ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОДУ, НЕ ИМЕЮЩИХ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ

В. В. БАСОВ, Е. В. ФЕДОРОВА

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, fev.math@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются вещественные двумерные автономные системы ОДУ, правая часть которых представляет собой векторный однородный многочлен третьего порядка с компонентами, не имеющими общего множителя.

Разработаны структурные и нормировочные принципы, позволяющие после разбиения таких систем на классы эквивалентности относительно линейных неособых замен выделить в каждом классе каноническую форму – наиболее простой многочлен с точки зрения использования его в качестве невозмущенной части в формальных или аналитических системах, подлежащих сведению к обобщенной нормальной форме.

Для каждой канонической формы в явном виде приведены условия на коэффициенты исходной однородной кубической системы и линейная замена, сводящая ее при этих условиях к системе с выбранной канонической формой в правой части.

Настоящая работа является непосредственным продолжением и завершением работ [1] и [2], поэтому в ней сохраняются обозначения и продолжается нумерация пунктов, формул, теорем, замечаний, утверждений и списков.

7 Канонические формы кубической системы, не имеющей общего множителя

7.1 Введение

Будет рассматриваться двумерная невозмущенная вещественная система (14) $\dot{x} = P(x)$, введенная в $[1, 2.1]$, в которой

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix} \not\equiv 0,$$

отождествляемая в дальнейшем с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

В работах [1] и [2] изучались системы (14), у которых многочлены P_1 и P_2 имели вещественный общий множитель $P_0^l(x)$ максимальной степени $l = 1, 2, 3,$ что равносильно согласно $[1, \text{утв. } 3]$ обращению в нуль результанта (15) R векторного многочлена $P(x)$.

Пусть линейная неособая замена (16) $x = Ly$ с $L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$ $(\det L = \delta \neq 0)$ преобразует (14) в систему (17) $\dot{y} = \widetilde{P}(y)$ или $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix}$, векторный многочлен $\widetilde{P}(y)$ которой можно вычислить по формуле (18), а элементы $\widetilde{A}$ — по формулам (19). При этом согласно $[1, \text{утв. } 4]$ знак результанта $\widetilde{R}$ системы (17) совпадает со знаком R.

В работах [1], [2] были поставлены и решены две задачи:

1) Множество систем (14) разбить на классы эквивалентности относительно линейных неособых замен (16) и выделить в каждом классе наиболее простую в смысле введенных должным образом нормировочных и структурных принципов ([1, 3.2, 3.3]) систему (17), называемую в дальнейшем канонической формой (CF).

2) Для каждой из полученного списка канонических форм привести условия на коэффициенты исходной системы (14), при которых она сводится указанной в явном виде линейной заменой (16) к выбранной CF.

В предлагаемой работе решаются те же задачи, но при условии, что $R \neq 0,$ т. е. $l = 0.$

Остановимся подробнее на процессе выделения канонических форм, так как задача 1) помимо использования CF в качестве невозмущенных частей двумерных систем, подлежащих сведению к обобщенным нормальным формам, имеет самостоятельное значение, позволяя выделить все линейные инварианты однородных кубических систем.

В опр. 2 [1, 3.1] введено понятие структурной формы (SF^m) – любой системы (14), т. е. матрицы A, имеющей m $(m = \overline{2, 8})$ ненулевых элементов, расположенных на произвольных местах. Там же введены иерархические структурные принципы (с. п.), позволяющие вполне упорядочить все имеющиеся сто двадцать SF_i^m, приведенных в списке 1, после отсеивания от них $SF_{a,i}^m$ – дополнительных структурных форм (см. опр. 5), получаемых из SF_i^m перенумерацией (22), и $SF_{d,j}^{\mu,3}$ – вырожденных структурных форм с $l = 3$ (см. опр. 3), безусловно, линейно эквивалентных соответствующим SF_i^m.

Далее, на основе введенных в [1, 3.2] нормировочных принципов (н.п.), дано определение (опр. 6) NSF_i^m – нормированной структурной формы – это SF_i^m, у которой после нормировки (21) по крайней мере два должных ненулевых элемента равны единице, возможно по модулю. Нормированные структурные формы удобны тем, что для них легко выписать условия на оставшиеся свободными элементы, фиксирующие максимальную степень l общего множителя P_0 многочленов P_1 и P_2, т. е. выделить $NSF_i^{m,l}$.

Итак, создание списка $NSF_i^{m,l}$ – это чисто формальная работа, позволившая, однако, на основе с. п. и н. п. для всякого l указать последовательность структур матрицы $\widetilde{A}$, к которым следует пытаться свести исходную систему (14). Сначала надо искать линейные замены системы (14) к системам (17) с минимальным числом ненулевых элементов m, а после фиксации m – к $NSF_i^{m,l}$ с минимальным нижним индексом i.

Здесь важны соображения, которые принимались во внимание при выборе нормировочных и, в особенности, структурных принципов, поскольку их выбор неоднозначен и обусловлен теми проблемами, которые предстоит решать в дальнейшем с использованием канонических форм, выделяемых согласно этим принципам.

Структурные и нормировочные принципы в [1, 3.1, 3.2] выбирались таким образом, чтобы максимально облегчить написание условий совместности связующей системы (11) (см. приведенные в [1, 1.4] соображения на эту тему). Знание условий совместности, названных в [1, 1.3] резонансными уравнениями, позволяет явно выписать все структуры ОНФ системы, невозмущенная часть которой является выбранной канонической формой.

Множество NSF избыточно. Среди всех NSF_i^m интерес согласно опр. 7 из [1, 3.3] представляют только CSF_i^m – канонические структурные формы, которые не могут быть сведены к предшествующим без дополнительных ограничений на элементы.

Теперь, чтобы из CSF_i^m получить CF_i^m – каноническую форму (см. опр. 8 в [1, 3.3]) достаточно исключить те значения параметров, при которых CSF_i^m линейно эквивалентна предшествующим формам, а также максимально ограничить оставшиеся допустимыми значения параметров посредством линейных замен, преобразующих CSF_i^m в себя.

Возвращаясь к настоящей работе, заметим, что отсутствие общего множителя в системе (14) $(l = 0)$ существенно усложняет конструктивное решение обеих поставленных выше задач. Поэтому в общем виде они решены не в полном объеме, как это сделано для системы (14) при $l = 1, 2, 3$ в [1], [2]. А именно, при решении первой задачи удалось получить $CF_i^{m,0}$ только для $m = 2, 3, 4$, а при решении второй задачи для каждой $CF_i^{m,0}$ в явном виде удалось выписать условия на коэффициенты исходной системы, коэффициенты линейной замены и значения параметров получаемой из исходной системы (14) выбранной $CF_i^{m,0}$ только при $m = 2, 3$. Попытки исследовать системы с бо́льшими значениями m почти во всех случаях приводят либо к непреодолимым техническим трудностям, либо к огромным по размеру условиям, которые для произвольных систем выписывать нет смысла.

Однако, следует иметь в виду, что канонические формы с $m \geq 5$ и даже $m = 4$, представляя несомненный интерес с точки зрения линейных инвариантов, мало интересны в качестве невозмущенных частей нормализуемых систем, так как конструктивная нормализация таких систем практически невозможна.

В заключение отметим, что поставленные здесь и в работах [1], [2] две задачи для двумерных систем с однородными квадратичными правыми частями в полном объеме решены в работах [3], [4]. Более подробную постановку задач и библиографию см. в [1].

Кроме того, в конце работы приведены списки канонических форм для всех l от нуля до трех и исправлены обнаруженные в работах [1], [2] неточности.

7.2 Выделение канонических структурных форм

Выберем из списка 1 в $[1, 3.1]$ структурные формы с $l = 0$, имеющие от двух до четырех ненулевых элементов, и пронормируем их согласно введенным в $[1, 3.2]$ н. п.

Список 13. Тридцать две $NSF_i^{m,0}$ с $m = 2, 3, 4 \quad (\sigma, \kappa = \pm 1, \quad R \neq 0)$

$$NSF^{2,0}_{1,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2, \ R = \kappa; \qquad NSF^{2,0}_{10,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8, \ R = -\kappa;$$

$$NSF^{3,0}_{1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_4, \ R = u^3; \qquad NSF^{3,0}_{2,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} \kappa & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_5, \ R = 1;$$

$$NSF^{3,0}_{4} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_6, \ R = u^3; \qquad NSF^{3,0}_{9} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_7, \ R = -u;$$

$$NSF^{3,0}_{15} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8, \ R = u; \qquad NSF^{3,0}_{20} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9, \ R = -u^3;$$

$$NSF^{3,0}_{23,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \ R = -\kappa; \qquad NSF^{3,0}_{24} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}, \ R = -u^3;$$

$$NSF^{4,0}_{1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_6, \ R = u^2(u-v); \qquad NSF^{4,0}_{2} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_7, \ R = u^3;$$

$$NSF^{4,0}_{3} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_7, \ R = u^2(u+v); \qquad NSF^{4,0}_{4} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_8, \ R = u^3;$$

$$NSF^{4,0}_{6} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_8, \ R = u^2(u-v); \qquad NSF^{4,0}_{8,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}_8, \ R = u\kappa(u\kappa - v)^2;$$

$$NSF^{4,0}_{9} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_9, \ R = u^3; \qquad NSF^{4,0}_{10} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_9, \ R = -v;$$

$$NSF^{4,0}_{13} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & v \end{pmatrix}_9, \ R = u(u^2v^3+1); \qquad NSF^{4,0}_{16} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \ R = -u^2 v;$$

$$NSF^{4,0}_{17} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \ R = u; \qquad NSF^{4,0}_{21} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{10}, \ R = (u-v)^3;$$

$$NSF^{4,0}_{22} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \ R = uv(v-u); \qquad NSF^{4,0}_{25} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & v & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}, \ R = u;$$

$$NSF^{4,0}_{26} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}, \ R = -v^3; \qquad NSF^{4,0}_{28} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}, \ R = -u^3 - v^3;$$

$$NSF^{4,0}_{31} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{12}, \ R = -v^3; \qquad NSF^{4,0}_{32} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{12}, \ R = u^3 - v^3;$$

$$NSF^{4,0}_{34,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & v \\ 1 & 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix}_{12}, \ R = -v(u\kappa - v)^2; \qquad NSF^{4,0}_{35} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{13}, \ R = -v^3;$$

$$NSF^{4,0}_{36} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & v & 0 \end{pmatrix}_{13}, \ R = -u(u^2+v); \qquad NSF^{4,0}_{37} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & v \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{14}, \ R = v^2(u-v).$$

Утверждение 12. *Все нормированные структурные формы из списка 13, кроме* $NSF_4^{4,0}$ *и* $NSF_9^{4,0}$, *являются каноническими структурными формами.*

Доказательство. $NSF_4^{4,0}$ и $NSF_9^{4,0}$ линейной заменой (16) с $r_2=0$, $s_2=\theta_* s_1$, где θ_* – вещественный корень уравнения $\theta^3-\theta^2+v\theta+u=0$, сводятся к $SF_2^{4,0}$.

