_8^0$: *1)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2 \neq 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1^{1/3} \neq \widetilde{a}_2^{1/3}\widetilde{c}_2$, $\widetilde{a}_1^2 + \widetilde{a}_2\widetilde{c}_2 \neq 0$, $\widetilde{c}_2^2 + \widetilde{a}_1\widetilde{c}_1 \neq 0$, $\delta_{\widetilde{a}\widetilde{c}} \neq 0$, *выполнено условие* (17_1) *для многочленов* $Q_1(t), Q_2(t)$ *из (15), в которых* $u = u_* = \widetilde{a}_1(\widetilde{a}_2^2\widetilde{c}_1)^{-1/3}$, $v = v_* = \widetilde{c}_2(\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1^2)^{-1/3}$, *тогда в* $K\varPhi_8^0$ $u = (u_* t_1'^2 - t_1'^2 t_1'' - v_* t_1'' + 1)(2(t_1'^2 t_1'' + v_* t_1' - u_* t_1' t_1'' - 1))^{-1} \neq 0$, $v = (u_* t_1''^2 - t_1' t_1''^2 - v_* t_1' + 1)(2(t_1' t_1''^2 - u_* t_1' t_1'' + v_* t_1'' - 1))^{-1} \neq 0$; *2)* $R < 0$, $(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2)\widetilde{c}_2 - 2\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2 \neq 0$, $d_* = (2\widetilde{b}_1 - \widetilde{c}_2)^2 + 4\widetilde{c}_1(2\widetilde{b}_2 - \widetilde{a}_1) \geq 0$, *тогда* $u = \widetilde{a}_1(2\widetilde{b}_2)^{-1} \neq 0$; $v = (4\widetilde{c}_1(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2) + 2\widetilde{b}_1(\widetilde{c}_2 - 2\widetilde{b}_1 + d_*^{1/2}\operatorname{sign}(\widetilde{c}_2 - 2\widetilde{b}_1)))^{-1}(4\widetilde{c}_1\widetilde{b}_2 + \widetilde{c}_2^2 - 2\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2 + \widetilde{c}_2 d_*^{1/2}\operatorname{sign}(\widetilde{c}_2 - 2\widetilde{b}_1)) \neq 0$;

$K\varPhi_9^0$: *1)* $R > 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2 \neq 0$, $\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1^{1/3} \neq \widetilde{a}_2^{1/3}\widetilde{c}_2$, $\widetilde{a}_1^2 + \widetilde{a}_2\widetilde{c}_2 \neq 0$, $\widetilde{c}_2^2 + \widetilde{a}_1\widetilde{c}_1 \neq 0$, $\delta_{\widetilde{a}\widetilde{c}} \neq 0$, *выполнено условие* (17_2) *для многочленов* $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ *из (15), в которых* $u = u_* = \widetilde{a}_1(\widetilde{a}_2^2\widetilde{c}_1)^{-1/3}$, $v = v_* = \widetilde{c}_2(\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1^2)^{-1/3}$, *тогда в* $K\varPhi_9^0$ $u = (t_2 - u_*)(1 - t_2 v_*)(2t_2(u_* v_* - 1))^{-1} \neq 0$, $v = (u_* t_2 + v_*)|2t_2(u_* v_* - 1)|^{-1/2} \neq 0$, $\sigma = -\operatorname{sign}(t_2(u_* v_* - 1))$; *2)* $R < 0$, $(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2)\widetilde{c}_2 - 2\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2 \neq 0$, $d_* = (2\widetilde{b}_1 - \widetilde{c}_2)^2 + 4\widetilde{c}_1(2\widetilde{b}_2 - \widetilde{a}_1) < 0$, $\widetilde{a}_1 \neq \widetilde{b}_2$, *тогда* $u = \widetilde{a}_1(2\widetilde{b}_2)^{-1} \neq 0; 1/2$, $\sigma = -\operatorname{sign} u$, $v = (2\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2 - (\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2)\widetilde{c}_2)|2\widetilde{b}_2((\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2)(\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1 + \widetilde{b}_1\widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_1\widetilde{b}_2) - \widetilde{a}_1\widetilde{b}_1^2)|^{-1/2} \neq 0$;

$K\varPhi_{10}^0$: $R < 0$, $(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_2)\widetilde{c}_2 - 2\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2 \neq 0$, $d_* = (2\widetilde{b}_1 - \widetilde{c}_2)^2 + 4\widetilde{c}_1(2\widetilde{b}_2 - \widetilde{a}_1) < 0$, $\widetilde{a}_1 = \widetilde{b}_2$, *тогда* $u = 2^{3/2}|\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1|(4\delta_{\widetilde{a}\widetilde{b}}\delta_{\widetilde{b}\widetilde{c}} - \delta_{\widetilde{a}\widetilde{c}}^2)^{-1/2}$, *причем* $0 < u < \sqrt{2}$.

Здесь при $R > 0$ *коэффициенты матрицы (18)* $\widetilde{a}_1, \widetilde{c}_1, \widetilde{a}_2, \widetilde{c}_2$ *определены в (23), а при* $R < 0$ *коэффициенты матрицы (20)* $\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1, \widetilde{c}_1, \widetilde{b}_2, \widetilde{c}_2$ *определены в (24).*

5 Канонические формы системы (2) в случае $\mathbf{l=1}$

5.1 Линейная эквивалентность систем при $\mathbf{l=1}$

Система (2) $\dot{x} = P(x)$ при $l = 1$ записывается в следующем виде

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = P_0(x) \begin{pmatrix} p_1x_1 + q_1x_2 \\ p_2x_1 + q_2x_2 \end{pmatrix} = \big\langle (\alpha, \beta),\, x \big\rangle Hx \not\equiv 0 \qquad (\delta_{pq} \neq 0), \tag{25}$$

т. е. в системе (25) общий множитель $P_0 = \alpha x_1 + \beta x_2 \not\equiv 0$, матрица $H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$.

Поэтому собственные числа матрицы H отличны от нуля и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sqrt{D})/2, \tag{26}$$

где $D = (p_1 + q_2)^2 - 4\delta_{pq} = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$

Предложение 2. *В целях нормировки один из ненулевых коэффициентов общего множителя P_0 в системе (25) можно сделать равным единице. Договоримся, что если $\alpha \neq 0$, то $\alpha = 1$, а если $\alpha = 0$, то $\beta = 1$.*

Пусть замена (9) $x = Ly$ $(\det L = \delta \neq 0)$ переводит систему (2) вида (25) в систему (10) $\dot{y} = \widetilde{P}(y)$. Положим

$$(\widetilde{\alpha},\ \widetilde{\beta}) = (\alpha,\ \beta)L, \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}_1 & \widetilde{q}_1 \\ \widetilde{p}_2 & \widetilde{q}_2 \end{pmatrix} = L^{-1}HL \qquad (\delta_{\widetilde{p}\widetilde{q}} = \det \widetilde{H} = \delta_{pq}), \tag{27}$$

т. е. $\widetilde{\alpha} = \alpha r_1 + \beta r_2,\ \widetilde{\beta} = \alpha s_1 + \beta s_2,\ \ \widetilde{H} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix}$

Кроме того, в силу ассоциативности матричного произведения имеем:

$$\big\langle (\alpha, \beta),\, Ly \big\rangle = \big\langle (\alpha, \beta)L,\, y \big\rangle. \tag{28}$$

Теорема 2. *Система (10), полученная из системы (2) вида (25) при помощи линейной неособой замены (9), имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \\ \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} = \widetilde{P}_0(y) \begin{pmatrix} \widetilde{p}_1y_1 + \widetilde{q}_1y_2 \\ \widetilde{p}_2y_1 + \widetilde{q}_2y_2 \end{pmatrix} = \big\langle (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}),\, y \big\rangle\, \widetilde{H}y \quad (\widetilde{P}_0 \not\equiv 0), \tag{29}$$

где коэффициенты многочлена $\widetilde{P}_0 = \widetilde{\alpha}y_1 + \widetilde{\beta}y_2$ и матрица $\widetilde{H}$ введены в (27).

Тем самым, случай $l = 1$ инвариантен относительно замены (9).

Доказательство. Формула (29) вытекает из следующих равенств:

$$\widetilde{P}(y) \overset{(11)}{=} L^{-1}P(Ly) \overset{(25)}{=} L^{-1}\big\langle (\alpha, \beta),\, Ly \big\rangle\, HLy \overset{(28)}{=} \big\langle (\alpha, \beta)L, y \big\rangle\, L^{-1}HLy \overset{(27)}{=} \big\langle (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}),\, y \big\rangle\, \widetilde{H}y.$$

При этом условие $\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2 \neq 0$ равносильно тому, что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, так как $\delta_{rs} \neq 0$. □

5.2 Построение канонических форм в случае $\mathbf{l=1}$

Не уменьшая общности, будем считать, что в системе (25) $\alpha \neq 0$, так как если $\alpha = 0$, то сделаем перенумерацию (14), получая систему (29) вида $\begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \\ \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} = \beta y_1 \begin{pmatrix} q_2 y_1 + p_2 y_2 \\ q_1 y_1 + p_1 y_2 \end{pmatrix}$.

Теперь, следуя предложению 2, сделаем $\alpha = 1$, т. е. в системе (25) всегда общий множитель $P_0 = x_1 + \beta x_2$.

Для упрощения системы (25) будем выбирать сначала такую замену (9), которая сводит матрицу H к жордановой форме $\widetilde{H}$ в системе (29).

Вид замены, очевидно, зависит от знака дискриминанта $D = (p_1 + q_2)^2 - 4\delta_{pq}$ из формулы (26) для собственных чисел $\lambda_{1,2} \neq 0$ матрицы H.

Затем в системе (29) с жордановой матрицей $\widetilde{H}$ будем делать произвольную замену (9) и подбирать ее коэффициенты так, чтобы полученная система оказалась наиболее простой в смысле определения 7 – канонической формой (КФ^2).

Все элементы полученной системы будем отмечать символом $\breve{}$. При этом аналогично (27) коэффициенты $\breve{P}_0$ имеют вид

$$\breve{\alpha} = \widetilde{\alpha} r_1 + \widetilde{\beta} r_2, \quad \breve{\beta} = \widetilde{\alpha} s_1 + \widetilde{\beta} s_2. \tag{30}$$

СПИСОК канонических форм системы (2) в случае $l = 1$:

$$\text{КФ}_1^1 = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{КФ}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\text{КФ}_3^1 = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}_5^1 = \begin{pmatrix} u & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где в КФ$_1^1$ $u \neq 0$, в КФ$_2^1$ $\sigma = \pm 1$, в КФ$_3^1$ $0 < |u| < 1$ или $u = 1$, в КФ$_5^1$ $0 < u < 2$.

Теорема 3. *В случае $l = 1$ система (2) вида (25) линейной неособой заменой (9) сводится к одной из пяти линейно неэквивалентных КФ^1.*

Доказательство.

1) $D > 0$, т. е. в (26) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, вещественны и различны. А точнее,

$$\lambda_1 = (p_1 + q_2 + \sigma_* \sqrt{D})/2, \quad \lambda_2 = (p_1 + q_2 - \sigma_* \sqrt{D})/2, \quad \lambda_* = p_1 - q_2 + \sigma_* \sqrt{D},$$

где $\sigma_* = \{\, \mathrm{sign}\,(p_1 - q_2) \text{ при } p_1 \neq q_2;\ 1 \text{ при } p_1 = q_2 \,\}$, тогда $\lambda_* \neq 0$.

Замена (9) с $L = \begin{pmatrix} \lambda_* & 2q_1 \\ 2p_2 & -\lambda_* \end{pmatrix}$ сводит систему (25) к системе (29) вида

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}\lambda_1 & \widetilde{\beta}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\alpha}\lambda_2 & \widetilde{\beta}\lambda_2 \end{pmatrix} \text{ с } \widetilde{\alpha} = 2\beta p_2 + \lambda_*, \ \ \widetilde{\beta} = 2q_1 - \beta\lambda_*, \ \ \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Теперь произвольная замена (9) сводит систему (31) к системе

$$\delta^{-1} \begin{pmatrix} \breve{\alpha}(\lambda_1 r_1 s_2 - \lambda_2 r_2 s_1) & \breve{\alpha}(\lambda_1 - \lambda_2) s_1 s_2 + \breve{\beta}(\lambda_1 r_1 s_2 - \lambda_2 r_2 s_1) & \breve{\beta}(\lambda_1 - \lambda_2) s_1 s_2 \\ \breve{\alpha}(\lambda_2 - \lambda_1) r_1 r_2 & \breve{\alpha}(\lambda_2 r_1 s_2 - \lambda_1 r_2 s_1) + \breve{\beta}(\lambda_2 - \lambda_1) r_1 r_2 & \breve{\beta}(\lambda_2 r_1 s_2 - \lambda_1 r_2 s_1) \end{pmatrix} \tag{32}$$

с $(\breve\alpha,\,\breve\beta)$ из (30) и $\breve H=\delta^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1r_1s_2-\lambda_2r_2s_1 & (\lambda_1-\lambda_2)s_1s_2\\ -(\lambda_1-\lambda_2)r_1r_2 & \lambda_2r_1s_2-\lambda_1r_2s_1\end{pmatrix}$.

1₁) $\widetilde\alpha=0$ $(\widetilde\beta\neq0)$. Тогда $\breve\beta=0$ при $s_2=0$ и система (32) принимает вид $\begin{pmatrix}\lambda_2\widetilde\beta r_2 & 0 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_2)\widetilde\beta r_1r_2s_1^{-1} & \lambda_1\widetilde\beta r_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=0,$ $s_1=1,$ $r_2=(\lambda_1)^{-1}\widetilde\beta$ эта система является КФ$_1^1$ с $u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq0,1.$

1₂) $\widetilde\beta=0$ $(\widetilde\alpha\neq0)$. Тогда $\breve\beta=0$ при $s_1=0$ и система (32) принимает вид $\begin{pmatrix}\widetilde\alpha\lambda_1r_1 & 0 & 0\\ \widetilde\alpha(\lambda_2-\lambda_1)r_1r_2s_2^{-1} & \widetilde\alpha\lambda_2r_1 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=(\widetilde\alpha\lambda_2)^{-1},$ $r_2=0,$ $s_2=1$ эта система является КФ$_1^1$ с $u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq0,1.$

1₃) $\widetilde\alpha,\,\widetilde\beta\neq0$. Тогда $\breve\beta=0$ при $s_2=-\widetilde\alpha\widetilde\beta^{-1}s_1$ и система (32) принимает вид

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\widetilde\alpha r_1+\lambda_2\widetilde\beta r_2 & (\lambda_1-\lambda_2)\widetilde\alpha s_1 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_2)\widetilde\beta r_1r_2s_1^{-1} & \lambda_2\widetilde\alpha r_1+\lambda_1\widetilde\beta r_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{33}$$

1_3^1) $\lambda_1=-\lambda_2$, тогда в системе (33) $\breve a_1=-\breve b_2/2=\lambda_1(\widetilde\alpha r_1-\widetilde\beta r_2)$, поэтому при $r_1,s_1=(2\lambda_1\widetilde\alpha)^{-1},$ $r_2=(2\lambda_1\widetilde\beta)^{-1}$ она является КФ$_2^1$ с $\sigma=1.$

1_3^2) $\lambda_1\neq-\lambda_2$, тогда система (33) при $r_1=(\lambda_2\widetilde\alpha)^{-1},$ $s_1=((\lambda_1-\lambda_2)\widetilde\alpha)^{-1},$ $r_2=0$ является КФ$_3^1$ с $u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq0,\pm1$. А при $r_1=0,$ $s_1=((\lambda_1-\lambda_2)\widetilde\alpha)^{-1},$ $r_2=(\lambda_1\widetilde\beta)^{-1}$ она является КФ$_3^1$ с $u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq0,\pm1.$

Поэтому, выбирая нужную замену, всегда можно получить $0<|u|<1.$

2) $D=0,$ т. е. в (26) $\lambda=\lambda_{1,2}=(p_1+q_2)/2\neq0.$

2₁) $q_1\neq0.$ Замена $\begin{pmatrix}0 & 2q_1\\ 2 & q_2-p_1\end{pmatrix}$ сводит систему (25) к системе (29) вида

$$\begin{pmatrix}\lambda\widetilde\alpha & \lambda\widetilde\beta & 0\\ \widetilde\alpha & \lambda\widetilde\alpha+\widetilde\beta & \lambda\widetilde\beta\end{pmatrix}\quad\text{с}\quad \widetilde\alpha=2\beta,\ \ \widetilde\beta=\beta q_2-\beta p_1+2q_1,\ \ \widetilde H=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}. \tag{34}$$

2_1^1) $\widetilde\beta=0$ $(\widetilde\alpha\neq0)$. Тогда нормировка (13) с $r_1=(\widetilde\alpha\lambda)^{-1},$ $s_2=\widetilde\alpha^{-1}\lambda^{-2}$ сводит систему (34) к КФ$_4^1$.

2_1^2) $\widetilde\beta\neq0.$ Тогда произвольная замена (9) сводит (34) к системе

$$\delta^{-1}\begin{pmatrix}\breve\alpha(\lambda\delta-r_1s_1) & \breve\beta(\lambda\delta-r_1s_1)-\breve\alpha s_1^2 & -\breve\beta s_1^2\\ \breve\alpha r_1^2 & \breve\alpha(\lambda\delta+r_1s_1)+\breve\beta r_1^2 & \breve\beta(\lambda\delta+r_1s_1)\end{pmatrix}, \tag{35}$$

в которой $(\breve\alpha,\breve\beta)$ из (30), а $\breve H=\delta^{-1}\begin{pmatrix}\lambda\delta-r_1s_1 & -s_1^2\\ r_1^2 & \lambda\delta+r_1s_1\end{pmatrix}.$

В системе (35) сделаем $\breve\beta=0$, для чего положим $s_2=-\widetilde\alpha\widetilde\beta^{-1}s_1$, тогда (35) примет вид $\begin{pmatrix}(\widetilde\alpha\lambda+\widetilde\beta)r_1+\widetilde\beta\lambda r_2 & \widetilde\beta s_1 & 0\\ -\widetilde\beta r_1^2s_1^{-1} & (\widetilde\alpha\lambda-\widetilde\beta)r_1+\widetilde\beta\lambda r_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=0,$ $s_1=\widetilde\beta^{-1},$ $r_2=(\widetilde\beta\lambda)^{-1}$ – это КФ$_3^1$ с $u=1.$

$\mathbf{2_2}$) $q_1 = 0$. Тогда в (26) $\lambda = p_1 = q_2 \neq 0$.

$\mathbf{2_2^1}$) $p_2 = 0$, т. е. в (25) $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}$. Произвольная замена (9) сводит (25) к системе $\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} p_1 & \widetilde{\beta} p_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\alpha} p_1 & \widetilde{\beta} p_1 \end{pmatrix}$ с $\widetilde{\alpha} = r_1 + \beta r_2$, $\widetilde{\beta} = s_1 + \beta s_2$, $\widetilde{H} = H$. При $r_1 = p_1^{-1}$, $s_1 = -\beta$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ – это КФ$_1^1$ с $u = 1$.

$\mathbf{2_2^2}$) $p_2 \neq 0$, т. е. в (25) $H = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}$. Нормировка (13) с $r_1 = 1$, $s_2 = p_2$ сводит (25) к системе (34) из 2_1), но с $\widetilde{\alpha} = 1$, $\widetilde{\beta} = \beta p_2$ и $\lambda = p_1$.

$\mathbf{3}$) $D < 0$, т. е. собственные числа λ_1, λ_2 в H – комплексно-сопряженные и $p_2 q_1 < 0$.

Замена $\begin{pmatrix} \sqrt{-D} & p_1 - q_2 \\ 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$ сводит систему (25) к системе (29) вида

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} p_* & \widetilde{\alpha} q_* + \widetilde{\beta} p_* & \widetilde{\beta} q_* \\ -\widetilde{\alpha} q_* & \widetilde{\alpha} p_* - \widetilde{\beta} q_* & \widetilde{\beta} p_* \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad \widetilde{\alpha} = \sqrt{-D} \neq 0, \quad \widetilde{\beta} = p_1 - q_2 + 2\beta p_2, \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} p_* & q_* \\ -q_* & p_* \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $p_* = (p_1 + q_2)/2 \, (= \operatorname{Re} \lambda_1)$, $q_* = -\sqrt{-D}/2 \, (= -\operatorname{Im} \lambda_1) < 0$.

Теперь произвольная замена (9) сводит систему (36) к системе

$$\delta^{-1} \begin{pmatrix} \breve{\alpha}(p_* \delta + q_* \delta_0) & \breve{\alpha} q_* s_0 + \breve{\beta}(p_* \delta + q_* \delta_0) & \breve{\beta} q_* s_0 \\ -\breve{\alpha} q_* r_0 & \breve{\alpha}(p_* \delta - q_* \delta_0) - \breve{\beta} q_* r_0 & \breve{\beta}(p_* \delta - q_* \delta_0) \end{pmatrix}, \tag{37}$$

в которой $(\breve{\alpha}, \breve{\beta})$ из (30), матрица $\breve{H} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} p_* \delta + q_* \delta_0 & q_* s_0 \\ -q_* r_0 & p_* \delta - q_* \delta_0 \end{pmatrix}$, где $\delta_0 = r_1 s_1 + r_2 s_2$, $r_0 = r_1^2 + r_2^2$, $s_0 = s_1^2 + s_2^2$.

В системе (37) $\breve{\beta} = 0$ при $s_1 = -\widetilde{\alpha}^{-1} \widetilde{\beta} s_2$ и (37) принимает вид

$$\begin{pmatrix} (\widetilde{\alpha} p_* - \widetilde{\beta} q_*) r_1 + (\widetilde{\alpha} q_* + \widetilde{\beta} p_*) r_2 & \widetilde{\alpha}^{-1}(\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2) q_* s_2 & 0 \\ -\widetilde{\alpha}(r_1^2 + r_2^2) q_* s_2^{-1} & (\widetilde{\alpha} p_* + \widetilde{\beta} q_*) r_1 - (\widetilde{\alpha} q_* - \widetilde{\beta} p_*) r_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{3_1}$) $p_* \neq 0$. Тогда при $r_1 = \dfrac{(\widetilde{\alpha} q_* - \widetilde{\beta} p_*) \operatorname{sign} p_*}{q_*(\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2)(p_*^2 + q_*^2)^{1/2}}$, $r_2 = \dfrac{(\widetilde{\alpha} p_* + \widetilde{\beta} q_*) \operatorname{sign} p_*}{q_*(\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2)(p_*^2 + q_*^2)^{1/2}}$, $s_1 = \dfrac{\widetilde{\beta}}{q_*(\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2)}$, $s_2 = -\dfrac{\widetilde{\alpha}}{q_*(\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2)}$, – это КФ$_5^1$ с $u = 2|p_*|(p_*^2 + q_*^2)^{-1/2}$ $(0 < u < 2)$, $\sigma = -1$.

$\mathbf{3_2}$) $p_* = 0$. Тогда при той же замене полученная система – это КФ$_2^1$ с $\sigma = -1$. $\square$

Замечание 7. КФ$_3^1$ при $u = -1$ по принципу 2 канонической формой не является. Заменой (9) с $r_1, r_2, s_2 = 1$, $s_1 = 0$ она сводится к КФ$_2^1$ с $\sigma = 1$. А при $|u| > 1$, как было показано в теореме, она опять сводится к КФ$_3^1$, но с $0 < |u| < 1$.