Попытка свести согласно введенным в [1, 3.3] структурным принципам любую другую NSF из списка 13 к предшествующей форме приводит к необходимости наложить какие-либо ограничения на элементы NSF, что по определению 7 из [1, 3.3] означает, что данная NSF является CSF. $\square$

7.3 Выделение канонических форм из CSF

Сначала, последовательно рассматривая каждую из тридцати $CSF_i^{m,0}$, входящих в список 13, найдем те значения параметров, при которых она может быть сведена к предшествующим согласно с. п. структурным формам.

Утверждение 13. *Только при указанных ниже значениях параметров и только каждая из приведенных ниже двадцати одной* $CSF_i^{m,0}$ *может быть сведена указанными линейными заменами (16) к предшествующим согласно* с. п. *структурным формам:*

1) $CSF_{2,\kappa}^{3,0}$ *при* $u=3/2$, $\kappa=-1$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-\sqrt{2}s_1$ *сводится к* $SF_1^{3,0}$;

2) $CSF_1^{4,0}$ *при* $u=1/9$, $v=1$ *заменой с* $r_1=-3r_2$, $s_1=0$ *сводится к* $SF_1^{3,0}$; *при* $u=1/3$, $v=1$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_9^{3,0}$; *при* $u=-1/9$, $v=-1$ *заменой с* $r_1=3r_2$, $s_1=-3s_2$ *сводится к* $SF_{23}^{3,0}$;

3) $CSF_2^{4,0}$ *при* $v=(3u)^{-1}$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-3us_1$ *сводится к* $SF_4^{3,0}$; *при* $v=1+2(9u)^{-1}$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-3us_1$ *сводится к* $SF_2^{3,0}$; *при* $v=(12u+1\pm(1-8u)^{1/2})(8u)^{-1}$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=(-1\pm(1-8u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF_1^{3,0}$;

4) $CSF_3^{4,0}$ *при* $u<0$, $v=3/2\pm(-2u)^{-1/2}$ *заменой с* $s_1=\pm(-2u)^{-1/2}s_2$, $r_2=0$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$;

5) $CSF_6^{4,0}$ *при* $v=(9u+2)u^{-2}/27$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=3us_1$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$;

6) $CSF_{8,\kappa}^{4,0}$ *при* $\kappa=1$, $u=-1/3$, $v=-3$, *заменой с* $r_1=\sqrt{3}r_2$, $s_1=-\sqrt{3}s_2$ *сводится к* $SF_{10,+}^{2,0}$; *при* $v=(3u-2)(2u-1)\kappa$, $\kappa(1-2u)>0$ *заменой с* $r_2=(\kappa(1-2u))^{1/2}r_1$, $s_2=-(\kappa(1-2u))^{1/2}s_1$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$;

7) $CSF_{10}^{4,0}$ *при* $u=1$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-3s_1$ *сводится к* $SF_6^{4,0}$; *при* $v=(2u-1)^2(2-u)/27$ *заменой с* $s_1=(1-2u)s_2/3$, $r_2=0$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$; *при* $v=u^2(3-2u)/27$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-3u^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_3^{4,0}$;

8) $CSF_{13}^{4,0}$ *при* $u=2/3$, $\theta_*(\theta_*^3-12)\ge 0$ *заменой с* $r_1=-(\theta_*^2+(\theta_*^4-12\theta_*)^{1/2})(2\theta_*)^{-1/2}$, $s_1=\theta_* s_2$, *где* θ_* *– корень кубического уравнения* $\theta^3-3\theta v-3=0$, *сводится к* $SF_1^{4,0}$;

9) $CSF_{16}^{4,0}$ *при* $u=1/3$, $v=-2/3$ *заменой с* $r_1=2r_2$, $s_1=-s_2$ *сводится к* $SF_{15}^{3,0}$; *при* $v=(1-9u\pm(1-3u)(1-12u)^{1/2})u^{-2}/27$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=(1\mp(1-12u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$;

10) $CSF_{17}^{4,0}$ *при* $u=1/3$, $v=-6^{1/3}$ *заменой с* $r_1=-(60+36\sqrt{3})^{1/3}r_2/2$, $s_2=(\sqrt{3}+5/3)^{1/3}s_1$ *сводится к* $SF_{8,\kappa}^{4,0}$; *при* $v=2^{1/3}(2-3u)u^{-1/3}/2$ *заменой с* $r_2=(u/2)^{1/3}r_1$, $s_2=-(4u)^{1/3}s_1$ *сводится к* $SF_{16}^{4,0}$;

11) $CSF_{21}^{4,0}$ *при* $u>0$, $v=u^{-2}$ *заменой с* $r_2=u^{1/2}r_1$, $s_2=-u^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF_{8,\kappa}^{4,0}$;

12) $CSF^{4,0}_{22}$ *при* $u=1/3,\ v=1/6$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-2s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8,\kappa}$*; при* $v=(2u-1)(3u-2)^{-3}$ *заменой с* $r_2=(3u-2)r_1,\ s_2=u(3u-2)(1-2u)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{16}$*; при* $v=-16u^2(u-1)^{-1}(3u+1)^{-3}$ *заменой с* $r_2=(u-1)(3u+1)(4u)^{-1}r_1,\ s_2=-(3u+1)s_1/2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{17}$*;*

13) $CSF^{4,0}_{25}$ *при* $u=1/3,\ v=3^{2/3}$ *заменой с* $r_1=-3^{1/3}r_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF^{4,0}_{2}$*; при* $u=5/9,\ v=3^{1/3}$ *заменой с* $r_1=3^{2/3}r_2,\ s_2=-2\cdot3^{-2/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{3}$*; при* $u=(\theta_*^3+1)\theta_*^{-3}/2,\ v=(\theta_*^3-3)(2\theta_*)^{-1}$*, где* θ_* *– корень уравнения* $\theta^9-\theta^6+15\theta^3+9=0$*, заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=-(\theta_*^3+1)(2\theta_*)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$*;*

14) $CSF^{4,0}_{26}$ *при* $u=9/8,\ v=-27/32$ *заменой с* $r_1=3r_2/2,\ s_1=-3s_2/4$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$*; при* $u=-18,\ v=216$ *заменой с* $r_1=3r_2,\ s_1=-6s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{25}$*;*

15) $CSF^{4,0}_{28}$ *при* $u=3(2\pm\sqrt2)^{2/3}/2,\ v=-2^{-1/3}(1\pm\sqrt2)^{1/3}$ *заменой с* $r_1=(2\pm\sqrt2)^{1/3}r_2,\ s_2=-(2\pm\sqrt2)^{2/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{3}$*; при* $u=2^{-1/3}\cdot3(\pm\sqrt5-1)^{1/3},\ v=2^{-1/3}\cdot(7\pm3\sqrt5)^{1/3}$ *заменой с* $r_1=-(28\pm12\sqrt5)^{1/3}r_2/2,\ s_1=2^{-1/3}\cdot(3\mp\sqrt5)^{1/3}s_2$*, сводится к* $SF^{4,0}_{13}$*; при* $u=3^{2/3},\ v=-3^{1/3}$ *заменой с* $r_1=-3^{1/3}r_2,\ s_1=0$ *– к* $SF^{4,0}_{25}$*;*

16) $CSF^{4,0}_{31}$ *при* $u=-2^{1/3}/6,\ v=-2^{1/3}/3$ *заменой с* $r_2=2^{2/3}r_1,\ s_1=-2^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$*; при* $u,v=2^{1/3}/3$ *заменой с* $r_1=2^{1/3}r_2,\ s_2=-2^{2/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{25}$*;*

17) $CSF^{4,0}_{32}$ *при* $u=3,\ v=-1$ *заменой с* $r_1=r_2,\ s_1=-s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{6}$*;*

18) $CSF^{4,0}_{34,\kappa}$ *при* $\{u=-\kappa,\ v=1/3\}$ *заменой с* $r_1=\pm\sqrt{6\sqrt3-9\kappa}\,r_2/3,\ s_1=\mp\sqrt{6\sqrt3-9\kappa}(2+\sqrt3\kappa)s_2/3$ *сводится к* $SF^{3,0}_{15}$*; при* $\{v=-(2u-\kappa)(u-2\kappa)/9,\ u>\kappa/2\}$ *заменой с* $r_1=\pm\sqrt{6u-3\kappa}\,r_2/3,\ s_1=\mp\sqrt{6u-3\kappa}\,s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{1}$*; при* $\{u=(\sqrt5+3\kappa)/2,\ v=-(3+\sqrt5\kappa)/18\}$ *заменой с* $r_1=\pm\sqrt{6\sqrt5-6\kappa}(3+\sqrt5\kappa)r_2/12,\ s_1=\mp\sqrt{6\sqrt5-6\kappa}\,s_2/6$ *сводится к* $SF^{4,0}_{3}$*; при* $\{u=\kappa,\ v>0\}$ *заменой с* $r_1=\pm v^{1/4}r_2,\ s_1=\mp v^{1/4}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8}$*; при* $\{u=2\kappa+\sqrt3,\ v=-(2+\sqrt3\kappa)/3\}$ *заменой с* $r_1=\pm\sqrt{6\sqrt3+9\kappa}\,r_2/3,\ s_1=\mp\sqrt{6\sqrt3+9\kappa}(2-\sqrt3\kappa)s_2/3$ *сводится к* $SF^{4,0}_{16}$*; при* $\{v=u/9,\ \kappa=1\}$ *заменой с* $r_2=-\sqrt3r_1,\ s_2=\sqrt3s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{21}$*; при* $\{u=-1,\ v\ge-1/9,\ \kappa=1\}$ *заменой с* $r_1=(6v+2+2\ell)^{1/2}r_2/2,\ s_2=-(6v+2+2\ell)^{1/2}(3v-1+\ell)(8v)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{32}$ *(при* $v=-1/9$ *– к* $SF^{2,0}_{10}$*); при* $\{u=1,\ v\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty),\ \kappa=-1\}$ *заменой с* $r_1=(-6v-2+2\ell)^{1/2}r_2/2,\ s_2=-(-6v-2+2\ell)^{1/2}(-3v+1+\ell)(8v)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{32}$*, где* $\ell=((1+v)(9v+1))^{1/2}$*; при* $\{u=1,\ v=-1/9,\ \kappa=-1\}$ *заменой с* $s_1=\pm\sqrt3(1+\sqrt2)s_2/3,\ r_2=\mp\sqrt3(1+\sqrt2)r_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8}$*;*

19) $CSF^{4,0}_{35}$ *при* $v=(3u)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=-ur_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{21}$*; при* $u=2\cdot(3/5)^{1/3},\ v=2\cdot75^{-1/3}/3$ *заменой с* $r_1=15^{-1/3}\cdot(2\sqrt5-5)^{1/3}r_2,\ s_1=-(1125+450\sqrt5)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{1}$*; при* $u=(3^{2/3}\pm3^{1/6})/2,\ v=(\pm3^{5/6}-3^{1/3})/6$ *заменой с* $r_1=\mp3^{-1/6}r_2,\ s_1=-3^{1/3}(3\mp\sqrt3)s_2/6$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$*; при* $u=3\theta_*^2(1+12\theta_*^3)\ell_*,\ v=\theta_*(9\theta_*^6-3\theta_*^3-1)\ell_*/3$*, где* θ_* *– корень уравнения* $27\theta^9-90\theta^6+3\theta^3-1=0,\ \ell_*=(18\theta_*^6-3\theta_*^3+1)^{-1}$*, заменой с* $r_1=-(81\theta_*^6-6\theta_*^3+1)\ell_*\theta_*^{-2}r_2/3,\ s_1=\theta_*s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{2}$*;*