Замечание 8. $КФ_5^1$ при $|u| \geq 2$ по принципу 3 канонической не является. При $u = u_*$ и $|u_*| = 2$ заменой (9) с $r_1 = u_*^{-1}$, $s_1 = 0$, $r_2 = 1 - u_*^{-1}$, $s_2 = -1$ она сводится к $КФ_3^1$ с $u = u_*^{-1}$. А при $|u_*| > 2$ заменой (9) с $r_1 = 2(u_* \pm (u_*^2 - 4)^{1/2})^{-1}$, $s_1 = 0$, $r_2 = 1$, $s_2 = -1$ она сводится к $КФ_3^1$ с $u = (u_* \mp (u_*^2 - 4))(u_* \pm (u_*^2 - 4)^{1/2})^{-1}$, причем $0 < |u| < 1$ за счет правильного выбора знака в замене. Также $КФ_5^1$ с $u = u_*$ при $-2 < u_* < 0$ заменой (13) с $r_1 = -1$, $s_2 = 1$ сводится к $КФ_5^1$ с $u = -u_*$.

Замечание 9. Формы $\Phi_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & u_* & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\Phi_2^1 = \begin{pmatrix} u_* & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ со структурой $КФ_5^1$, отсутствующие в списке, согласно принципу 3 каноническими не являются.

Форма Φ_1^1 при $u_* \geq -1/4$ заменой (9) с $r_1 = (1-(4u_*+1)^{1/2})(1+2u_*-(4u_*+1)^{1/2})^{-1}$, $s_1 = 0$, $r_2 = 2((4u_*+1)^{1/2} - 1 - 2u_*)^{-1}$, $s_2 = u_*^{-1}$ сводится к $КФ_3^1$ с $u = 2u_*((4u_*+1)^{1/2} - 1 - 2u_*)^{-1} \neq 0$; при $u_* < -1/4$ заменой (9) с $r_1 = -(-u_*)^{-1/2}$, $s_1 = 0$, $r_2 = (-u_*)^{-3/2}$, $s_2 = -u_*^{-1}$ сводится к системе вида $КФ_5^1$ с $u = -(-u_*)^{-1/2}$, причем $-2 < u < 0$.

Форма Φ_2^1 с $u = u_*$ заменой (9) с $r_1 = ((u_*^2 + 4)^{1/2} - u_*)/2$, $s_1 = 0$, $r_2 = -1$, $s_2 = 1$ сводится к системе вида $КФ_3^1$ с $u = u_*((u_*^2 + 4)^{1/2} - u_*)/2 - 1 < 0$.

Замечание 10. Форма $\Phi_3^1 = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – это $КФ_4^1$ при $u = 1$, а при $u \neq 1$ она не является канонической в силу принципа 2. Заменой (9) с $r_1, s_2 = 1$, $s_1 = 0$, $r_2 = (u-1)^{-1}$ Φ_3^1 сводится к $КФ_1^1$.

Замечание 11. Каждая $КФ_i^1$ $(i = \overline{1,5})$ при помощи перенумерации (14) сводится согласно определению 8 к $КФ_i^{1П}$.

В теореме 3 все линейные неособые замены (9) приведены в явном виде. Поэтому условия, гарантирующие сведение системы (2) к соответствующей $КФ_i^1$, можно записать непосредственно через коэффициенты системы (25).

Следствие 2. *Система (25), в которой* $p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$, *линейной неособой заменой (9) сводится к* $КФ_i^1$ $(i = \overline{1,5})$, *если пять параметров системы: коэффициент* β *многочлена* P_0 $(\alpha = 1)$ *и элементы* p_1, q_1, p_2, q_2 *матрицы* H *удовлетворяют условиям:*

$КФ_1^1$: 1) $D > 0$, $2\beta p_2 + p_1 - q_2 + \sigma_*\sqrt{D} = 0$, *тогда* $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2 \neq 0, 1$; *2)* $D > 0$, $2q_1 - \beta(p_1 - q_2 + \sigma_*\sqrt{D}) = 0$, *тогда* $u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 0, 1$; *3)* $D = 0, q_1 = 0, p_2 = 0$, *тогда* $u = 1$;

$КФ_2^1$: 1) $D > 0$, $p_1 + q_2 = 0$, $2\beta p_2 + 2p_1 + \sigma_*\sqrt{D}, 2q_1 - \beta(2p_1 + \sigma_*\sqrt{D}) \neq 0$, *тогда* $\sigma = 1$; *2)* $D < 0$, $p_1 + q_2 = 0$, *тогда* $\sigma = -1$;

$КФ_3^1$: 1) $D > 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$, $2\beta p_2 + p_1 - q_2 + \sigma_*\sqrt{D} \neq 0$, $2q_1 - \beta(p_1 - q_2 + \sigma_*\sqrt{D}) \neq 0$, *тогда* $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2$ *при* $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$ *при* $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, *т. е.* $0 < |u| < 1$; *2)* $D = 0$, $q_1 \neq 0$, $2q_1 - \beta p_1 + \beta q_2 \neq 0$, *тогда* $u = 1$; *3)* $D = 0$, $q_1 = 0$, $p_2 \neq 0$, $\beta \neq 0$, *тогда* $u = 1$;

$КФ_4^1$: 1) $D = 0$, $q_1 \neq 0$, $2q_1 - \beta p_1 + \beta q_2 = 0$; *2)* $D = 0$, $q_1 = 0$, $p_2 \neq 0$, $\beta = 0$;

$КФ_5^1$: $D < 0$, $p_1 + q_2 \neq 0$, *тогда* $u = |p_1 + q_2|(p_1q_2 - p_2q_1)^{-1/2}$, $0 < u < 2$.

Здесь $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$, $\lambda_1 = (p_1 + q_2 + \sigma_*\sqrt{D})/2 \neq 0$, $\lambda_2 = (p_1 + q_2 - \sigma_*\sqrt{D})/2 \neq 0$, $\sigma_* = \{\, \mathrm{sign}\,(p_1 - q_2)$ *при* $p_1 \neq q_2$; 1 *при* $p_1 = q_2 \,\}$.

6 Канонические формы системы (2) в случае $\mathbf{l} = \mathbf{2}$

6.1 Линейная эквивалентность систем при $\mathbf{l} = \mathbf{2}$

Утверждение 4. *Для системы (2) следующие условия равносильны:*

1) $l = 2$, 2) $\exists\, k : P_2 \equiv kP_1$ $(a_2 = ka_1,\, b_2 = kb_1,\, c_2 = kc_1)$, 3) $\delta_{ab}, \delta_{ac}, \delta_{bc} = 0$.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) по определению 5 и предложению 1 .

Очевидно, что 2) $\Rightarrow$ 3). Обратно, пусть выполнено 3), тогда, например, $a_1 \neq 0$. Положим $k = a_2/a_1$. Но $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, поэтому $b_2 = kb_1$. Аналогично $c_2 = kc_1$. $\Box$

Утверждение 5. *Для системы (2) условие* $P_2(x) \equiv 0$ *инвариантно относительно любой замены (9) с* $r_2 = 0$.

Доказательство. Сделаем в системе (2) с $P_2 \equiv 0$ любую замену (9). Согласно (12) в полученной системе (10)

$$\widetilde{A} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} s_2 P_1(r_1, r_2) & s_2(a_1 r_1 s_1 + b_1 \delta_* + c_1 r_2 s_2) & s_2 P_1(s_1, s_2) \\ -r_2 P_1(r_1, r_2) & -r_2(a_1 r_1 s_1 + b_1 \delta_* + c_1 r_2 s_2) & -r_2 P_1(s_1, s_2) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Если $\widetilde{P}_2 \equiv 0$, то $r_2 = 0$, так как в противном случае обращаются в нуль общие множители, входящие в $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$, т. е. $\widetilde{P}_1 \equiv 0$. Если же $r_2 = 0$, то в (38) $\widetilde{P}_2 \equiv 0$. $\Box$

Утверждение 6. *Любая замена (9) с* $r_2 = -s_2 \neq 0$ *преобразует систему (2) с* $P_2(x) \equiv 0$ *в систему* (10) *с* $\widetilde{P}_1 \equiv \widetilde{P}_2$.

Утверждение 6 немедленно вытекает из формулы (38).

В силу утверждения 4 при $l = 2$ найдется такое k, что в (2) $P_2 = kP_1$. Поэтому система (2) записывается в одном из следующих двух видов.

$$I)\ b_1 \geq a_1 c_1 : \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = (\alpha x_1 + \beta x_2) \begin{pmatrix} p_1 x_1 + q_1 x_2 \\ kp_1 x_1 + kq_1 x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \\ p_1^2 + q_1^2 \neq 0 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

т. е. $H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ kp_1 & kq_1 \end{pmatrix}$ и имеет собственные числа $\lambda_1 = p_1 + kq_1$, $\lambda_2 = 0$. Тем самым, (39) – это система (25) из случая $l = 1$, в которой $p_2 = kp_1$, $q_2 = kq_2$ и $\det H = \delta_{pq} = 0$.

Следуя предложению 2, будем считать, что в системе (39), если $\alpha \neq 0$, то $\alpha = 1$ и $P_0 = x_1 + \beta x_2$, а если $\alpha = 0$, то $\beta = 1$ и $P_0 = x_2$.

$$II)\ b_1^2 < a_1 c_1 : \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = (a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2) \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Замечание 12. Систему (39) можно записывать в виде (40), но вид (39) предпочтительнее, поскольку позволяет использовать результаты, полученные для системы (25).

Предложение 3. *Для того чтобы избавиться от неоднозначности, возникающей при вынесении в системе (39) линейного общего множителя* P_0 *из многочлена* P, *договоримся, если это возможно, выносить такой общий множитель, чтобы в матрице* H *собственное число* $\lambda_1 = p_1 + kq_1 \neq 0$.

6.2 Построение вырожденных канонических форм при $l = 2$

Будем упрощать систему (39), следуя плану упрощения системы (25).

По теореме 2 произвольная замена (9) сводит систему (25) и, в частности, систему (39) к системе (29) $\widetilde{P} = \big\langle (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}),\, y \big\rangle\, \widetilde{H} y,$ в которой вектор $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ и матрица $\widetilde{H}$ определены в (27), но только $\delta_{\widetilde{pq}} = \det \widetilde{H} = 0.$

Выберем замену (9) так, чтобы в системе (29) матрица $\widetilde{H}$ оказалась жордановой, что возможно благодаря формуле (27_2).

Итак, если $\lambda_1 = p_1 + kq_1 \neq 0,$ то замена (9) с $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ k & -p_1 \end{pmatrix}$, а если $\lambda_1 = 0,$ то $q_1 \neq 0$ и замена (9) с $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & q_1^{-1} \end{pmatrix}$ преобразует систему (39) в системы (29) следующих двух видов соответственно:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\alpha} = \alpha + \beta k, \quad \widetilde{\beta} = \alpha q_1 - \beta p_1, \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} p_1 + kq_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \widetilde{\alpha} & \lambda_1 \widetilde{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ &\widetilde{\alpha} = \alpha + \beta k, \quad \widetilde{\beta} = \beta q_1^{-1}, \qquad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\alpha} & \widetilde{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом, наличие нулевого собственного числа λ_2 у матрицы H привело к тому, что в системах (41) $\widetilde{P}_2 \equiv 0.$

Далее при помощи замен (9) будем максимально упрощать и нормировать системы (41_1) и (41_2), сохраняя условие $P_2 \equiv 0$ и сводя их, тем самым, к каноническим формам, для которых не выполняется принцип 1.

С учетом утверждения 5 произвольная замена (9) с $r_2 = 0$ сводит системы (41_1) и (41_2) соответственно к системам

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} r_1 & 2\widetilde{\alpha} s_1 + \widetilde{\beta} s_2 & (\widetilde{\alpha} s_1 + \widetilde{\beta} s_2) s_1 r_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\alpha} s_2 & (\widetilde{\alpha} s_1 + \widetilde{\beta} s_2) s_2 r_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Итак, при $l = 2$ естественным образом возникает понятие вырожденной КФ.