20) $CSF^{4,0}_{36}$ *при* $\{u=(2/81)^{1/3},\ v=-(3/2)^{1/3}\}$ *заменой с* $r_1=3^{-1/3}\cdot(4-2\sqrt5)^{1/3}r_2,\ s_1=(36+18\sqrt5)^{1/3}s_2/3$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8,\pm}$*; при* $\{u=(8/3\pm2\sqrt2)^{1/3}/3,\ v=(3\pm3\sqrt2)^{1/3}\}$ *заменой с* $r_1=(36\pm18\sqrt2)^{1/3}r_2/3,\ s_1=(-1\pm2\sqrt2/3)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{13}$*; при* $\{u=-2^{-5/3},\ v=2^{-4/3}\}$ *заменой с* $s_1=-2^{1/3}s_2,\ r_2=2^{2/3}r_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$*; при* $\{u=2^{2/3},\ v=-2^{1/3}\}$ *заменой с* $r_1=2^{2/3}r_2,\ s_2=-2^{1/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{25}$*; при* $u=\theta_*^4(4-9\theta_*^3)^{-1},\ v=(9\theta_*^6-12\theta_*^3+4)\theta_*^{-1}(4-9\theta_*^3)^{-1}$*, где* θ_* *– корень уравнения* $27\theta^9-180\theta^6+144\theta^3-32=0$*, заменой с* $r_1=\theta_*(3\theta_*^3-2)(4-9\theta_*^3)^{-1}r_2,\ s_1=\theta_*s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{3}$*;*

21) $CSF_{37}^{4,0}$ *при* $v=u^2,\ u>0$ *заменой с* $r_1=-u^{1/2}r_2,\ s_1=u^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$; *при* $v=-u^2,\ u<0$ *заменой с* $r_1=-(-u)^{1/2}r_2,\ s_1=(-u)^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF_{34}^{4,0}$; *при* $v=(-u)^{3/2}((-u)^{1/2}-1)(3(-u)^{1/2}+1)^{-1},\ u<0$ *заменой с* $r_1=(-u)^{1/2}r_2$, $s_2=-(3(-u)^{1/2}+1)(-u)^{-1/2}s_1/2$ *сводится к* $SF_{28}^{4,0}$; *при* $\{u=1/9,\ v=-1/81\}$ *заменой с* $s_1=(-1\pm\sqrt{5})s_2/6,\ \ r_2=3(1\mp\sqrt{5})r_1/2$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$.

Непосредственной проверкой установлено, что вышеперечисленные CSF при других значениях своих параметров к предшествующим CSF не сводятся, а оставшиеся семь CSF : $CSF_1^{3,0}$, $CSF_4^{3,0}$, $CSF_9^{3,0}$, $CSF_{15}^{3,0}$, $CSF_{20}^{3,0}$, $CSF_{23,\kappa}^{3,0}$, $CSF_{24}^{3,0}$ ни при каких значениях параметров не сводятся к предшествующим, очевидно, как и $CSF_{1,\kappa}^{2,0}$ с $CSF_{10,\kappa}^{2,0}$.

Теперь найдем все линейные замены (16), которые, сохраняя исследуемую $CSF_i^{m,0}$ $(m=2,3,4)$, меняют в ней значения параметров с целью максимально ограничить их возможные значения, что согласно определению 8 из [1, 3.3] приведет к выделению канонических форм из структурных.

Утверждение 14. *Только для приведенных ниже десяти* $CSF_i^{m,0}$ *удается получить следующие ограничения на значения параметров:*

1) $CSF_{1,\kappa}^{2,0}$ *с* $\sigma=-1,\ \kappa=-1$ *заменой с* $r_1,s_2=0,\ s_1,r_2=1$ *сводится к* $CSF_{1,\kappa}^{2,0}$ *с* $\sigma=1,\ \kappa=-1$;

2) $CSF_{10,\kappa}^{2,0}$ *с* $\sigma=-1$ *заменой с* $-r_1,s_2=-1,\ s_1,r_2=0$ *сводится к* $CSF_{10,\kappa}^{2,0}$ *с* $\sigma=1$;

3) $CSF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma=-1,\ u=-1/3$ *заменой с* $r_1=\sqrt{3}/3,\ s_1=2^{1/3}3^{-1/6},\ r_2=2^{2/3}3^{-5/6}$, $s_2=-\sqrt{3}/3$ *сводится к* $CSF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma=1,\ u=-1/3$;

4) $CSF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\sigma=-1$ *заменой с* $-r_1,s_2=-1,\ s_1,r_2=0$ *сводится к* $CSF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\sigma=1$;

5) $CSF_1^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*,\ u=u_*,\ v=v_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0,\ s_1=|u_*|^{1/2}u_*^{-1},\ s_2=|u_*|^{1/2}v_*^{-1}$ *сводится к* $CSF_1^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}u_*,\ u=u_*v_*^{-2},\ v=v_*^{-1}$;

6) $CSF_3^{4,0}$ *с* $\sigma=-1,\ u=-2/9,\ v=3$ *заменой с* $r_1=-\sqrt{5}/5,\ s_1=-6\sqrt{5}/5$, $r_2=-2\sqrt{5}/15,\ s_2=\sqrt{5}/5$ *сводится к* $CSF_3^{4,0}$ *с* $\sigma=1,\ u=-2/9,\ v=3$;

7) $CSF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $\kappa=\kappa_*,\ \sigma=\sigma_*,\ u=u_*,\ v=v_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0,\ s_1=|u_*|^{-1/2}$, $r_2=|v_*|^{-1/2}$ *сводится к* $CSF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $\kappa=\operatorname{sign}(u_*v_*),\ \sigma=\sigma_*\operatorname{sign}v_*,\ u=\kappa_*v_*^{-1},\ v=\kappa u_*^{-1}$ *и, в частности,* $CSF_{8,\kappa_*}^{4,0}$ *с* $|u_*|,|v_*|>1$ *сводится к* $CSF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $|u|,|v|<1$; *также* $CSF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $\kappa=\kappa_*,\ \sigma=\sigma_*,\ u=u_*,\ v=\kappa_*u_*^{-1}$ *заменой с* $r_1=|3u_*-1|^{-1/2},\ s_1=-|u_*+1|^{-1/2}$, $r_2=(\kappa_*u_*)^{1/2}|3u_*-1|^{-1/2},\ s_2=(\kappa_*u_*)^{1/2}|u_*+1|^{-1/2}$ *сводится к* $CSF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $\kappa=\operatorname{sign}((3u_*-1)(u_*+1)),\ \sigma=\sigma_*\operatorname{sign}(3u_*-1),\ u=(u_*+1)(3u_*-1)^{-1},\ v=\kappa u^{-1}$ *и, в частности,* $CSF_{8,\kappa_*}^{4,0}$ *с* $u_*\in(-\infty,-1/3]\cup[1,+\infty)$ *сводится к* $CSF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $u\in[-1/3,1]$;

8) $CSF_{21}^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*,\ u=u_*,\ v=v_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0,\ s_1=|u_*|^{-1/2},\ r_2=u_*|u_*|^{-7/6}|v_*|^{-1/3}$ *сводится к* $CSF_{21}^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}u_*,\ u=u_*^{-1/3}v_*^{-2/3},\ v=v_*^{1/3}u_*^{-4/3}$ *и, в частности,* $CSF_{21}^{4,0}$ *с* $|u_*|>1,\ 1<|v_*|<u_*^4$ *сводится к* $CSF_{21}^{4,0}$ *с* $|u|,|v|<1$;

9) $CSF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*,\ u=-\kappa,\ v=-1$ *заменой с* $r_1,s_2=0,\ s_1,r_2=1$ *сводится к* $CSF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $\sigma=-\sigma_*$ *и теми же* u,v,κ; *также* $CSF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $u=u_*,\ v=v_*,\ \kappa=\kappa_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0,\ s_1=v|uv|^{-3/4},\ r_2=|uv|^{-1/4}$ *сводится к* $CSF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $\kappa=\operatorname{sign}(u_*v_*)$, $u=u_*^{-1}\kappa\kappa_*,\ v=v_*u_*^{-2}$ *и тем же* σ;

10) $CSF_{35}^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*,\ u=-(3/2)^{1/3},\ v=2^{1/3}3^{-4/3}$ *заменой с* $r_1=1,\ s_1=-(2/3)^{1/3}$, $r_2=12^{1/3},\ s_2=1$ *сводится к* $CSF_{35}^{4,0}$ *с* $\sigma=-\sigma_*$ *и теми же* u,v.

Список 14. Тридцать $CF_i^{m,0}$ с $m = 2, 3, 4$ системы (14) $(\sigma, \kappa = \pm 1, \quad R \neq 0)$

$CF^{2,0}_{1,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{matrix} \sigma = 1 \\ [\sigma = -1] \end{matrix}$ при $\kappa = -1$; $\quad CF^{2,0}_{10,\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8, \quad [\sigma = -1]$;

$CF^{3,0}_{1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_4$; $\quad CF^{3,0}_{2,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} \kappa & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_5, \quad u \neq 3/2$ при $\kappa = -1$;

$CF^{3,0}_{4} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_6$; $\quad CF^{3,0}_{9} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_7$;

$CF^{3,0}_{15} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8, \quad \begin{matrix} \sigma = 1 \\ [\sigma = -1] \end{matrix}$ при $u = -1/3$; $\quad CF^{3,0}_{20} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9$;

$CF^{3,0}_{23,\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \quad [\sigma = -1]$; $\quad CF^{3,0}_{24} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}$;

$CF^{4,0}_{1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_6, \quad v \neq u, \quad \begin{matrix} |v| \leq 1 \\ [|v| > 1] \end{matrix}, \quad \begin{matrix} v \neq 1 \text{ при } u = 1/9,\, 1/3, \\ v \neq -1 \text{ при } u = -1/9; \end{matrix}$

$CF^{4,0}_{2} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_7, \quad v \neq (3u)^{-1},\, 1 + 2(9u)^{-1},\, (12u + 1 \pm (1 - 8u)^{1/2})(8u)^{-1}$;

$CF^{4,0}_{3} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_7, \ v \neq -u,\, 3/2 \pm (-2u)^{-1/2}, \quad \begin{matrix} \sigma = 1 \\ [\sigma = -1] \end{matrix}$ при $\{u = -2/9, v = 3\}$;

$CF^{4,0}_{6} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_8, \quad v \neq u,\, (9u + 2)u^{-2}/27$;

$CF^{4,0}_{8,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}_8, \ v \neq u\kappa, \ \begin{matrix} v \neq -3 \text{ при } \{u = -1/3,\, \kappa = 1\}, \\ v \neq (3u - 2)(2u - 1)\kappa \text{ при } \kappa(1 - 2u) > 0, \\ \{|u| < 1,\ |v| < 1\}, \text{ если } [\{|u| > 1,\ |v| > 1\}], \\ u \in [-1/3, 1] \ [u \in (-\infty, -1/3) \cup (1, +\infty)] \text{ при } v = \kappa u^{-1}; \end{matrix}$

$CF^{4,0}_{10} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_9, \quad u \neq 1, \quad v \neq (2u - 1)^2(2 - u)/27,\, u^2(3 - 2u)/27$;