Определение 9. *В случае $l = 2$ систему (2) будем называть вырожденной канонической формой (ВКФ^2), если она является КФ^2 в смысле определения 7, в котором принцип 1 заменен условием $P_2 \equiv 0$.*

Замечание 13. Обобщенная нормальная форма произвольной системы с ВКФ^2 в качестве невозмущенной части является обобщением нормальной формы Белицкого (см. [7], [14]) на случай, когда невозмущенная часть вырожденная, но не линейная.

СПИСОК вырожденных канонических форм системы (2) в случае $l = 2$:

$$\begin{aligned} &\text{ВКФ}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ВКФ}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ВКФ}_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\text{ВКФ}_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ВКФ}_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема 4. *При $l=2$ система (2) вида (39), (40) линейной неособой заменой (9) сводится к одной из пяти линейно неэквивалентных ВКФ^2.*

Доказательство. **I**) Система (2) имеет вид (39).

1) $\lambda_1 = p_1 + kq_1 \neq 0$. Из (39) получена система (41_1), а из нее – (42_1).

1_1) $\widetilde{\beta}=0$ $(\widetilde{\alpha}\neq 0)$. Тогда (42_1) при $r_1=(\lambda_1\widetilde{\alpha})^{-1}$, $s_1=0$, $s_2=1$ является ВКФ$^2_1$.

1_2) $\widetilde{\alpha}=0$ $(\widetilde{\beta}\neq 0)$. Тогда (42_1) при $r_1=1$, $s_1=0$, $s_2=(\lambda_1\widetilde{\beta})^{-1}$ является ВКФ$^2_2$.

1_3) $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\neq 0$. Тогда (42_1) при $r_1=(\lambda_1\widetilde{\alpha})^{-1}$, $s_1=0$, $s_2=(\lambda_1\widetilde{\beta})^{-1}$ является ВКФ$^2_4$.

2) $\lambda_1 = p_1 + kq_1 = 0$ $(q_1\neq 0)$. Из (39) получены системы (41_2) и (42_2).

2_1) $\widetilde{\alpha}=0$ $(\widetilde{\beta}\neq 0)$. Тогда (42_2) при $r_1=\widetilde{\beta}$, $s_1=0$, $s_2=1$ является ВКФ$^2_3$.

2_2) $\widetilde{\beta}=0$ $(\widetilde{\alpha}\neq 0)$. Тогда в системе (41_2) $\widetilde{P}_1=\widetilde{\alpha}x_1x_2$. По предложению 3 ситуация 2_2) возникнуть не может. Она относится к случаю 1).

2_3) $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\neq 0$. Тогда в (41_2) $\widetilde{P}_1=(\widetilde{\alpha}x_1+\widetilde{\beta}x_2)x_2$. По предложению 3 ситуация 2_3) возникнуть не может. Она относится к случаю 1).

II) Система (2) имеет вид (40).

Согласно (12) любая замена (9) сводит (2) с $P_2=kP_1$ к системе с коэффициентами

$$\begin{array}{l}
\widetilde{a}_1=(s_2-ks_1)P_1(r_1,r_2)\delta^{-1}, \quad \widetilde{a}_2=(kr_1-r_2)P_1(r_1,r_2)\delta^{-1},\\
\widetilde{b}_1=(s_2-ks_1)(a_1r_1s_1+b_1(r_1s_2+r_2s_1)+c_1r_2s_2)\delta^{-1},\\
\widetilde{b}_2=(kr_1-r_2)(a_1r_1s_1+b_1(r_1s_2+r_2s_1)+c_1r_2s_2)\delta^{-1},\\
\widetilde{c}_1=(s_2-ks_1)P_1(s_1,s_2)\delta^{-1}, \quad \widetilde{c}_2=(kr_1-r_2)P_1(s_1,s_2)\delta^{-1}.
\end{array}$$

При $r_2=kr_1$ $(\delta=r_1(s_2-ks_1)\neq 0)$ полученная система принимает вид

$$\begin{pmatrix} (a_1+2b_1k+c_1k^2)r_1 & 2(a_1s_1+kb_1s_1+b_1s_2+kc_1s_2) & P_1(s_1,s_2)r_1^{-1}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

При $r_1=(a_1+2b_1k+c_1k^2)^{-1}$, $s_1=-(b_1+kc_1)(a_1+2b_1k+c_1k^2)^{-1}(a_1c_1-b_1^2)^{-1/2}$, $s_2=(a_1+kb_1)(a_1+2b_1k+c_1k^2)^{-1}(a_1c_1-b_1^2)^{-1/2}$ она является ВКФ$^2_5$. $\square$

Замечание 14. Формы ВФ$^2_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ и ВФ$^2_2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ со структурой ВКФ$^2_5$, отсутствующие в списке, в силу принципов 2 и 3 каноническими не являются.

Форма ВФ$^2_1$ заменой (9) с $r_1=1$, $s_1=-1$, $r_2=0$, $s_2=1$ сводится к ВКФ$^2_2$.

Форма ВФ$^2_2$ заменой (9) с $r_1=1$, $s_1=1/2$, $r_2=0$, $s_2=-1/2$ сводится к ВКФ$^2_4$.

Следствие 3. *I) Система (39) линейной неособой заменой (9) может быть сведена к ВКФ^2_i $(i=\overline{1,4})$, если пять параметров системы: коэффициенты α,β общего множителя P_0, элементы p_1,q_1 матрицы H и коэффициент пропорциональности k удовлетворяют следующим условиям:*

ВКФ$^2_1$: 1) $\alpha=1$, $q_1=\beta p_1$, $kq_1\neq -p_1$, 2) $\alpha=0$, $\beta=1$, $p_1=0$, $kq_1\neq 0$;

ВКФ$^2_2$: 1) $\alpha=1$, $\beta k=-1$, $kq_1\neq -p_1$, 2) $\alpha=0$, $\beta=1$, $p_1\neq 0$, $k=0$;

ВКФ$^2_3$: 1) $\alpha = 1,\ \beta k = -1,\ kq_1 = -p_1,$ 2) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ p_1 = 0,\ k = 0;$

ВКФ$^2_4$: 1) $\alpha = 1,\ \beta k \neq -1,\ kq_1 \neq -p_1,\ q_1 \neq \beta p_1,$ 2) $\alpha = 0, \beta = 1, p_1 \neq 0, k \neq 0, kq_1 \neq -p_1.$

II) Система (40) линейной неособой заменой (9) сводится к ВКФ$^2_5$.

6.3 Построение основных и дополнительных КФ при $\mathbf{l = 2}$

Свести системы (41), а с ними вместе системы (39) или (40) к ВКФ^2, вообще говоря, недостаточно с точки зрения последующей нормализации возмущенных систем. Для полноценной нормализации требуется выполнение принципа 1. Поэтому теперь каждую ВКФ^2_i будем преобразовывать заменой (9) в невырожденную КФ^2.

Замечание 15. КФ^2, полученная из ВКФ^2_i, как правило, будет иметь большее число ненулевых элементов, что является естественной "платой" за бóльшие возможности при последующей нормализации возмущений.

Замечание 16. Специфика случая $l = 2$ такова, что из-за пропорциональности коэффициентов многочленов P_1, P_2 в системах (39) или (40) принцип 1 в определении канонической формы задействуется в полном объеме, т. е. именно при $l = 2$ актуально требование $P_1 \equiv P_2 \quad (k = 1)$. Но зато принцип 3 целиком теряет свою значимость.

СПИСОК канонических форм системы (2) в случае $l = 2$:

$$\text{КФ}^2_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{КФ}^2_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma \\ 1 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (\sigma = \pm 1), \quad \text{КФ}^2_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\text{КФ}^2_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{ДКФ}^2_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. *Каждая ВКФ*^2_i $(i = \overline{1,5})$ *соответствующей линейной неособой заменой (9) сводится к некоторой КФ*^{2}.

Доказательство. Последовательно для ВКФ$^2_1, \ldots,$ ВКФ$^2_5$ будем делать с учетом утверждения 6 замену (9) с $r_2 = -s_2 \neq 0$ и выбирать остальные ее коэффициенты так, чтобы получить КФ^2. Пусть $\delta_1 = (r_1 + s_1)^{-1}$.

ВКФ$^2_1$ сводится к системе с $a_1 = r_1^2\delta_1,\ b_1 = r_1s_1\delta_1,\ c_1 = s_1^2\delta_1,$ которая при $r_1 = 1,$ $s_1 = 0,\ r_2 = -1,\ s_2 = 1$ является КФ$^2_1$.

ВКФ$^2_2$ сводится к системе с $a_1 = -r_1s_2\delta_1,\ 2b_1 = s_2(r_1 - s_1)\delta_1,\ c_1 = s_1s_2\delta_1,$ которая при $r_1 = 1,\ s_1 = 1,\ r_2 = 2,\ s_2 = -2$ является КФ$^2_2$ с $\sigma = -1$, а при $r_1 = 1,\ s_1 = 0,$ $r_2 = 1,\ s_2 = -1$ является ДКФ$^2_2$.

ВКФ$^2_3$ сводится к системе с $a_1 = s_2^2\delta_1,\ b_1 = -s_2^2\delta_1,\ c_1 = s_2^2\delta_1,$ которая при $r_1 = 1,$ $s_1 = 1,\ r_2 = -2^{1/2},\ s_2 = 2^{1/2}$ является КФ$^2_3$.

ВКФ$^2_4$ сводится к системе с $a_1 = r_1(r_1 - s_2)\delta_1,\ 2b_1 = (2r_1s_1 + r_1s_2 - s_1s_2)\delta_1,\ c_1 = s_1(s_1 + s_2)\delta_1$. которая при $r_1 = 1,\ s_1 = 0,\ r_2 = -1,\ s_2 = 1$ является КФ$^2_4$.

ВКФ$^2_5$ сводится к системе с $a_1 = (r_1^2 + s_2^2)\delta_1,\ b_1 = (r_1s_1 - s_2^2)\delta_1,\ c_1 = (s_1^2 + s_2^2)\delta_1,$ которая при $r_1 = 1, s_1 = 1,\ r_2 = -1\ \ s_2 = 1$ является КФ$^2_2$ с $\sigma = 1$. $\square$

Замечание 17. Как было показано, ВКФ^2_i сводятся к КФ^2_i для $i = 1, 3, 4$. А ВКФ$^2_2$ и ВКФ$^2_5$ сводятся к КФ$^2_2$ соответственно с $\sigma = -1$ и с $\sigma = 1$.

Замечание 18. Отсутствующая в списке форма $\Phi_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ по принципу 2 – не каноническая. Заменой (9) с $r_1 = 0$, $s_1 = 1/2$, $r_2 = 1$, $s_2 = -1/2$ она сводится к $\text{ВК}\Phi_4^2$.

Замечание 19. $\text{ДК}\Phi_2^2$ с $\text{К}\Phi_2^2$, у которой $\sigma = -1$, связывает не перенумерация, а замена (9) с $r_1, s_1 = -2$, $r_2 = -4$, $s_2 = 0$. При этом $\text{К}\Phi_2^2$ по принципу 5b – основная.