$CF^{4,0}_{13} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & v \end{pmatrix}_9, \quad \begin{matrix} v \neq -u^{-2/3}, \quad u \neq 2/3 \text{ при } \theta_*(\theta_*^3 - 12) \geq 0, \\ \text{где } \theta_* \text{ – корень уравнения } \theta^3 - 3\theta v - 3 = 0; \end{matrix}$

$CF^{4,0}_{16} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} v \neq (1 - 9u \pm (1 - 3u)(1 - 12u)^{1/2})u^{-2}/27, \\ v \neq -2/3 \text{ при } u = 1/3; \end{matrix}$

$CF^{4,0}_{17} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} v \neq 2^{1/3}(1 - 3u/2)u^{-1/3}, \\ v \neq -6^{1/3} \text{ при } u = 1/3; \end{matrix}$

$CF^{4,0}_{21} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} v \neq u, \quad v \neq u^{-2} \text{ при } u > 0, \\ \{|u|, |v| < 1\}, \text{ если } [\{|u| > 1,\ 1 < |v| < u^4\}]; \end{matrix}$

$CF^{4,0}_{22} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} v \neq u,\, (2u - 1)(3u - 2)^{-3},\, -16u^2(u - 1)^{-1}(3u + 1)^{-3}, \\ v \neq 1/6 \text{ при } u = 1/3; \end{matrix}$

$CF^{4,0}_{25} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & v & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}, \quad \begin{matrix} v \neq 9^{1/3} \text{ при } u = 1/3, \\ v \neq 3^{1/3} \text{ при } u = 5/9, \end{matrix}$

$v \neq (\theta_*^3 - 3)(2\theta_*)^{-1}$ при $u = (\theta_*^3 + 1)\theta_*^{-3}/2$, где θ_* – корень уравнения $\theta^9 - \theta^6 + 15\theta^3 + 9 = 0$;

$CF^{4,0}_{26} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}, \quad v \neq -27/32$ при $u = 9/8, \quad v \neq 216$ при $u = -18$;

$$CF_{28}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},\quad \begin{array}{l} v\neq -u,\quad v\neq -2^{-1/3}(1\pm\sqrt{2})^{1/3}\ \text{ при }\ u=3(2\pm\sqrt{2})^{2/3}/2,\\ v\neq 2^{-1/3}\cdot(7\pm3\sqrt{5})^{1/3}\ \text{ при }\ u=2^{-1/3}\cdot 3(\pm\sqrt{5}-1)^{1/3},\\ v\neq -3^{1/3}\ \text{ при }\ u=3^{2/3};\end{array}$$

$$CF_{31}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{12},\quad v\neq -2^{1/3}/3\ \text{ при }\ u=-2^{1/3}/6,\quad v\neq u\ \text{ при }\ u=2^{1/3}/3;$$

$$CF_{32}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{12},\quad v\neq u,\quad v\neq -1\ \text{ при }\ u=3;$$

$$CF_{34,\kappa}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\1&0&\kappa&0\end{pmatrix}_{12},\quad v\neq u\kappa,\quad \begin{array}{c}|u|\le 1\\ [|u|>1]\end{array},\ \begin{array}{c}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{array}\ \text{ при }\{u=-\kappa,\, v=-1\},$$

$v\neq 1/3$ при $u=-\kappa,$ $v<0$ при $u=\kappa,$ $v\neq -(2u-\kappa)(u-2\kappa)/9$ при $u>\kappa/2,$
$v\neq u/9$ при $\kappa=1,$ $v\neq -(3+\sqrt{5}\kappa)/18$ при $u=(\sqrt{5}+3\kappa)/2,$ $v<-1/9$ при $\{u=-1,\,\kappa=1\},$
$v\neq -(2+\sqrt{3}\kappa)/3$ при $u=2\kappa+\sqrt{3},$ $v\in(-1,-1/9)\cup(-1/9,0)$ при $\{u=1,\,\kappa=-1\},$

$$CF_{35}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{13},\quad v\neq (3u)^{-1},\quad \begin{array}{c}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{array}\ \text{ при }\{u=(3/2)^{1/3},\, v=2^{1/3}3^{-4/3}\},$$

$v\neq(\pm3^{5/6}-3^{1/3})/6$ при $u=(3^{2/3}\pm3^{1/6})/2,$ $v\neq 2\cdot75^{-1/3}/3$ при $u=2\cdot(3/5)^{1/3},$
$v\neq\theta_*(9\theta_*^6-3\theta_*^3-1)(18\theta_*^6-3\theta_*^3+1)^{-1}/3$ при $u=3\theta_*^2(1+12\theta_*^3)(18\theta_*^6-3\theta_*^3+1)^{-1},$
где θ_* – корень уравнения $27\theta^9-90\theta^6+3\theta^3-1=0;$

$$CF_{36}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&u\\1&0&v&0\end{pmatrix}_{13},\quad \begin{array}{l} v\neq -u^2,\quad v\neq 2^{-4/3}\ \text{ при }\ u=-2^{-5/3},\quad v\neq -2^{1/3}\ \text{ при }\ u=2^{2/3},\\ v\neq(9\theta_*^6-12\theta_*^3+4)\theta_*^{-1}(4-9\theta_*^3)^{-1}\ \text{ при }\ u=\theta_*^4(4-9\theta_*^3)^{-1},\\ \text{где }\ \theta_* -\ \text{корень уравнения }\ 27\theta^9-180\theta^6+144\theta^3-32=0,\end{array}$$

$v\neq-(3/2)^{1/3}$ при $u=(2/81)^{1/3},$ $v\neq(3\pm3\sqrt{2})^{1/3}$ при $u=3^{-4/3}\cdot(8\pm6\sqrt{2})^{1/3};$

$$CF_{37}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&v\\1&1&0&0\end{pmatrix}_{14},\quad \begin{array}{l} v\neq u,\, u^2\operatorname{sign}u,\, -(4u+(-u)^{1/2}+3(-u)^{3/2})(9u+1)^{-1},\\ v\neq -1/81\ \text{ при }\ u=1/9.\end{array}$$

7.4 Сведение исходной системы к каноническим формам

Множество всех систем (14) с $R\neq0$ разобьем на два непересекающихся семейства.

C1) $\underline{a_2d_1\neq 0}$. Тогда заменой (16) с $r_1=\sqrt{3},$ $s_1=-\sqrt{3}b_2,$ $r_2=0,$ $s_2=3\sqrt{3}a_2$ система (14) сводится к системе (17) вида

$$\begin{pmatrix}\tilde a_1&\tilde b_1&\tilde c_1&\tilde d_1\\1&0&\tilde c_2&\tilde d_2\end{pmatrix}\qquad(\tilde d_1^2+\tilde d_2^2\neq0),\tag{85}$$

в которой $\tilde a_1=3a_1+b_2,$ $\tilde b_1=-9a_1b_2+9b_1a_2,$ $\tilde c_1=9a_1b_2^2-18b_1b_2a_2+27c_1a_2^2-3b_2^3+9c_2b_2a_2,$ $\tilde d_1=-3a_1b_2^3+9b_1b_2^2a_2-27c_1b_2a_2^2+81d_1a_2^3+2b_2^4-9c_2b_2^2a_2+27b_2d_2a_2^2,$ $\tilde a_2=1,$ $\tilde b_2=0,$ $\tilde c_2=-3b_2^2+9a_2c_2,$ $\tilde d_2=2b_2^3-9c_2b_2a_2+27a_2^2d_2$ и которую будем упрощать вместо исходной.

C2) $a_2d_1=0$. Тогда, не уменьшая общности, будем считать, что $\underline{a_2=0}$, поскольку в противном случае, когда в системе (14) $a_2\neq0$ и $d_1=0,$ сделаем перенумерацию (22). В результате любая система (14) из C2) имеет вид

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\0&b_2&c_2&d_2\end{pmatrix}\qquad(a_1\neq0,\quad d_1^2+d_2^2\neq0).\tag{86}$$

Замечание 15. Система (14) без дополнительных ограничений на свои элементы не может быть сведена линейной неособой заменой к системе с двумя нулевыми элементами.

Введем следующие константы:

$\psi_1 = 3\tilde a_1^2 + 4\tilde b_1$, $\psi_2 = 27\tilde d_2^2 - 4\tilde b_1^3$, $\psi_3 = 3\tilde a_1 + \tilde c_2\theta_*$, $\psi_4 = \psi_3\theta_* - 3$, $\psi_5 = 6\tilde b_1 + 3\tilde c_2$, $\psi_6 = \tilde a_1 - \zeta_*$, $\psi_7 = 3\tilde a_1^2 - 2\tilde c_2$, $\psi_8 = 9\tilde c_2\theta_*^4 - 3\tilde c_2^2\theta_*^2 + 27\tilde d_1\theta_*^2 + \tilde c_2^3$, $\psi_9 = 3\theta_*^2 + \tilde c_2$, $\psi_{10} = \tilde b_1^2 + 9\tilde d_1$, $\psi_{11} = \tilde a_1 + 2^{2/3}\tilde d_2^{1/3}$, $\psi_{12} = \tilde d_2 + \tilde c_2\theta_* + \theta_*^3$, $\psi_{13} = 2\tilde c_2^3 + 27\tilde d_2^2 + 27\tilde c_2\tilde d_2\theta_* + 18\tilde c_2^2\theta_*^2 - 27\tilde d_2\theta_*^3$, $\psi_{14} = 3\tilde a_1^2 + \tilde b_1 + \tilde c_2$.

Теорема 9. *Пусть в системе* (14) $\underline{a_2 d_1 \neq 0}$ *и результант* $\underline{R \neq 0}$, *тогда система* (85) *указанной ниже линейной неособой заменой* (15) *сводится к соответствующей* $CF^{m,0}$ $(m = 2, 3)$ *только при следующих условиях на коэффициенты:*

$CF^{2,0}_{1,\kappa}$: $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde d_1 = \tilde b_1^2/9}$, $\underline{\tilde c_2 = \tilde b_1}$, $\underline{\tilde d_2 = -\tilde a_1\tilde b_1/3}$, $\underline{\psi_1 > 0}$, *тогда замена с* $r_1 = (3\tilde a_1 - (3\psi_1)^{1/2})r_2/6$, $s_1 = (3\tilde a_1 + (3\psi_1)^{1/2})s_2/6$, $r_2 = 3\sqrt{2}\psi_1^{-1/2}|3\tilde a_1 - (3\psi_1)^{1/2}|^{-1/2}$, $s_2 = 3\sqrt{2}\psi_1^{-1/2}|3\tilde a_1 + (3\psi_1)^{1/2}|^{-1/2}$ *сводит* (85) *к* $CF^{2,0}_{1,\kappa}$ *с* $\kappa = -\operatorname{sign}\tilde b_1$, $\sigma = \operatorname{sign}(3\tilde a_1 + (3\psi_1)^{1/2})$; *при этом* $\sigma = 1$ *при* $\tilde b_1 > 0$ $(\kappa = -1)$;

$CF^{2,0}_{10,\kappa}$: *1)* $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, $\underline{\tilde d_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1 = |\tilde d_1|^{-1/8}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = r_1^3$ *сводит* (85) *к* $CF^{2,0}_{10,\kappa}$ *с* $\kappa = \operatorname{sign}\tilde d_1$, $\sigma = 1$;