ПОЛНЫЙ СПИСОК форм с тремя, четырьмя и шестью ненулевыми элементами

$$\underline{\text{К}\Phi_1^0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2, \quad \text{К}\Phi_1^1 = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_3, \quad \text{К}\Phi_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_4,$$

$$\text{К}\Phi_1^{1\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}_3, \quad \underline{\text{К}\Phi_4^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_4, \quad \text{К}\Phi_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_5,$$

$$\text{К}\Phi_1^{2\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_4, \quad \text{К}\Phi_2^{1\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}_5, \quad \underline{\text{К}\Phi_2^0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_6;$$

$$\text{К}\Phi_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_4, \quad \text{К}\Phi_3^1 = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_5, \quad \text{К}\Phi_5^1 = \begin{pmatrix} u & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_6,$$

$$\text{К}\Phi_4^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_5, \quad \text{К}\Phi_5^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_6, \quad \text{К}\Phi_6^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7,$$

$$\text{К}\Phi_4^{1\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_6, \quad \Phi_1^{1\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}_7, \quad \text{К}\Phi_7^0 = \begin{pmatrix} 0 & u & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8;$$

$$\text{К}\Phi_3^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 \end{pmatrix}_4, \quad \text{К}\Phi_3^{1\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u \end{pmatrix}_5, \quad \text{К}\Phi_5^{1\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}_6,$$

$$\text{К}\Phi_4^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & u \end{pmatrix}_5, \quad \text{К}\Phi_5^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sigma & 0 & u \end{pmatrix}_6, \quad \text{К}\Phi_6^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & u \end{pmatrix}_7,$$

$$\text{К}\Phi_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_6, \quad \Phi_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_7, \quad \text{К}\Phi_7^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & u & 0 \end{pmatrix}_8;$$

$$\underline{\text{К}\Phi_8^0} = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & v \end{pmatrix}_6, \quad \text{К}\Phi_9^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} v & 1 & 0 \\ \sigma & 0 & u \end{pmatrix}_7, \quad \text{ДК}\Phi_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_8,$$

$$\text{К}\Phi_9^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & v \end{pmatrix}_7, \quad \underline{\text{К}\Phi_2^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma \\ 1 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_8, \quad \Phi_4^0 = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 1 & v & 0 \end{pmatrix}_9,$$

$$\text{ДК}\Phi_2^{2\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_8, \quad \Phi_4^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & v & 1 \\ 1 & 0 & u \end{pmatrix}_9, \quad \underline{\Phi_5^0} = \begin{pmatrix} 0 & u & 1 \\ 1 & v & 0 \end{pmatrix}_{10};$$

$$\Phi_3^0 = \begin{pmatrix} u & v & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_7, \quad \text{К}\Phi_{10}^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & u & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_8, \quad \Phi_2^0 = \begin{pmatrix} u & v & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9,$$

$$\Phi_3^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & v & u \end{pmatrix}_7, \quad \text{К}\Phi_{10}^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & u & 1/2 \end{pmatrix}_8, \quad \Phi_2^{0\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & v & u \end{pmatrix}_9;$$

$$\underline{\text{К}\Phi_3^2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{12},$$

здесь внизу у каждой матрицы выписан индекс и подчеркнуты симметричные формы.

Часть III

ОНФ систем с вырожденной КФ в невозмущенной части

7 Нормализация систем с ВКФ_1^2

Пусть в системе (1) невозмущенная часть $P(x)$ линейной неособой заменой сводится к $\text{ВКФ}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будем сразу предполагать, что система (1) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2). \tag{43}$$

Тогда система (6) запишется в виде

$$(s-3)h_1^{(s-1,p+1-s)} = \widehat{Y}_1^{(s,p+1-s)}, \ \ (s-1)h_2^{(s-1,p+1-s)} = \widehat{Y}_2^{(s,p+1-s)} \quad (s = \overline{0, p+1};\ p \geq 2). \tag{44}$$

Для разрешимости системы (44) необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$\widehat{Y}_1^{(0,p+1)} = 0, \quad \widehat{Y}_2^{(0,p+1)} = 0, \quad \widehat{Y}_1^{(3,p-2)} = 0, \quad \widehat{Y}_2^{(1,p)} = 0,$$

при этом коэффициенты $h_1^{(2,p-2)}$ и $h_2^{(0,p)}$ в замене (9) не имеют ограничений.

Используя введенные для уравнений (5) и (7) обозначения, перепишем полученные резонансные связи через коэффициенты системы (4):

$$Y_1^{(0,p+1)} = \widetilde{c}, \quad Y_1^{(3,p-2)} = \widetilde{c}, \quad Y_2^{(0,p+1)} = \widetilde{c}, \quad Y_2^{(1,p)} = \widetilde{c}. \tag{45}$$

Теорема 6. *Система (43) формально эквивалентна системе (4) с невозмущенной частью $P = (y_1^2, 0)$ тогда и только тогда, когда для любого $p \geq 2$ коэффициенты однородных полиномов $Y_i^{(p+1)}$ удовлетворяют четырем резонансным уравнениям (45).*

Следствие 4. *Резонансным является единственный набор, состоящий из $Y_1^{(0,p+1)}$, $Y_1^{(3,p-2)}$, $Y_2^{(0,p+1)}$, $Y_2^{(1,p)}$.*

Теорема 7. *Произвольная система (43) формальной заменой (9) может быть сведена к ОНФ (4), в которой при любом $p \geq 2$ все коэффициенты $Y_i^{(p+1)}$ $(i = 1, 2)$ равны нулю, кроме, возможно, четырех коэффициентов из резонансного набора, т. е. любая ОНФ имеет вид:*

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{p=2}^{\infty}(Y_1^{(0,p+1)}y_2^{p+1} + Y_1^{(3,p-2)}y_1^3 y_2^{p-2}), \quad \dot{y}_2 = \sum_{p=2}^{\infty}(Y_2^{(0,p+1)}y_2^{p+1} + Y_2^{(1,p)}y_1 y_2^p).$$

Замечание 20. Любая ОНФ системы (43) имеет жесткую структуру степеней резонансных членов, что является характерным отличием резонансных нормальных форм и, как правило, не выполняется для обобщенных.

8 Нормализация систем с ВКФ$_2^2$

Пусть в системе (1) невозмущенная часть $P(x)$ линейной неособой заменой сводится к ВКФ$_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будем сразу предполагать, что система (1) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2). \tag{46}$$

Тогда система (6) запишется в виде

$$(s-1)h_1^{(s,p-s)} - h_2^{(s-1,p-s+1)} = \widehat{Y}_1^{(s,p+1-s)}, \; sh_2^{(s,p-s)} = \widehat{Y}_2^{(s,p+1-s)} \;\; (s = \overline{0, p+1}; \; p \geq 2). \tag{47}$$

В подсистеме (47_2) при $s = 0, p+1$ имеем

$$\widehat{Y}_2^{(0,p+1)} = 0, \qquad \widehat{Y}_2^{(p+1,0)} = 0,$$

причем $h_2^{(0,p)}$ свободен, а при $s = \overline{1,p}$ имеем $h_2^{(s,p-s)} = s^{-1}\widehat{Y}_2^{(s,p-s+1)}$.

В подсистеме (47_1) при $s = 1$ имеем $0 \cdot h_1^{(1,p-1)} - h_2^{(0,p)} = \widehat{Y}_1^{(1,p+1)}$. Это уравнение однозначно разрешимо за счет $h_2^{(0,p)}$, а $h_1^{(1,p-1)}$ остается свободным. При $s = 0, \overline{2,p}$ (47_1) разрешима за счет коэффициентов $h_1^{(s,p-s)}$. А при $s = p+1$ имеем связь

$$p\widehat{Y}_1^{(p+1,0)} + \widehat{Y}_2^{(p,1)} = 0.$$

Используя введенные для уравнений (5) и (7) обозначения, перепишем полученные резонансные связи через коэффициенты системы (4):

$$Y_2^{(p+1,0)} = \widetilde{c}, \qquad Y_2^{(0,p+1)} = \widetilde{c}, \qquad pY_1^{(p+1,0)} + Y_2^{(p,1)} = \widetilde{c}. \tag{48}$$

Теорема 8. *Система (46) формально эквивалентна системе (4) с невозмущенной частью $P = (y_1 y_2, 0)$ тогда и только тогда, когда для $\forall\, p \geq 2$ коэффициенты однородных полиномов $Y_i^{(p+1)}$ удовлетворяют трем резонансным уравнениям (48).*

Следствие 5. *Имеются два резонансных набора. В них входят $Y_2^{(0,p+1)}$, $Y_2^{(p+1,0)}$ и либо $Y_1^{(p+1,0)}$, либо $Y_2^{(p,1)}$.*

Теорема 9. *Произвольная система (46) формальной заменой (9) может быть сведена к ОНФ (4), в которой при любом $p \geq 2$ все коэффициенты $Y_i^{(p+1)}$ $(i = 1, 2)$ равны нулю, кроме, возможно, трех коэффициентов из одного из двух имеющихся резонансных наборов, т. е. любая ОНФ имеет одну из следующих двух структур:*

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{p=2}^{\infty} Y_1^{(p+1,0)} y_1^{p+1}, \quad \dot{y}_2 = \sum_{p=2}^{\infty} (Y_2^{(0,p+1)} y_2^{p+1} + Y_2^{(p+1,0)} y_1^{p+1});$$

$$\dot{y}_1 = y_2^2, \quad \dot{y}_2 = \sum_{p=2}^{\infty} (Y_2^{(0,p+1)} y_2^{p+1} + Y_2^{(p,1)} y_1^p y_2 + Y_2^{(p+1,0)} y_1^{p+1}).$$

9 Нормализация систем с ВКФ$_3^2$

Пусть в системе (1) невозмущенная часть $P(x)$ линейной неособой заменой сводится к ВКФ$_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будем сразу предполагать, что система (1) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2). \tag{49}$$

Тогда система (6) запишется в виде

$$(s+1)h_1^{(s+1,p-s-1)} - 2h_2^{(s,p-s)} = \widehat{Y}_1^{(s,p+1-s)}, \ (s+1)h_2^{(s+1,p-s-1)} = \widehat{Y}_2^{(s,p+1-s)} \ (s = \overline{0, p+1}). \tag{50}$$

В подсистеме (50_2) при $s = p, p+1$ имеем связи

$$\widehat{Y}_2^{(p,1)} = 0, \qquad \widehat{Y}_2^{(p+1,0)} = 0,$$

а при $s = \overline{0, p-1}$ имеем $h_2^{(s+1,p-s-1)} = (s+1)^{-1}\widehat{Y}_2^{(s,p+1-s)}$, причем $h_2^{(0,p)}$ свободен.

В подсистеме (50_1) при $s = p, p+1$ имеем связи

$$\widehat{Y}_1^{(p+1,0)} = 0, \qquad \widehat{Y}_1^{(p,1)} + 2h_2^{(p,0)} = 0,$$

где $h_2^{(p,0)} = p^{-1}\widehat{Y}_2^{(p-1,2)}$, т. е. вторая связь имеет вид $p\widehat{Y}_1^{(p,1)} + 2\widehat{Y}_2^{(p-1,2)} = 0$.

Компоненты $h_1^{(0,p)}$ и $h_2^{(0,p)}$ свободны, так как не входят в систему (50).