2) $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = -3\tilde d_2}$, $\underline{\tilde d_1 = (27\tilde d_2^2 - \tilde b_1^3)(9\tilde b_1)^{-1}}$, $\underline{\tilde c_2 = -\tilde b_1}$, $\underline{\psi_2 > 0}$, *тогда замена с* $r_1 = (9\tilde d_2 - (3\psi_2)^{1/2})(6\tilde b_1)^{-1}r_2$, $s_1 = (9\tilde d_2 + (3\psi_2)^{1/2})(6\tilde b_1)^{-1}s_2$, $r_2 = 27^{1/8}\cdot 6^{3/4}|9\tilde d_2 + (3\psi_2)^{1/2}|^{5/4}(\psi_2 - 3\tilde d_2(3\psi_2)^{1/2})(24\tilde b_1\psi_2)^{-1}|\tilde b_1|^{-13/8}$, $s_2 = \psi_2(9\tilde d_2 - (3\psi_2)^{1/2})\tilde b_1^{-3}r_2^3/18$ *сводит* (85) *к* $CF^{2,0}_{10,\kappa}$ *с* $\kappa = \operatorname{sign}\tilde b_1$, $\sigma = 1$;

$CF^{3,0}_{1}$: $\underline{\psi_1 \geq 0}$, $\underline{\text{существует } \zeta_*}$ *– корень уравнения* $3\zeta^2\eta_* - 3\eta_*(\tilde a_1 - \eta_*)\zeta + \tilde c_1 = 0$, *где* $\eta_* = (3\tilde a_1 \pm (3\psi_1)^{1/2})/6$, $\underline{\tilde a_1 \neq \eta_* + \zeta_*}$, $\underline{\tilde d_1 = \zeta_*\eta_*(2\zeta_*\eta_* + \eta_*\tilde a_1 + 2\zeta_*^2 - \eta_*^2 - 2\zeta_*\tilde a_1)}$, $\underline{\tilde c_2 = 3(\tilde a_1 - \eta_*)(\zeta_* - \eta_*) - 3\zeta_*^2}$, $\underline{\tilde d_2 = \tilde a_1(\eta_* + 2\zeta_*)(\eta_* - \zeta_*) + (\zeta_* + \eta_*)(2\zeta_*^2 - \eta_*^2)}$, *тогда замена с* $r_1 = \eta_* r_2$, $s_1 = \zeta_* s_2$, $r_2 = |\tilde a_1 - \eta_*|^{3/2}(\eta_* - \zeta_*)^{-1}(\eta_* + \zeta_* - \tilde a_1)^{-1}(\tilde a_1 - \eta_*)^{-1}/3$, $s_2 = (\eta_* - \zeta_*)^{-1}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}$ *сводит* (85) *к* $CF^{3,0}_{1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1 - \eta_*)$, $u = (3\eta_* + 2\zeta_* - 2\tilde a_1)(\tilde a_1 - \eta_*)(\eta_* + \zeta_* - \tilde a_1)^{-2}/9$;

$CF^{3,0}_{2,\kappa}$: $\underline{\psi_1 \geq 0}$, $\underline{\text{существует } \zeta_*}$ *– корень уравнения* $3\zeta_*^2 + (6\eta_* - 3\tilde a_1)\zeta_* + 3\tilde a_1\eta_* - 3\eta_*^2 + 2\tilde c_2 = 0$, *где* $\eta_* = (3\tilde a_1 \pm (3\psi_1)^{1/2})/6$, $\underline{\tilde a_1 \neq \eta_* + \zeta_*}$, $\underline{\tilde c_1 = 3\eta_*(\eta_* + \zeta_*)(\tilde a_1 - \eta_* - \zeta_*)/2}$, $\underline{\tilde d_1 = \zeta_*\eta_*(\eta_*^2 + 4\eta_*\zeta_* + \zeta_*^2 - \tilde a_1(\zeta_* + \eta_*))/2}$, $\underline{d_2 = ((2\eta_* + \zeta_*)(\eta_* - \zeta_*)\tilde a_1 + (\zeta_* + \eta_*)(\zeta_*^2 + 3\eta_*\zeta_* - 2\eta_*^2))/2}$, $\underline{\zeta_* \neq 0 \text{ при } (\tilde a_1 - \eta_*)(\tilde a_1 - 3\eta_* - \zeta_*) > 0}$, *тогда замена с* $r_1 = \eta_* r_2$, $s_1 = \zeta_* s_2$, $r_2 = \sqrt{2}(\eta_* - \zeta_*)^{-1}|\tilde a_1 - 3\eta_* - \zeta_*|^{-1/2}$, $s_2 = (\eta_* - \zeta_*)^{-1}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}$ *сводит* (85) *к* $CF^{3,0}_{2,\kappa}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1 - \eta_*)$, $\kappa = -\sigma\operatorname{sign}(\tilde a_1 - 3\eta_* - \zeta_*)$, $u = 3(\tilde a_1 - \eta_* - \zeta_*)(\tilde a_1 - \eta_*)^{-1}/2$;

$CF^{3,0}_{4}$: *1)* $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde d_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |\tilde a_1|^{-1/2}$, $r_2 = |\tilde a_1|^{-3/2}$ *сводит* (85) *к* $CF^{3,0}_{4}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = \tilde d_2\tilde a_1^{-3}$;

2) $\underline{\tilde c_1 \neq 0}$, $\underline{\psi_4 \neq 0}$, $\underline{\tilde b_1 = \tilde c_2\theta_*\psi_3/3}$, $\underline{\tilde d_1 = \tilde c_2^2(\tilde c_2\theta_*^2\psi_4 + 9)/81}$, $\underline{\tilde d_2 = \tilde c_2(\tilde c_2\theta_*^2 - 3)(9\theta_*)^{-1}}$, *где* θ_* *– корень уравнения* $\underline{\tilde c_2^3\theta^3 + 3\tilde a_1\tilde c_2^2\theta^2 - 3\tilde c_2^2\theta - 9\tilde c_1 = 0 \ (\theta_* \neq 0)}$, *тогда замена с* $r_1 = -\tilde c_2\theta_* r_2/3$, $s_1 = 3\sqrt{3}(\tilde c_2\theta_*^2 + 3)^{-1}|\psi_3|^{-1/2}$, $r_2 = -3\sqrt{3}\psi_4|\psi_3|^{-1/2}(\tilde c_2\theta_*^2 + 3)^{-1}\psi_3^{-1}$, $s_2 = \theta_* s_1$ *сводит* (85) *к* $CF^{3,0}_{4}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_3$, $u = -\tilde c_2\psi_4^2\psi_3^{-3}\theta_*^{-1}$;

$CF^{3,0}_{9}$: *1)* $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde d_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |\tilde d_2|^{1/2}\tilde b_1^{-1}$, $r_2 = |\tilde d_2|^{1/2}\tilde d_2^{-1}$ *сводит* (85) *к* $CF^{3,0}_{9}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde d_2$, $u = \tilde d_2^2\tilde b_1^{-3}$;

2) $\underline{\tilde a_1 \neq \theta_*}$, *где* θ_* *– корень уравнения* $3\theta^3 - (3\tilde a_1^2 + 2\tilde b_1 + \tilde c_2)\theta - \tilde a_1(\tilde b_1 - \tilde c_2) = 0$, $\underline{\tilde c_1 = \theta_*\tilde b_1(4\theta_* - \tilde a_1)(\tilde a_1 - \theta_*)^{-1} + 6\theta_*^3}$, $\underline{\tilde d_1 = 2\tilde a_1\theta_*^3 + \tilde b_1\theta_*^2(2\tilde a_1 + \theta_*)(\tilde a_1 - \theta_*)^{-1} + \tilde b_1^2\theta_*(\tilde a_1 + 2\theta_*)(\tilde a_1 - \theta_*)^{-2}/3}$,

$\underline{\tilde d_2 = 2\theta_*^3 + \tilde b_1\theta_*(\tilde a_1 + 2\theta_*)(\tilde a_1 - \theta_*)^{-1} + \tilde b_1^2(\tilde a_1 + 2\theta_*)(\tilde a_1 - \theta_*)^{-2}/3}$, *тогда замена с* $r_1 = \theta_* r_2$, $s_1 = (2\tilde a_1\theta_* - 2\theta_*^2 + \tilde b_1)(3\tilde a_1\theta_* - 3\theta_*^2 + \tilde b_1)^{-2} r_2^{-1}$, $r_2 = \sqrt{3}(\tilde a_1 - \theta_*)|2\theta_* + \tilde a_1|^{-1/2}(3\tilde a_1\theta_* - 3\theta_*^2 + \tilde b_1)^{-1}$, $s_2 = (\theta_* - \tilde a_1)(3\tilde a_1\theta_* - 3\theta_*^2 + \tilde b_1)^{-2} r_2^{-1}$ *сводит* (85) *к* $CF_9^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(2\theta_* + \tilde a_1)$, $u = (2\tilde a_1^2 + 2\tilde a_1\theta_* - 4\theta_*^2 + 3\tilde b_1)(2\theta_* + \tilde a_1)^2(\tilde a_1 - \theta_*)^{-4}/27$;

3) $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\psi_5 > 0}$, $\underline{\tilde c_1 = \pm 2\tilde c_2\psi_5^{1/2}/3}$, $\underline{\tilde d_1 = -\tilde b_1\tilde c_2/3}$, $\underline{\tilde d_2 = \pm 2(\tilde b_1^2 + \tilde b_1\tilde c_2 + \tilde c_2^2)\psi_5^{-1/2}/3}$, *тогда замена с* $r_1 = \pm\psi_5^{1/2}/3$, $s_1 = \mp(\tilde b_1 + 2\tilde c_2)\psi_5^{-1/2} s_2$, $r_2 = -\sqrt{2}\psi_5^{1/4}(\tilde b_1 + \tilde c_2)^{-1}/2$, $s_2 = -\sqrt{2}\psi_5^{1/4}(\tilde b_1 + \tilde c_2)^{-1}/3$ *сводит* (85) *к* $CF_9^{3,0}$ *с* $\sigma = \pm 1$, $u = 4(\tilde b_1 - 4\tilde c_2)(9\psi_5)^{-1}$;

4) $\underline{\tilde a_1 \ne 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = -3\zeta_*^3/4}$, $\underline{\tilde d_1 = -\zeta_*^3\tilde a_1/4}$, $\underline{\tilde c_2 = 3\zeta_*(\zeta_* - 2\tilde a_1)/4}$, $\underline{\tilde d_2 = -\zeta_*^3/4}$, $\underline{3\tilde a_1^2 + 4\tilde c_2 > 0}$, *где* $\zeta_* = \tilde a_1 \pm 3^{-1/2}(3\tilde a_1^2 + 4\tilde c_2)^{1/2}$, *тогда замена с* $r_1 = -\zeta_* r_2/2$, $s_1 = \zeta_* s_2$, $r_2 = 2\zeta_*^{-1}|3\psi_6|^{-1/2}$, $s_2 = -4\sqrt{3}\psi_6|\psi_6|^{-1/2}(9\zeta_*)^{-1}(\zeta_* + 2\tilde a_1)^{-1}$ *сводит* (85) *к* $CF_9^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_6$, $u = 16\psi_6^3(\zeta_* + 2\tilde a_1)^{-3}/27$;

$CF_{15}^{3,0}$: *1)* $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde d_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |\tilde c_1|^{5/6}\tilde c_1^{-1}$, $r_2 = |\tilde c_1|^{-1/2}$ *сводит* (85) *к* $CSF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = \tilde d_2\tilde c_1^{-1}$;

2) $\underline{\tilde b_1 \ne 0}$, $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = -3\tilde d_2}$, $\underline{\tilde d_1 = \tilde b_1^2/3}$, $\underline{\tilde c_2 = -\tilde b_1}$, $\underline{\text{\textit{существует}}\ \theta_*}$ *– корень уравнения* $3\theta^4 - 6\tilde b_1\theta^2 + 12\tilde d_2\theta - \tilde b_1^2 = 0$ $(\theta_* \ne 0)$, *тогда замена с* $r_1 = \theta_* r_2$, $s_1 = (\tilde b_1 - \theta_*^2)(2\theta_*)^{-1} s_2$, $r_2 = -2|\theta_*|^{1/2}(\tilde b_1 - 3\theta_*^2)^{-1}$, $s_2 = 2\cdot 6^{1/3}|\theta_*|^{7/6}(3\tilde b_1 - \theta_*^2)^{-1/3}(\tilde b_1 - 3\theta_*^2)^{-1}$ *сводит* (85) *к* $CSF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}\theta_*$, $u = -1/3$;

3) $\underline{\tilde a_1 \ne 0}$, $\underline{\psi_6 \ne 0}$, *где* ζ_* *– любой из корней уравнения* $3\tilde a_1\zeta^2 - (3\tilde a_1^2 + 2\tilde b_1 + 2\tilde c_2)\zeta - \tilde a_1(\tilde b_1 - 2\tilde c_2) = 0$, $\underline{(3\tilde a_1^2 + 2\tilde b_1 + 2\tilde c_2)^2 + 12\tilde a_1^2(\tilde b_1 - 2\tilde c_2) \ge 0}$, $\underline{\tilde c_1 = (3\tilde a_1^2\zeta_*^2 + 6\tilde b_1\zeta_*^2 - 3\zeta_*^4 + \tilde b_1^2)(4\psi_6)^{-1}}$, $\underline{\tilde d_1 = \tilde b_1^2\zeta_*(4\zeta_* - \tilde a_1)\psi_6^{-2}/12 - \tilde a_1\zeta_*^3/4}$, $\underline{\tilde d_2 = \tilde b_1^2(2\tilde a_1 + \zeta_*)\psi_6^{-2}/12 + \tilde b_1\zeta_*/2 - \zeta_*^3/4}$, *тогда замена с* $r_1 = \zeta_* r_2$, $s_1 = -(\tilde a_1\zeta_* - \zeta_*^2 + \tilde b_1)(2\psi_6)^{-1} s_2$, $r_2 = 2|\psi_6|^{1/2}(3\tilde a_1\zeta_* - 3\zeta_*^2 + \tilde b_1)^{-1}$, $s_2 = -2\cdot 6^{1/3}|\psi_6|^{7/6}(3\tilde a_1\zeta_* - 3\zeta_*^2 + \tilde b_1)^{-1}(2\tilde a_1^2 - \tilde a_1\zeta_* - \zeta_*^2 + 3\tilde b_1)^{-1/3}$ *сводит* (85) *к* $CF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_6$, $u = (\zeta_* + 2\tilde a_1)(3\psi_6)^{-1}$ $(u \ne -1/3)$;

4) $\underline{\tilde a_1 \ne 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = \tilde c_2^2(3\tilde a_1^2 + 2\tilde c_2)\tilde a_1^{-3}/9}$, $\underline{\tilde d_1 = -2\tilde c_2^3\tilde a_1^{-2}/27}$, $\underline{\tilde d_2 = -2\tilde c_2^3(3\tilde a_1)^{-3}}$, *тогда замена с* $r_1 = 2\tilde c_2(3\tilde a_1)^{-1} r_2$, $s_1 = -\tilde c_2(3\tilde a_1)^{-1} s_2$, $s_2 = 3^{5/6}|\tilde a_1|^{3/2}|\psi_7|^{-1/6}\tilde c_2^{-1}(3\tilde a_1^2 + \tilde c_2)^{-1/3}$, $r_2 = -|\tilde a_1|^{3/2}|3\psi_7|^{1/2}(\tilde c_2\psi_7)^{-1}$ *сводит* (85) *к* $CF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1\psi_7)$, $u = 2(3\tilde a_1^2 + \tilde c_2)(3\psi_7)^{-1}$ $(u \ne -1/3)$;
при этом, если $u = -1/3$ *и* $\sigma = -1$, *то в утв. 14 указано, как сделать* $\sigma = 1$;

$CF_{20}^{3,0}$: *1)* $\underline{\tilde a_1 \ne 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, $\underline{\tilde d_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1 = |\tilde a_1|^{-1/2}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = |\tilde a_1|^{-1/2}\tilde a_1^{-1}$ *сводит* (85) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = \tilde d_1\tilde a_1^{-4}$;

2) $\underline{\tilde d_2 \ne 0}$, $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = \tilde d_1|\tilde d_2|^{-1/2}\tilde d_2^{-1}$, $r_2 = |\tilde d_2|^{-1/2}$ *сводит* (85) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde d_2$, $u = \tilde d_1^3\tilde d_2^{-4}$;

3) $\underline{\tilde c_1, \tilde c_2 \ne 0}$, $\underline{\psi_8 \ne 0}$, $\underline{\tilde a_1 = \psi_8\theta_*\tilde c_2^{-3}}$, $\underline{\tilde b_1 = 3\theta_*^2(3\tilde c_2\theta_*^2 - \tilde c_2^2 + 9\tilde d_1)\tilde c_2^{-2}}$, $\underline{\tilde d_2 = \tilde c_2(\tilde c_2 - 3\theta_*^2)(9\theta_*)^{-1}}$, *где* θ_* *– корень уравнения* $3\tilde c_2\theta^3 + 9\tilde d_1\theta - \tilde c_1\tilde c_2 = 0$, *тогда замена с* $s_1 = -\tilde c_2(3\theta_*)^{-1} s_2$, $r_1 = \theta_* r_2$, $r_2 = 3|\tilde c_2|^{3/2}|\theta_*|^{1/2}|\psi_8|^{-1/2}\psi_9^{-1}$, $s_2 = -9(3\tilde c_2\theta_*^2 - \tilde c_2^2 + 9\tilde d_1)|\tilde c_2|^{3/2}|\theta_*|^{5/2}|\psi_8|^{-1/2}(\psi_8\psi_9)^{-1}$ *сводит систему* (85) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde c_2\theta_*\psi_8)$, $u = 9(3\tilde c_2\theta_*^2 - \tilde c_2^2 + 9\tilde d_1)^3(\tilde c_2\theta_*)^4\psi_8^{-4}$;

4) $\underline{\psi_{10} \ne 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$ $(\tilde c_2 \ne 0)$, $\underline{\tilde b_1 < 0}$, $\underline{\tilde a_1 = \pm\psi_{10}(-3\tilde b_1)^{1/2}(27\tilde d_1)^{-1}}$, $\underline{\tilde c_2 = 9\tilde d_1\tilde b_1^{-1}}$, $\underline{\tilde d_2 = \mp 3^{1/2}\tilde d_1\psi_{10}\tilde b_1^{-1}(-\tilde b_1)^{-3/2}}$, *тогда замена с* $r_1 = \pm(-3\tilde b_1)^{1/2} r_2/3$, $s_1 = \pm 3^{3/2}\tilde d_1(-\tilde b_1)^{-3/2} s_2$, $r_2 = 3^{7/4}|\tilde d_1|^{1/2}(-\tilde b_1)^{5/4}|\psi_{10}|^{-1/2}(\tilde b_1^2 - 9\tilde d_1)^{-1}$, $s_2 = -3^{7/4}|\tilde d_1|^{1/2}(-\tilde b_1)^{13/4}(\tilde b_1^4 - 81\tilde d_1^2)^{-1}|\psi_{10}|^{-1/2}$ *сводит систему* (85) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma = \pm\operatorname{sign}(\tilde d_1\psi_{10})$, $u = -81\tilde b_1^4\tilde d_1^2\psi_{10}^{-4}$;

5) $\underline{\tilde c_1 \neq 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, $\underline{\tilde a_1 = \tilde c_1^3 \tilde d_1^{-2}/27}$, $\underline{\tilde b_1 = \tilde c_1^2 (3\tilde d_1)^{-1}}$, $\underline{\tilde d_2 = 0}$ *тогда замена с* $r_1 = 0$, $s_1 = 3^{3/2}\tilde d_1 |\tilde c_1|^{-1/2}\tilde c_1^{-1}$, $-s_2, r_2 = \sqrt{3}|\tilde c_1|^{-1/2}$ *сводит* (85) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = 81\tilde d_1^3 \tilde c_1^{-4}$;

$CF_{23,\kappa}^{3,0}$: *1)* $\underline{\tilde b_1 \neq 0}$, $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, $\underline{\tilde d_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1 = |\tilde d_1|^{-1/8}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = |\tilde d_1|^{-3/8}$ *сводит* (85) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa = \operatorname{sign}\tilde d_1$, $u = \tilde b_1 |\tilde d_1|^{-1/2}$;

2) $\underline{\tilde c_2 \neq 0}$, $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = 0}$, $\underline{\tilde d_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |\tilde d_1|^{7/8}\tilde d_1^{-1}$, $s_2 = |\tilde d_1|^{-3/8}$ *сводит* (85) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa = \operatorname{sign}\tilde d_1$, $u = \tilde c_2 |\tilde d_1|^{1/2}\tilde d_1^{-1}$;

3) $\underline{\tilde a_1 \neq 0}$, $\underline{\tilde b_1 = -3\cdot 2^{-1/3}\tilde d_2^{1/3}\psi_{11}}$, $\underline{\tilde c_1 = -3\cdot 2^{-2/3}\tilde d_2^{2/3}(\tilde a_1 + \psi_{11})}$, $\underline{\tilde d_1 = -\tilde d_2(\tilde a_1 + 3\cdot 2^{2/3}\tilde d_2^{1/3})/2}$, $\underline{\tilde c_2 = 3\cdot 2^{-4/3}\tilde d_2^{1/3}(3\tilde a_1 + 2^{5/3}\tilde d_2^{1/3})}$, *тогда замена с* $r_1 = 2^{9/8}|\psi_{11}|^{-1/2}/3$, $r_2 = -2^{-2/3}\tilde d_2^{-1/3} r_1$, $s_1 = 9\psi_{11} r_1^3/8$, $s_2 = 9\cdot 2^{-8/3}\psi_{11}\tilde d_2^{-1/3} r_1^3$ *сводит* (85) *к* $CF_{23,-}^{3,0}$ *с* $\kappa = -1$, $u = 3\tilde a_1(\sqrt{2}\psi_{11})^{-1}$;