Используя введенные для уравнений (5) и (7) обозначения, перепишем полученные резонансные связи через коэффициенты системы (4):

$$Y_1^{(p+1,0)} = \widetilde{c}, \quad Y_2^{(p,1)} = \widetilde{c}, \quad Y_2^{(p+1,0)} = \widetilde{c}, \quad pY_1^{(p,1)} + 2Y_2^{(p-1,2)} = \widetilde{c}. \tag{51}$$

Теорема 10. *Система (49) формально эквивалентна системе (4) с невозмущенной частью $P = (y_2^2, 0)$ тогда и только тогда, когда для любого $p \geq 2$ коэффициенты однородных полиномов $Y_i^{(p+1)}$ удовлетворяют четырем резонансным уравнениям (51).*

Следствие 6. *Имеются два резонансных набора. В них входят $Y_1^{(p+1,0)}$, $Y_2^{(p,1)}$, $Y_2^{(p+1,0)}$ и либо $Y_1^{(p,1)}$, либо $Y_2^{(p-1,2)}$.*

Теорема 11. *Произвольная система (49) формальной заменой (9) может быть сведена к ОНФ (4), в которой при любом $p \geq 2$ все коэффициенты $Y_i^{(p+1)}$ $(i = 1, 2)$ равны нулю, кроме, возможно, четырех коэффициентов из одного из двух имеющихся резонансных наборов, т. е. любая ОНФ имеет одну из следующих двух структур:*

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{p=2}^{\infty}(Y_1^{(p+1,0)}y_1^{p+1} + Y_1^{(p,1)}y_1^p y_2), \quad \dot{y}_2 = \sum_{p=2}^{\infty}(Y_2^{(p,1)}y_1^p y_2 + Y_2^{(p+1,0)}y_1^{p+1});$$

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{p=2}^{\infty}Y_1^{(p+1,0)}y_1^{p+1}, \quad \dot{y}_2 = \sum_{p=2}^{\infty}(Y_2^{(p-1,2)}y_1^{p-1}y_2^2 + Y_2^{(p,1)}y_1^p y_2 + Y_2^{(p+1,0)}y_1^{p+1}).$$

10 Нормализация систем с ВКФ$_4^2$

Пусть в системе (1) невозмущенная часть $P(x)$ линейной неособой заменой сводится к ВКФ$_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будем сразу предполагать, что система (1) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_1x_2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2). \tag{52}$$

Тогда система (6) запишется в виде

$$\begin{array}{l} (s-3)h_1^{(s-1,p-s+1)} + (s-1)h_1^{(s,p-s)} - h_2^{(s-1,p-s+1)} = \widehat{Y}_1^{(s,p+1-s)}\quad , \\ (s-1)h_2^{(s-1,p-s+1)} + sh_2^{(s,p-s)} = \widehat{Y}_2^{(s,p+1-s)} \qquad (s = \overline{0, p+1};\ p \geq 2). \end{array} \tag{53}$$

В подсистеме (53_2) при $s = 0$ имеем связь

$$\widehat{Y}_2^{(0,p+1)} = 0,$$

причем $h_2^{(0,p)}$ свободен. При $s = \overline{1, p}$ из (53_2) однозначно находятся коэффициенты $h_2^{(s,p-s)} = s^{-1}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{s-j}\widehat{Y}_2^{(j,p+1-j)}$.

Последнее уравнение в (53_2) имеет вид: $ph_2^{(p,0)} = \widehat{Y}_2^{(p+1,0)}$.

Подставляя в него найденный $h_2^{(p,0)}$, получаем вторую связь

$$\sum_{j=1}^{p+1}(-1)^j\widehat{Y}_2^{(j,p+1-j)} = 0.$$

Подставляя теперь $h_2^{(s,p-s)}$ из (53_2) в (53_1), получаем систему

$$a_sh_1^{(s-1,p-s+1)} + b_sh_1^{(s,p-s)} = \breve{Y}_1^{(s,p+1-s)} \qquad (s = \overline{0, p+1}), \tag{54}$$

в которой $a_s = s - 3$, $b_s = s - 1$, $\breve{Y}_1^{(s,p+1-s)} = \widehat{Y}_1^{(s,p+1-s)} + h_2^{(s-1,p-s+1)}$.

Выделим последние $p - 1$ уравнений системы (54) в отдельную подсистему

$$\Theta h_1 = \breve{Y},$$

в которой $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_p & b_p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p+1} \end{pmatrix}$ – двухдиагональная $(p-1)$ - матрица, векторы $h_1 = (h_1^{(2,p-2)}, \ldots, h_1^{(p,0)})$, $\breve{Y} = (\breve{Y}_1^{(3,p-2)}, \ldots, \breve{Y}_1^{(p+1,0)})$.

Эта система методом Гаусса может быть преобразована в систему

$$\Theta_g h_1 = Y_g, \tag{55}$$

где $\Theta_g = \operatorname{diag}\{0, a_4, \ldots, a_{p+1}\}$, вектор $Y_g = (Y_g^{(3,p-2)}, \ldots, Y_g^{(p+1,0)})$ имеет компоненты $Y_g^{(p+1,0)} = \breve{Y}_1^{(p+1,0)}$, $Y_g^{(s,p+1-s)} = \breve{Y}_1^{(s,p+1-s)} - a_{s+1}^{-1}b_sY_g^{(s+1,p-s)}$.

Очевидно, $Y_g^{(s,p+1-s)} = (s-2)^{-1}\sum_{j=s-1}^{p}(-1)^{j-s+1}(j-1)\check{Y}_1^{(j+1,p-j)}$ $(s=\overline{p+1,3})$.

При $s=\overline{p+1,4}$ система (55) однозначно разрешима относительно коэффициентов $h_1^{(p,0)},\ldots,h_1^{(3,p-3)}$, а ее первое уравнение $(s=3)$ имеет вид: $0\cdot h_1^{(2,p-2)} = Y_g^{(3,p-2)}$, и в нем $h_1^{(2,p-2)}$ свободен.

Подставляя в него формулы для $Y_g^{(3,p-2)}$, $\check{Y}_1^{(j+1,p-j)}$, $h_2^{(j,p-j)}$, получим:

$$\sum_{j=2}^{p}(-1)^j(j-1)\widehat{Y}_1^{(j+1,p-j)} + \sum_{j=2}^{p}(-1)^j\frac{j-1}{j}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}\widehat{Y}_2^{(k,p+1-k)} = 0$$

или резонансную связь

$$\sum_{j=2}^{p}(-1)^j(j-1)\widehat{Y}_1^{(j+1,p-j)} + \sum_{j=1}^{p}(-1)^j\sum_{k=j-1}^{p-1}\frac{k}{k+1}\widehat{Y}_2^{(j,p+1-j)} = 0.$$

Первые три уравнения системы (54) имеют вид:

$$-h_1^{(0,p)} = \widehat{Y}_1^{(0,p+1)},\quad -2h_1^{(0,p)} = \widehat{Y}_1^{(1,p)} + h_2^{(0,p)},\quad -h_1^{(1,p-1)} + h_1^{(2,p-2)} = \widehat{Y}_1^{(2,p+1)} + h_2^{(1,p-1)}.$$

Из первого уравнения однозначно находится $h_1^{(0,p)}$, а за счет свободного $h_2^{(0,p)}$ однозначно разрешимо второе уравнение. В третьем же $h_1^{(1,p-1)}$ или $h_1^{(2,p-2)}$ свободен.

Используя введенные для уравнений (5) и (7) обозначения, перепишем полученные резонансные связи через коэффициенты системы (4):

$$\begin{gathered} Y_2^{(0,p+1)} = \widetilde{c},\qquad \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^j Y_2^{(j,p+1-j)} = \widetilde{c},\\ \sum_{j=2}^{p}(-1)^j(j-1)Y_1^{(j+1,p-j)} + \sum_{j=1}^{p}(-1)^j\sum_{k=j-1}^{p-1}\frac{k}{k+1}Y_2^{(j,p+1-j)} = \widetilde{c}. \end{gathered}\tag{56}$$

Теорема 12. *Система (52) формально эквивалентна системе (4) с невозмущенной частью* $P=(y_1^2+y_1y_2,0)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $p\geq 2$ *коэффициенты однородных полиномов* $Y_i^{(p+1)}$ $(i=1,2)$ *удовлетворяют трем резонансным уравнениям (56).*

Следствие 7. *В любой резонансный набор входят три коэффициента:*
1) коэффициент $Y_2^{(0,p+1)}$, *2) любой из коэффициентов* $Y_2^{(s,p+1-s)}$ $(1\leq s\leq p+1)$,
3) любой из $Y_1^{(s,p+1-s)}$ $(3\leq s\leq p+1)$ *или любой из* $Y_2^{(s,p+1-s)}$ $(1\leq s\leq p+1)$, *отличный от выбранного в 2) коэффициента, кроме пары коэффициентов* $Y_2^{(1,p)}$ *и* $Y_2^{(2,p-1)}$, *которые не могут входить в резонансный набор одновременно, так как для них* $\det\Upsilon^p=0$.

Теорема 13. *Произвольная система (52) формальной заменой (9) может быть преобразована в ОНФ (4), в которой при любом* $p\geq 2$ *все коэффициенты* $Y_i^{(p+1)}$ $(i=1,2)$ *равны нулю, кроме, возможно, трех коэффициентов из произвольно выбранного резонансного набора.*

Пример 1. Произвольная система (52) формальной заменой (9) может быть сведена к ОНФ (4) , в первом уравнении которой отсутствует возмущение:

$$\dot{y}_1 = y_1^2 + y_1 y_2, \qquad \dot{y}_2 = \sum_{p=2}^{\infty} (Y_2^{(0,p+1)} y_2^{p+1} + Y_2^{(1,p)} y_1 y_2^p + Y_2^{(3,p-2)} y_1^3 y_2^{p-2}).$$

Отметим, что ни в какой ОНФ нельзя гарантированно аннулировать y_2^s $(s \leq 3)$, так как любой резонансный набор содержит либо $Y_1^{(s,p+1-s)}$, либо $Y_2^{(s,p+1-s)}$ с $s \geq 3$.

11 Нормализация систем с ВКФ_5^2

Пусть в системе (1) невозмущенная часть $P(x)$ линейной неособой заменой сводится к $\text{ВКФ}_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будем сразу предполагать, что система (1) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2). \tag{57}$$

Тогда система (6) запишется в виде

$$\begin{array}{l} (s-3)h_1^{(s-1,p+1-s)} + (s+1)h_1^{(s+1,p-1-s)} - 2h_2^{(s,p-s)} = \widehat{Y}_1^{(s,p+1-s)}, \\ (s-1)h_2^{(s-1,p+1-s)} + (s+1)h_2^{(s+1,p-1-s)} = \widehat{Y}_2^{(s,p+1-s)} \qquad (s = \overline{0, p+1};\ p \geq 2). \end{array} \tag{58}$$

В зависимости от четности индекса s система (58) распадается на две независимые подсистемы. Поэтому удобно ввести следующие разложения:

$$p = 2r + \mu \quad (r \geq 1,\ \mu \in \{0,1\}), \quad s = 2\tau + \mu + \nu \quad (-(\nu+\mu)/2 \leq \tau \leq r,\ \nu \in \{0,1\}).$$

В результате для любых $r \geq 1$, $\mu \in \{0,1\}$ система (58) принимает вид:

$$\begin{array}{l} (2\tau+\mu+\nu-3)h_1^{(2\tau+\mu+\nu-1,2(r-\tau)+1-\nu)} + (2\tau+\mu+\nu+1)h_1^{(2\tau+\mu+\nu+1,2(r-\tau)-1-\nu)} - \\ \qquad -2h_2^{(2\tau+\mu+\nu,2(r-\tau)-\nu)} = \widehat{Y}_1^{(2\tau+\mu+\nu,2(r-\tau)+1-\nu)}, \\ (2\tau+\mu+\nu-1)h_2^{(2\tau+\mu+\nu-1,2(r-\tau)+1-\nu)} + (2\tau+\mu+\nu+1)h_2^{(2\tau+\mu+\nu+1,2(r-\tau)-1-\nu)} = \\ \qquad = \widehat{Y}_2^{(2\tau+\mu+\nu,2(r-\tau)+1-\nu)}. \end{array} \tag{58^μ}$$

Положив в (58_1^μ) $\nu = 1$ и в (58_2^μ) $\nu = 0$, а затем наоборот, для любого $p = 2r + \mu$ из системы (58^μ) получаем две независимые системы:

$$\begin{array}{l} (2\tau+\mu-2)h_1^{(2\tau+\mu,2(r-\tau))} + (2\tau+\mu+2)h_1^{(2\tau+\mu+2,2(r-\tau)-2)} - 2h_2^{(2\tau+\mu+1,2(r-\tau)-1)} = \\ \qquad = \widehat{Y}_1^{(2\tau+\mu+1,2(r-\tau))} \qquad (-(1+\mu)/2 \leq \tau \leq r), \\ (2\tau+\mu-1)h_2^{(2\tau+\mu-1,2(r-\tau)+1)} + (2\tau+\mu+1)h_2^{(2\tau+\mu+1,2(r-\tau)-1)} = \widehat{Y}_2^{(2\tau+\mu,2(r-\tau)+1)} \\ \qquad (0 \leq \tau \leq r); \end{array} \tag{59}$$

$$\begin{array}{l} (2\tau+\mu-3)h_1^{(2\tau+\mu-1,2(r-\tau)+1)} + (2\tau+\mu+1)h_1^{(2\tau+\mu+1,2(r-\tau)-1)} - 2h_2^{(2\tau+\mu,2(r-\tau))} = \\ \qquad = \widehat{Y}_1^{(2\tau+\mu,2(r-\tau)+1)} \qquad (0 \leq \tau \leq r), \\ (2\tau+\mu)h_2^{(2\tau+\mu,2(r-\tau))} + (2\tau+\mu+2)h_2^{(2\tau+\mu+2,2(r-\tau)-2)} = \widehat{Y}_2^{(2\tau+\mu+1,2(r-\tau))} \\ \qquad (-(1+\mu)/2 \leq \tau \leq r). \end{array} \tag{60}$$

1) Исследование системы (59) при $\mu = 0$ и системы (60) при $\mu = 1$.