4) $\underline{\tilde d_2 \neq 0}$, $\underline{\tilde a_1 = -\tilde d_2^3 \tilde d_1^{-2}}$, $\underline{\tilde b_1 = 3\tilde d_2^2 \tilde d_1^{-1}}$, $\underline{\tilde c_1 = -3\tilde d_2}$, $\underline{\tilde c_2 = -3\tilde d_2^2(2\tilde d_1)^{-1}}$, *тогда замена с* $r_1 = 0$, $s_1 = \tilde d_1 r_2^3$, $r_2 = 2^{1/8}|2\tilde d_1^3 - \tilde d_2^4|^{-1/8}$, $s_2 = \tilde d_2 r_2^3$ *сводит* (85) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa = \operatorname{sign}(2\tilde d_1^3 - \tilde d_2^4)$, $u = 3\tilde d_2^2 |4\tilde d_1^3 - 2\tilde d_2^4|^{-1/2}$;

5) $\underline{\tilde a_1 \neq 0}$, $\underline{\psi_9 \neq 0}$, *где* θ_* – *корень* $9\tilde a_1\theta^3 + 6\tilde c_2\theta^2 + (9\tilde a_1\tilde c_2 + 18\tilde d_2)\theta + 9\tilde a_1\tilde d_2 - 2\tilde c_2^2 = 0$ $(\psi_{12} \neq 0)$, $\underline{\tilde c_2^2 - 9\tilde d_2\theta_* - 3\tilde c_2\theta_*^2 \neq 0}$, $\underline{\tilde c_1 = -(\tilde c_2\theta_* - 3\theta_*^3 + 3\tilde d_2)(3\tilde c_2\tilde d_2 - 9\tilde d_2\theta_*^2 + 4\tilde c_2^2\theta_*)(3\psi_9\psi_{12})^{-1}}$, $\underline{\tilde b_1 = -\theta_*\psi_{13}(3\psi_9\psi_{12})^{-1}}$, $\underline{\tilde d_1 = -(27\tilde d_2^3 + 9\tilde d_2^2\theta_*(6\theta_*^2 + 5\tilde c_2) + 9\tilde d_2\theta_*^2\psi_9(2\tilde c_2 - \theta_*^2) + 2\tilde c_2^2\theta_*^3(9\theta_*^2 +}$ $\underline{+\tilde c_2))(9\psi_9\psi_{12})^{-1}}$, *тогда замена с* $r_1 = -(2\tilde c_2\theta_* + 3\tilde d_2)\psi_9^{-1} r_2$, $s_1 = \theta_* s_2$, $r_2 = |\psi_9|^{9/8}|\psi_{12}|^{-1/2}|\psi_{13}|^{-3/8}$, $s_2 = -\psi_{12}\psi_{13}\psi_9^{-3} r_2^3$ *сводит* (85) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa = -\operatorname{sign}(\psi_9\psi_{13})$, $u = 3(\tilde c_2^2 - 9\tilde d_2\theta_* - 3\tilde c_2\theta_*^2)|\psi_9\psi_{13}|^{1/2}(\psi_9\psi_{13})^{-1}$;

6) $\underline{\tilde c_1 = (16\tilde b_1^2 - 9\tilde a_1^4)(24\tilde a_1)^{-1}}$, $\underline{\tilde c_2 = -3\tilde a_1^2/4}$, $\underline{\tilde d_2 = (\tilde a_1/2)^3 - \tilde a_1\tilde b_1/3 - 2\tilde b_1^2(9\tilde a_1)^{-1}}$, $\underline{\tilde d_1 = (\tilde a_1/2)^4 - \tilde a_1^2\tilde b_1/6 - (\tilde b_1/3)^2 + (\tilde b_1/3)^3(\tilde a_1/2)^{-2}}$, *тогда замена с* $r_1 = \tilde a_1 r_2/2$, $s_1 = \tilde b_1(3\tilde a_1^2 + 4\tilde b_1)^2\tilde a_1^{-2} r_2^3/108$, $r_2 = 6\sqrt{2}\cdot 3^{1/8}|\tilde a_1|^{3/4}(3\tilde a_1^2 + 4\tilde b_1)^{-1}|3\tilde a_1^2 - 4\tilde b_1|^{-1/8}$, $s_2 = -(3\tilde a_1^2 + 4\tilde b_1)^2(72\tilde a_1)^{-1} r_2^3$ *сводит* (85) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa = -\operatorname{sign}(3\tilde a_1^2 - 4\tilde b_1)$, $u = 3\sqrt{3}|\tilde a_1||3\tilde a_1^2 - 4\tilde b_1|^{-1/2}$;

7) $\underline{\tilde a_1^6 \neq 16\tilde d_2^2}$, $\underline{\tilde c_2 = -3(\tilde d_2/2)^{2/3}}$ – *другие связи и замену выписать не удается;*

$CF_{24}^{3,0}$: *1)* $\underline{\tilde c_1 \neq 0}$, $\underline{\tilde a_1 = 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_2 = 0}$, $\underline{\tilde d_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1 = |\tilde c_1|^{-1/6}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = |\tilde d_1|^{1/2}\tilde c_1^{-1}$ *сводит* (85) *к* $CF_{24}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = \tilde d_1\tilde c_1^{-4/3}$;

2) $\underline{\tilde d_2 \neq 0}$, $\underline{\tilde a_1 = -\tilde d_2^3\tilde d_1^{-2}}$, $\underline{\tilde b_1 = 3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}}$, $\underline{\tilde c_1 = -3\tilde d_2}$, $\underline{\tilde c_2 = -3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}}$, *тогда замена с* $r_1 = 0$, $s_1 = -\tilde d_1|3\tilde d_2|^{-1/2}\tilde d_2^{-1}$, $r_2 = 3^{-1/6}|\tilde d_2|^{-1/2}$, $s_2 = -|3\tilde d_2|^{-1/2}$ *сводит* (85) *к* $CF_{24}^{3,0}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}\tilde d_2$, $u = 9^{-2/3}(\tilde d_1^3 - 2\tilde d_2^4)\tilde d_2^{-4}$;

3) $\underline{\tilde a_1 \neq 0}$, $\underline{\tilde b_1 = 0}$, $\underline{\tilde c_1 = -3\tilde a_1^3}$, $\underline{\tilde c_2 = -3\tilde a_1^2}$, $\underline{\tilde d_2 = 2\tilde a_1^3}$, *тогда замена с* $r_1 = \tilde a_1|3\tilde a_1|^{-1/6}(2\tilde a_1^4 - \tilde d_1)^{-1/3}$, $s_1 = -|3\tilde a_1|^{1/2}(3\tilde a_1)^{-1}$, $r_2 = |3\tilde a_1|^{-1/6}(2\tilde a_1^4 - \tilde d_1)^{-1/3}$, $s_2 = 0$ *сводит* (85) *к* $CF_{24}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = (\tilde d_1 - 2\tilde a_1^4)^{1/3}(3\tilde a_1)^{-4/3}$;

4) $\underline{\tilde a_1 \neq 0}$, $\underline{\psi_{14} \neq 0}$, $\underline{\tilde c_1 = (3\tilde a_1^2(\tilde b_1^2 - \tilde b_1\tilde c_2 - \tilde c_2^2) - \tilde c_2(\tilde b_1 + \tilde c_2)^2)(3\tilde a_1\psi_{14})^{-1}}$, $\underline{d_1 = (9\tilde a_1^4(\tilde b_1^3 -}$ $\underline{-3\tilde b_1^2\tilde c_2 - 2\tilde c_2^3 - 5\tilde b_1\tilde c_2^2) - 3\tilde a_1^2(\tilde b_1^2 + 6\tilde b_1\tilde c_2 + 4\tilde c_2^2)(\tilde b_1 + \tilde c_2)^2 - (\tilde b_1 + 2\tilde c_2)(\tilde b_1 + \tilde c_2)^4)(\tilde a_1\psi_{14})^{-2}/27}$, $\underline{d_2 = (3\tilde a_1^2\tilde c_2(3\tilde b_1 + 2\tilde c_2) + (\tilde b_1 + 2\tilde c_2)(\tilde b_1 + \tilde c_2)^2)(9\tilde a_1\psi_{14})^{-1}}$, *тогда замена с* $r_1 = -(\tilde b_1 + \tilde c_2)(3\tilde a_1)^{-1} r_2$, $s_1 = \sqrt{3}|\tilde a_1|^{5/2}\tilde b_1(\tilde b_1^2 + 3\tilde a_1^2\tilde c_2 + 2\tilde b_1\tilde c_2 + \tilde c_2^2)^{-1}\tilde a_1^{-1}$, $r_2 = |3\tilde a_1|^{7/6}\psi_{14}^{2/3}(\tilde b_1^2 + 3\tilde a_1^2\tilde c_2 + 2\tilde b_1\tilde c_2 + \tilde c_2^2)^{-1}$, $s_2 = -\psi_{14}(\tilde a_1\tilde b_1)^{-1}s_1$ *сводит* (85) *к* $CF_{24}^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = -3^{1/3}(6\tilde a_1^2 + \tilde b_1 + 2\tilde c_2)(\tilde a_1\psi_{14})^{-2/3}/9$.

Пояснения к теореме 9. Общий план доказательства заключается в следующем: система (85) заменой (16) сводится к системе $\breve{A} = \begin{pmatrix} \breve{a}_1 & \breve{b}_1 & \breve{c}_1 & \breve{d}_1 \\ \breve{a}_2 & \breve{b}_2 & \breve{c}_2 & \breve{d}_2 \end{pmatrix}$, коэффициенты которой задаются формулами, аналогичными формулам (19) для системы (17) из [1, 2.2]:

$$\begin{array}{ll} \delta\breve{a}_1 = \delta_{\tilde{a}s}r_1^3 + \delta_{\tilde{b}s}r_1^2r_2 + \delta_{\tilde{c}s}r_1r_2^2 + \delta_{\tilde{d}s}r_2^3, & \delta\breve{d}_1 = \delta_{\tilde{a}s}s_1^3 + \delta_{\tilde{b}s}s_1^2s_2 + \delta_{\tilde{c}s}s_1s_2^2 + \delta_{\tilde{d}s}s_2^3, \\ -\delta\breve{a}_2 = \delta_{\tilde{a}r}r_1^3 + \delta_{\tilde{b}r}r_1^2r_2 + \delta_{\tilde{c}r}r_1r_2^2 + \delta_{\tilde{d}r}r_2^3, & -\delta\breve{d}_2 = \delta_{\tilde{a}r}s_1^3 + \delta_{\tilde{b}r}s_1^2s_2 + \delta_{\tilde{c}r}s_1s_2^2 + \delta_{\tilde{d}r}s_2^3, \\ \delta\breve{b}_1 = 3\delta_{\tilde{a}s}r_1^2s_1 + \delta_{\tilde{b}s}(r_1s_2 + 2r_2s_1)r_1 + \delta_{\tilde{c}s}(2r_1s_2 + r_2s_1)r_2 + 3\delta_{\tilde{d}s}r_2^2s_2, & \\ -\delta\breve{b}_2 = 3\delta_{\tilde{a}r}r_1^2s_1 + \delta_{\tilde{b}r}(r_1s_2 + 2r_2s_1)r_1 + \delta_{\tilde{c}r}(2r_1s_2 + r_2s_1)r_2 + 3\delta_{\tilde{d}r}r_2^2s_2, & \\ \delta\breve{c}_1 = 3\delta_{\tilde{a}s}r_1s_2^2 + \delta_{\tilde{b}s}(2r_1s_2 + r_2s_1)s_1 + \delta_{\tilde{c}s}(r_1s_2 + 2r_2s_1)s_2 + 3\delta_{\tilde{d}s}r_2s_2^2, & \\ -\delta\breve{c}_2 = 3\delta_{\tilde{a}r}r_1s_2^2 + \delta_{\tilde{b}r}(2r_1s_2 + r_2s_1)s_1 + \delta_{\tilde{c}r}(r_1s_2 + 2r_2s_1)s_2 + 3\delta_{\tilde{d}r}r_2s_2^2, & \end{array} \tag{87}$$

где $\delta = r_1s_2 - r_2s_1$, $\delta_{\tilde{a}s} = \tilde{a}_1s_2 - \tilde{a}_2s_1$ и т. д.