Система (59) при $\mu = 0$ и система (60) при $\mu = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&(2\tau-2)h_1^{(2\tau,2(r-\tau)+\mu)} + (2\tau+2)h_1^{(2\tau+2,2(r-\tau)-2+\mu)} - 2h_2^{(2\tau+1,2(r-\tau)-1+\mu)} = \widehat{Y}_1^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} \\
&\qquad\qquad (0 \le \tau \le r), \\
&(2(\tau+\mu)-1)h_2^{(2(\tau+\mu)-1,2(r-\tau)+1-\mu)} + (2(\tau+\mu)+1)h_2^{(2(\tau+\mu)+1,2(r-\tau)-1-\mu)} = \\
&\qquad = \widehat{Y}_2^{(2(\tau+\mu),2(r-\tau)+1-\mu)} \qquad (-\mu \le \tau \le r).
\end{aligned} \tag{61}$$

При $\tau = \overline{-\mu, r-1}$ из (61_2) однозначно находятся коэффициенты

$$h_2^{(2(\tau+\mu)+1,2(r-\tau)-1-\mu)} = \frac{1}{2(\tau+\mu)+1}\sum_{j=0}^{\tau+\mu}(-1)^{\tau-j+\mu}\widehat{Y}_2^{(2j,2(r-j)+1+\mu)}.$$

Последнее уравнение в (61_2) имеет вид: $(2(r+\mu)-1)h_2^{(2(r+\mu)-1,1-\mu)} = \widehat{Y}_2^{(2(r+\mu),1-\mu)}$.

Подставляя в него найденный $h_2^{(2(r+\mu)-1,1-\mu)}$, получаем резонансную связь

$$\sum_{j=0}^{r+\mu}(-1)^j\widehat{Y}_2^{(2j,2(r-j)+1+\mu)} = 0. \tag{62}$$

Подставляя теперь $h_2^{(2\tau+1,2(r-\tau)-1+\mu)}$ из (61_2) в (61_1), получаем систему

$$a_\tau h_1^{(2\tau,2(r-\tau)+\mu)} + b_\tau h_1^{(2\tau+2,2(r-\tau)-2+\mu)} = \check{Y}_1^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} \qquad (\tau = \overline{0,r}), \tag{63}$$

в которой $a_\tau = 2\tau-2$, $b_\tau = 2\tau+2$, $\check{Y}_1^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} = \widehat{Y}_1^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} + 2h_2^{(2\tau+1,2(r-\tau)-1+\mu)}$.

Выделим последние r уравнений системы (63) в отдельную подсистему

$$\Theta h_1 = \check{Y},$$

в которой $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{r-1} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_r \end{pmatrix}$ – двухдиагональная $(r \times r)$ - матрица,

векторы $h_1 = (h_1^{(2,2r-2+\mu)}, \dots, h_1^{(2r,\mu)})$, $\check{Y} = (\check{Y}_1^{(3,2r-2+\mu)}, \dots, \check{Y}_1^{(2r+1,\mu)})$.

Эта система методом Гаусса может быть преобразована в систему

$$\Theta_g h_1 = Y_g, \tag{64}$$

где $\Theta_g = \operatorname{diag}\{0, a_2, \dots, a_r\}$, вектор $Y_g = (Y_g^{(3,2r-2+\mu)}, \dots, Y_g^{(2r+1,\mu)})$ имеет компоненты $Y_g^{(2r+1,\mu)} = \check{Y}_1^{(2r+1,\mu)}$, $Y_g^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} = \check{Y}_1^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} - a_{\tau+1}^{-1}b_\tau Y_g^{(2\tau+3,2(r-\tau)-2+\mu)}$ $(\tau = \overline{r-1,1})$.

Очевидно, $Y_g^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} = \tau^{-1}\sum_{j=\tau}^{r}(-1)^{j-\tau}j\check{Y}_1^{(2j+1,2(r-j)+\mu)}$ $(\tau = \overline{r,1})$.

При $\tau = \overline{r,2}$ система (64) однозначно разрешима относительно коэффициентов $h_1^{(4,2r-4+\mu)}, \ldots, h_1^{(2r,\mu)}$, а ее первое уравнение имеет вид: $0 \cdot h_1^{(2,2r-2+\mu)} = Y_g^{(3,2r-2+\mu)}$, и в нем $h_1^{(2,2r-2+\mu)}$ свободен.

Подставляя в это уравнение формулы для $Y_g^{(3,p-2+\mu)}$, $\breve{Y}_1^{(2j+1,2(r-j)+\mu)}$, $h_2^{(2j+1,2(r-j)-1+\mu)}$, получаем:

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}j\widehat{Y}_1^{(2j+1,2(r-j)+\mu)} + 2\sum_{j=1}^{r-1+\mu}\frac{j}{2j+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+1}\widehat{Y}_2^{(2k,2(r-k)+1+\mu)} = 0$$

или резонансную связь

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}j\widehat{Y}_1^{(2j+1,2(r-j)+\mu)} + 2\sum_{j=0}^{r-1+\mu}(-1)^{j+1}\widehat{Y}_2^{(2j,2(r-j)+1+\mu)}\sum_{k=j}^{r-1}\frac{k}{2k+1} = 0. \tag{65}$$

Первое уравнение системы (63) имеет вид:

$$-2h_1^{(0,2r+\mu)} + 2h_1^{(2,2r-2+\mu)} = \breve{Y}_1^{(1,2r+\mu)}.$$

Оно, очевидно, разрешимо, и коэффициент $h_1^{(0,2r+\mu)}$ (либо $h_1^{(2,2r-2+\mu)}$) свободен.

2) Исследование системы (59) при $\mu = 1$ и системы (60) при $\mu = 0$.

Система (60) при $\mu = 0$ и система (59) при $\mu = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} &(2(\tau+\mu)-3)h_1^{(2(\tau+\mu)-1,2(r-\tau)+1-\mu)} + (2(\tau+\mu)+1)h_1^{(2(\tau+\mu)+1,2(r-\tau)-1-\mu)} - \\ &\quad -2h_2^{(2(\tau+\mu),2(r-\tau)-\mu)} = \widehat{Y}_1^{(2(\tau+\mu),2(r-\tau)+1-\mu)} \qquad (-\mu \le \tau \le r), \\ &2\tau h_2^{(2\tau,2(r-\tau)+\mu)} + (2\tau+2)h_2^{(2\tau+2,2(r-\tau)-2+\mu)} = \widehat{Y}_2^{(2\tau+1,2(r-\tau)+\mu)} \qquad (0 \le \tau \le r). \end{aligned} \tag{66}$$

При $\tau = \overline{0,r-1}$ из (66_2) однозначно находятся коэффициенты $h_2^{(2\tau+2,2(r-\tau)-2+\mu)} = (2\tau+2)^{-1}\sum_{j=0}^{\tau}(-1)^{\tau-j}\widehat{Y}_2^{(2j+1,2(r-j)+\mu)}$, и коэффициент $h_2^{(0,2r+\mu)}$ свободен.

Последнее уравнение в (66_2) имеет вид: $2rh_2^{(2r,\mu)} = \widehat{Y}_2^{(2r+1,\mu)}$.

Подставляя в него найденный $h_2^{(2r,\mu)}$, получаем резонансную связь

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{j}\widehat{Y}_2^{(2j+1,2(r-j)+\mu)} = 0. \tag{67}$$

Подставляя теперь $h_2^{(2\tau+2,2(r-\tau)-2+\mu)}$ из (66_2) в (66_1), получаем систему

$$a_\tau h_1^{(2(\tau+\mu)-1,2(r-\tau)+1-\mu)} + b_\tau h_1^{(2(\tau+\mu)+1,2(r-\tau)-1-\mu)} = \breve{Y}_1^{(2(\tau+\mu),2(r-\tau)+1-\mu)} \qquad (\tau = \overline{-\mu,r}), \tag{68}$$

в которой $\breve{Y}_1^{(2(\tau+\mu),2(r-\tau)+1-\mu)} = \widehat{Y}_1^{(2(\tau+\mu),2(r-\tau)+1-\mu)} + 2h_2^{(2(\tau+\mu),2(r-\tau)-\mu)}$, $a_\tau = 2(\tau+\mu)-3$, $b_\tau = 2(\tau+\mu)+1$.

Выделим последние $r+\mu$ уравнений системы (68) в отдельную подсистему

$$\Theta h_1 = \breve{Y},$$

в которой $\Theta = \begin{pmatrix} a_{1-\mu} & b_{1-\mu} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2-\mu} & b_{2-\mu} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3-\mu} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{r-1} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_r \end{pmatrix}$ – двухдиагональная $(r+\mu)$ - матрица, векторы $h_1 = (h_1^{(1,2r-1+\mu)}, \dots, h_1^{(2(r+\mu)-1,1-\mu)})$, $\check{Y} = (\check{Y}_1^{(2,2r-1+\mu)}, \dots, \check{Y}_1^{(2(r+\mu),1-\mu)})$.

Данная система однозначно разрешима, поскольку стоящие на главной диагонали коэффициенты $a_\tau = 2(\tau+\mu) - 3 \neq 0 \quad (\tau = \overline{1-\mu, r})$.

Первое уравнение в (68) $(\tau = -\mu)$ имеет вид: $h_1^{(1,2r-1+\mu)} = \widehat{Y}_1^{(0,2r+1+\mu)} + 2h_2^{(0,2r+\mu)}$ и однозначно разрешимо за счет оставшегося свободным коэффициента $h_2^{(0,2r+\mu)}$.

Используя введенные для уравнений (5) и (7) обозначения, перепишем полученные резонансные связи (65), (62), (67) для $\mu = 0$ и $\mu = 1$ через коэффициенты системы (4):

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} j Y_1^{(2j+1,2(r-j))} + 2\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j+1} Y_2^{(2j,2(r-j)+1)} \sum_{k=j}^{r-1} \frac{k}{2k+1} = \widetilde{c}, \\ \sum_{j=0}^{r} (-1)^j Y_2^{(2j,2(r-j)+1)} = \widetilde{c}; \qquad \sum_{j=0}^{r} (-1)^j Y_2^{(2j+1,2(r-j))} = \widetilde{c} \qquad (\mu = 0); \end{gathered} \tag{69}$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} j Y_1^{(2j+1,2(r-j)+1)} + 2\sum_{j=0}^{r} (-1)^{j+1} Y_2^{(2j,2(r-j)+2)} \sum_{k=j}^{r} \frac{k}{2k+1} = \widetilde{c}, \\ \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j Y_2^{(2j,2(r-j)+2)} = \widetilde{c}; \qquad \sum_{j=0}^{r} (-1)^j Y_2^{(2j+1,2(r-j)+1)} = \widetilde{c} \qquad (\mu = 1). \end{gathered} \tag{70}$$

Теорема 14. *Система (57) формально эквивалентна системе (4) с невозмущенной частью* $P = (y_1^2 + y_2^2, 0)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $p = 2r + \mu$ $(r \geq 1,$ $\mu \in \{0,1\})$ *коэффициенты однородных полиномов* $Y_i^{(p+1)}$ $(i = 1,2)$ *удовлетворяют трем резонансным уравнениям, а именно:*

1) при $p = 2r$ $(r \geq 1,\, \mu = 0)$ *коэффициенты* $Y_1^{(2\tau+1,2(r-\tau))}$ $(1 \leq \tau \leq r)$, $Y_2^{(2\tau,2(r-\tau)+1)}$ $(0 \leq \tau \leq r)$ *удовлетворяют уравнениям* (69_1), (69_2), *а коэффициенты* $Y_2^{(2\tau+1,2(r-\tau))}$ $(0 \leq \tau \leq r)$ *удовлетворяют уравнению* (69_3);

2) при $p = 2r + 1$ $(r \geq 1, \mu = 1)$ *коэффициенты* $Y_1^{(2\tau+1,2(r-\tau)+1)}$ $(1 \leq \tau \leq r)$, $Y_2^{(2\tau,2(r-\tau)+2)}$ $(0 \leq \tau \leq r+1)$ *удовлетворяют уравнениям* (70_1), (70_2), *коэффициенты* $Y_2^{(2\tau+1,2(r-\tau)+1)}$ $(0 \leq \tau \leq r)$ *удовлетворяют уравнению* (70_3).

Следствие 8. *В любой резонансный набор входят три коэффициента.*

При $p = 2r$ $(r \geq 1,\, \mu = 0)$ *– это следующие коэффициенты:*

1) любой из $Y_2^{(2\tau,2(r-\tau)+1)}$ $(0 \leq \tau \leq r)$; *2) любой из* $Y_2^{(2\tau+1,2(r-\tau))}$ $(0 \leq \tau \leq r)$; *3) любой из* $Y_1^{(2\tau+1,2(r-\tau))}$ $(1 \leq \tau \leq r)$ *или любой из* $Y_2^{(2\tau,2(r-\tau)+1)}$ $(0 \leq \tau \leq r)$, *отличный от выбранного в 1), кроме пары* $Y_2^{(0,2r+1)}$ *и* $Y_2^{(2,2r-1)}$, *которые не могут входить в резонансный набор одновременно, поскольку для них* $\det \Upsilon^p = 0$.

При $p = 2r+1$ $(r \geq 1,\, \mu = 1)$ *– это следующие коэффициенты:*
1) любой из $Y_2^{(2\tau,2(r-\tau)+2)}$ $(0 \leq \tau \leq r+1)$; *2) любой из* $Y_2^{(2\tau+1,2(r-\tau)+1)}$ $(0 \leq \tau \leq r)$; *3) любой из* $Y_1^{(2\tau+1,2(r-\tau)+1)}$ $(1 \leq \tau \leq r)$ *или любой из* $Y_2^{(2\tau,2(r-\tau)+2)}$ $(0 \leq \tau \leq r+1)$, *отличный от выбранного в 1), кроме пары* $Y_2^{(0,2r+2)}$ *и* $Y_2^{(2,2r)}$, *которые не могут входить в резонансный набор одновременно, поскольку для них* $\det \Upsilon^p = 0$.

Теорема 15. *Произвольная система (57) формальной заменой (9) может быть преобразована в ОНФ (4), в которой при любом* $p \geq 2$ *все коэффициенты* $Y_i^{(p+1)}$ $(i = 1, 2)$ *равны нулю, кроме, возможно, трех коэффициентов из произвольно выбранного резонансного набора, описанного в следствии 8.*

Пример 2. Произвольная система (57) формальной заменой (9) может быть сведена к ОНФ (4), которая линейна по y_2 :

$$\dot{y}_1 = y_1^2 + y_1 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} (Y_1^{(2r+1,0)} + Y_1^{(2r+1,1)} y_2) y_1^{2r+1},$$
$$\dot{y}_2 = \sum_{r=1}^{\infty} (Y_2^{(2r+1,0)} y_1 + Y_2^{(2r+2,0)} y_1^2 + Y_2^{(2r,1)} y_2 + Y_2^{(2r+1,1)} y_1 y_2) y_1^{2r}.$$

Часть IV

Заключение

Как отмечалось в части I, процесс нормализации вещественной двумерной системы (1) $\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x)$, в которой $P_i = a_i x_1^2 + 2b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2$ – это невозмущенная часть, $X_i = \sum_{p=2}^{\infty} X_i^{(p+1)}(x)$ – возмущение, а $X_i^{(r)}$ – однородный многочлен порядка r $(i = 1, 2)$, естественным образом распадается на два этапа.

I) На первом этапе при помощи линейных неособых замен (9) упрощается невозмущенная часть системы (1), т. е. векторный однородный квадратичный многочлен $P = (P_1, P_2)$.

В части II множество систем (2) разбивается на девятнадцать линейно неэквивалентных между собой классов. Простейшим представителем каждого класса является каноническая форма (см. определение 7) – аналог жордановой матрицы для линейных систем.

Семейство канонических форм разбивается на три подсемейства в зависимости от степени l общего множителя многочленов P_1 и P_2 (см. определение 5).

Выяснилось, что если P_1 и P_2 не имеют общего множителя $(l = 0)$, а это по утверждению 1 равносильно тому, что соответствующий им результант $R \neq 0$, то система (2) может быть сведена к одной из десяти канонических форм: $КФ_1^0$ – $КФ_{10}^0$. Если P_1 и P_2 имеют общий множитель первой степени, то система (2) сводится к одной из пяти канонических форм: $КФ_1^1$ – $КФ_5^1$. Наконец, если P_1 и P_2 пропорциональны $(l = 2)$, то система (2) сводится к одной из четырех канонических форм: $КФ_1^2$ – $КФ_4^2$.

Остановимся подробнее на двух моментах.

1) Перенумерация (14) сводит любую $КФ_i^l$, конечно, если она не инвариантна относительно этой замены, к дополнительной канонической форме $КФ_i^{l\text{п}}$ (см. определение 8), для которой не выполняется принцип 5 из определения КФ.

А при $l=2$ имеет место другая разновидность дополнительной КФ: $ДКФ_2^2$ согласно замечанию 19 получена из $КФ_2^2$ с $\sigma=-1$ линейной заменой, отличной от перенумерации, и имеет свою $ДКФ_2^{2п}$.

2) В случае $l=2$ каждая из пяти $КФ^2$, если $КФ_2^2$ разбить на две формы в зависимости от знака σ, линейно эквивалентна своей вырожденной КФ (см. определение 9). Достоинством $ВКФ^2$ является ее меньший по сравнению с соответствующей $КФ^2$ индекс, что позволяет довольно легко исследовать ОНФ систем (1) с $ВКФ^2$ в невозмущенной части. Но отсутствие P_2 не позволяет аннулировать ряд слагаемых в возмущении, что удается сделать при невырожденной КФ, конечно, если позволяют технические возможности.

II) Второй этап заключается в том, чтобы из системы (1), невозмущенную часть которой образует одна из $КФ^l$ или $ВКФ^2$, при помощи почти тождественной замены (3) в явном виде получить все обобщенные нормальные формы (см. определение 4).

В части III эта задача решена для систем с $ВКФ_1^2,\dots,ВКФ_5^2$ в невозмущенной части.

Опишем теперь, что сделано с другими $КФ_i^l$ или с их близкими аналогами, так как до этой статьи использовалась классификация канонических форм, введенная в [2, § 2], в которой пятый и шестой принципы определения КФ не были четко сформулированы.

В случае $l=0$ ранее исследованы системы (1) со следующими четырьмя формами: с $КФ_1^0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ – в [2, § 6], с $КФ_2^0=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ – в [4, § 11], с $КФ_4^{0*}=\begin{pmatrix}1&0&u_*\\0&0&1\end{pmatrix}$, отличающейся от $КФ_4^0=\begin{pmatrix}u&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ нормировкой, – в [2, § 6], с $КФ_5^0=\begin{pmatrix}u&0&\sigma\\0&1&0\end{pmatrix}$, в которой $\sigma=-\operatorname{sign}u$ $(R<0)$, – в [5, § 12] (к сожалению, $КФ_5^0$ с $R>0$ еще не выявили).

В случае $l=1$ ранее исследованы системы (1) со следующими четырьмя формами: с $КФ_1^1=\begin{pmatrix}u&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ – в [2, § 5], с $КФ_2^1=\begin{pmatrix}0&\sigma&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ – в [3, § 8], с $КФ_3^1=\begin{pmatrix}u&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, включая $u=-1$, – в [3, § 7], с $КФ_4^1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ – в [4, § 9].

Таким образом, в одном из случаев получены два набора формально эквивалентных ОНФ. В первом наборе невозмущенная часть представлена $КФ_2^1$ с $\sigma=1$, а во втором – формой вида $КФ_3^1$, но с $u=-1$, и эти КФ согласно замечанию 7 линейно эквивалентны.

В случае $l=2$ ранее исследованы системы (1) со следующими тремя формами: с $КФ_1^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ – в работе [2, § 4], с $ДКФ_2^{2*}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$, отличающейся от $ДКФ_2^2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ нормировкой, – в [4, § 10], с $КФ_4^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ – в [2, § 3].

Здесь уже в трех случаях получены по два набора формально эквивалентных ОНФ. По теореме 5 $ВКФ_i^2$ линейно эквивалентна $КФ_i^2$ $(i=1,3,4)$, $ВКФ_2^2$ эквивалентна $КФ_2^2$ с $\sigma=-1$ (и $ДКФ_2^2$), а $ВКФ_5^2$ эквивалентна $КФ_2^2$ с $\sigma=1$.

Отметим также, что система (1), исследованная в [4, § 10], – это пока единственная система, невозмущенная часть которой содержит четыре ненулевых слагаемых $(ДКФ_2^{2*})$.

Список литературы

[1] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевым характеристическими числами // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 2, с. 154–170.

[2] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 8, с. 1016–1029.

[3] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, II // Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, N 8, с. 1011–1022.

[4] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, III // Дифференц. уравнения, 2006, т. 42, N 3, с. 308–319.

[5] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Нормализация двумерных систем с невозмущенной частью $(\alpha x_1^2 + x_1x_2,\, x_1x_2)$ // Труды XII Межд. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения), 2007, с. 24–32.

[6] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, IV // Дифференц. уравнения, 2009, т. 45, N 3, с. 297–313.

[7] *Брюно А. Д., Петрович В. Ю.* Нормальные формы системы ОДУ // Препринт ИПМ РАН, 2000, N 18.

[8] *Басов В. В., Федотов А. А.* Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2007, вып. 1, с. 13–33.

[9] *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. Матем. о-ва, 1971, т. 25, с. 119–262; 1972, т. 26, с. 7–264.

[10] *Басов В. В.* Метод нормальных форм в локальной качественной теории дифференц. уравнений: формальная теория нормальных форм. СПб., СПбГУ, 2001. 44 с.

[11] *Басов В. В.* Метод нормальных форм в локальной качественной теории дифференц. уравнений: аналитическая теория нормальных форм. СПб., СПбГУ, 2002. 100 с.

[12] *Kokubu H., Oka H., Wang D.* Linear grading function and further redaction of normal forms // J. Diff. Eq., 1996, v. 132, p. 293–318.

[13] *Сибирский К. С.* Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений // Кишинев "Штиинца," 1982. 168 с.

[14] *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы формальных рядов и ростков C^∞- отображений относительно действия группы // Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, т. 40, N 4, с. 855–868.