Для того чтобы система $\breve{A}$ являлась $CF_i^{m,0}$, необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты из (87) в ней были равны нулю. Таким образом, возникает алгебраическая система, состоящая из 6 (при $m = 2$) или 5 (при $m = 3$) уравнений, которая может иметь различное число решений.

Каждое полученное решение этой системы подставляется в $\breve{A}$, после чего она превращается в соответствующую структурную форму, ненулевые элементы которой являются известными функциями коэффициентов системы (85) и линейной замены (16).

Затем выбираются две наиболее удобные для вычислений функции, скажем, f_1 и f_2, расположенные в $SF_i^{m,0}$ на местах с индексами, например, (1,1) и (2,3), и решаются уравнения $f_1 = a_1$, $f_2 = c_2$ относительно каких-либо двух коэффициентов замены. Найденные коэффициенты подставляются во все полученные ранее связи, после чего при помощи двух оставшихся коэффициентов замены осуществляется нормировка, завершающая процесс.

Оставшиеся связи, являющиеся связями только на коэффициенты системы (87), элементы полученной $CF_i^{m,0}$, оставшиеся ненулевыми и неединичными и задающие значения ее параметров, а также формулы для замены приведены в формулировке теоремы для каждой канонической формы.

Отметим, что в ходе решения различных уравнений и систем в ряде случаев приходится делить на выражения, которые могут обращаться в нуль, вследствие чего возникают подслучаи, которые приходится рассматривать отдельно. При этом приходится постоянно проверять отличие от нуля получаемых результантов и возможности ухода в предшествующие структурные формы.

В дальнейшем представляющие интерес сомножители R будем обозначать через $\widehat{R}$.

Выпишем для каждой канонической формы $\widehat{R}$, условия уходов в предшествующие формы, отдельные неочевидные ограничения на коэффициенты и для некоторых канонических форм – принципы разбиения на различные подслучаи.

$CF_{1,\kappa}^{2,0}$: $\widehat{R} = \tilde{b}_1(3\tilde{a}_1^2 + 4\tilde{b}_1)$; если $3\tilde{a}_1 \pm (3\psi_1)^{1/2} = 0$, то $\tilde{b}_1 = 0$.

$CF_{10,\kappa}^{2,0}$: 1) $\widehat{R} = \tilde{d}_1$;
2) если $\tilde{b}_1 = 0$, то $R = 0$; $\widehat{R} = \psi_2$.

$CF_1^{3,0}$: $\widehat{R} = (\eta_* - \zeta_*)(\tilde{a}_1 - \eta_*)(3\eta_* + 2\zeta_* - 2\tilde{a}_1)$; при $\tilde{a}_1 = \eta_* + \zeta_*$ можно получить $CF_1^{2,0}$;

$CF^{3,0}_{2,\kappa}:\ \ \widehat{R}=(\eta_*-\zeta_*)(\tilde{a}_1-\eta_*)(\tilde{a}_1-3\eta_*-\zeta_*)$; при $\tilde{a}_1=\eta_*+\zeta_*$ можно получить $CF^{2,0}_1$; $u=3(\tilde{a}_1-\eta_*-\zeta_*)(\tilde{a}_1-\eta_*)^{-1}/2=3/2\ \Leftrightarrow\ \zeta_*=0\ \Rightarrow\ \zeta_*\neq 0$ при $(\tilde{a}_1-\eta_*)(\tilde{a}_1-3\eta_*-\zeta_*)>0$, т.е. $u\neq 3/2$ при $\kappa=-1$.

$CF^{3,0}_4:$ 1) $\widehat{R}=\tilde{a}_1\tilde{d}_2$;
2) $\widehat{R}=\tilde{c}_2\psi_3(\tilde{c}_2\theta_*^2+3)$; при $\psi_4=0$ можно получить $CF^{2,0}_1$; при $\tilde{c}_1=0$ можно получить $CF^{2,0}_1$, поэтому $\theta_*\neq 0$ (θ_*- корень уравнения $\tilde{c}_2^3\theta^3+3\tilde{a}_1\tilde{c}_2^2\theta^2-3\tilde{c}_2^2\theta-9\tilde{c}_1=0$).

$CF^{3,0}_9:$ 1) $\widehat{R}=\tilde{b}_1\tilde{d}_2$;
2) – 4) рассматриваются две возможности: $\tilde{a}_1\neq\theta_*$ (случай 2), где θ_* – корень уравнения $3\theta^3-(3\tilde{a}_1^2+2\tilde{b}_1+\tilde{c}_2)\theta-\tilde{a}_1(\tilde{b}_1-\tilde{c}_2)=0$, и $\tilde{a}_1=\theta_*$, тогда уравнение примет вид: $\tilde{a}_1\tilde{b}_1=0$, откуда $\tilde{a}_1=0$ (случай 3) или $\tilde{b}_1=0,\ \tilde{a}_1\neq 0$ (случай 4);
2) $\widehat{R}=(2\theta_*+\tilde{a}_1)(2\tilde{a}_1^2+3\tilde{b}_1+2\tilde{a}_1\theta_*-4\theta_*^2)(3\tilde{a}_1\theta_*-3\theta_*^2+\tilde{b}_1)$;
3) если $\psi_5=0$, то $R=0$; $\widehat{R}=(\tilde{b}_1-4\tilde{c}_2)(\tilde{b}_1+\tilde{c}_2)$;
4) $\widehat{R}=\zeta_*\psi_6(\zeta_*+2\tilde{a}_1)$, $\zeta_*=\tilde{a}_1\pm(9\tilde{a}_1^2+12\tilde{c}_2)^{1/2}/3$; $9\tilde{a}_1^2+12\tilde{c}_2\neq 0$, иначе $\zeta_*=\tilde{a}_1\Leftrightarrow\psi_6=0$.

$CF^{3,0}_{15}:$ 1) $\widehat{R}=\tilde{c}_1\tilde{d}_2$;
2) – 4) рассматриваются две возможности: $\tilde{a}_1=0$ (случай 2) и $\tilde{a}_1\neq 0$, в которой $\psi_6\neq 0$ (случай 3) или $\psi_6=0$ (случай 4);
2) $\widehat{R}=(3\tilde{b}_1-\theta_*^2)(\tilde{b}_1-3\theta_*^2)$, где θ_* – корень уравнения $3\theta^4-6\tilde{b}_1\theta^2+12\tilde{d}_2\theta-\tilde{b}_1^2=0$, причем $\theta_*\neq 0$, поскольку $\tilde{b}_1\neq 0$;
3) $\widehat{R}=(\zeta_*+2\tilde{a}_1)(2\tilde{a}_1^2-\tilde{a}_1\zeta_*-\zeta_*^2+3\tilde{b}_1)(3\tilde{a}_1\zeta_*-3\zeta_*^2+\tilde{b}_1)$; $u=-(\zeta_*+2\tilde{a}_1)(\zeta_*-\tilde{a}_1)^{-1}/3\neq -1/3$, поскольку $\tilde{a}_1\neq 0$;
4) $\widehat{R}=\tilde{c}_2\psi_7(3\tilde{a}_1^2+\tilde{c}_2)$; пусть ζ_* – любой из корней уравнения $3\tilde{a}_1\zeta^2-(3\tilde{a}_1^2+2\tilde{b}_1+2\tilde{c}_2)\zeta-\tilde{a}_1(\tilde{b}_1-2\tilde{c}_2)=0$, тогда при $\psi_6=0\ \Leftrightarrow\ \tilde{a}_1=\zeta_*$ уравнение примет вид: $\tilde{a}_1\tilde{b}_1=0$, а значит, $\tilde{b}_1=0$; $u=-(6\tilde{a}_1^2+2\tilde{c}_2)(2\tilde{c}_2-3\tilde{a}_1^2)^{-1}/3\neq -1/3$, поскольку $\tilde{a}_1\neq 0$.

$CF^{3,0}_{20}:$ 1) $\widehat{R}=\tilde{d}_1$; при $\tilde{a}_1=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
2) $\widehat{R}=\tilde{d}_1$; при $\tilde{d}_2=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
3) – 5) имеются 3 возможности: $\tilde{c}_1\tilde{c}_2\neq 0$ (случай 3), $\tilde{c}_1=0\ \Rightarrow\ \tilde{c}_2\neq 0$ (случай 4), $\tilde{c}_1\neq 0,\ \tilde{c}_2=0$ (случай 5).
3) $\widehat{R}=\psi_9(3\tilde{c}_2\theta_*^2-\tilde{c}_2^2+9\tilde{d}_1)$, где θ_* – корень уравнения $3\tilde{c}_2\theta^3+9\tilde{d}_1\theta-\tilde{c}_1\tilde{c}_2=0\ \Rightarrow\ \theta_*\neq 0$; при $\psi_8=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
4) $\tilde{d}_1=0\ \Rightarrow\ R=0$; $\widehat{R}=\tilde{b}_1^2-9\tilde{d}_1$; при $\tilde{b}_1,\tilde{c}_1=0$ решение соответствующей системы уравнений, получающейся из (87) и рассматриваемое в случаях 3) – 5), не существует; при $\psi_{10}=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
5) $\widehat{R}=\tilde{d}_1$.

$CF^{3,0}_{23,\kappa}:$ 1) $\widehat{R}=\tilde{d}_1$; при $\tilde{b}_1=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
2) $\widehat{R}=\tilde{d}_1$; при $\tilde{c}_2=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
3) $\widehat{R}=\tilde{d}_2\psi_{11}$; при $\tilde{a}_1=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
4) $\tilde{d}_1=0\ \Rightarrow\ R=0$; $\widehat{R}=2\tilde{d}_1^3-\tilde{d}_2^4$; при $\tilde{d}_2=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$;
5 – 7) пусть θ_* – корень уравнения $9\tilde{a}_1\theta^3+6\tilde{c}_2\theta^2+(9\tilde{a}_1\tilde{c}_2+18\tilde{d}_2)\theta+9\tilde{a}_1\tilde{d}_2-2\tilde{c}_2^2=0$, тогда имеются две возможности: $\psi_9\neq 0$ (случай 5) или $\psi_9=0$ и в ней уравнение примет вид: $(\tilde{a}_1+2\theta_*)(\tilde{d}_2-2\theta_*^3)=0$, поэтому $\tilde{a}_1+2\theta_*=0$ (случай 6) или $\tilde{d}_2-2\theta_*^3=0,\ \tilde{a}_1+2\theta_*\neq 0$ (случай 7);
5) $\widehat{R}=\psi_{13}$; при $\tilde{a}_1=0$ и при $\tilde{c}_2^2-3\tilde{c}_2\theta_*^2-9\tilde{d}_2\theta_*=0$ можно получить $CF^{2,0}_{10}$; если $\psi_{12}=0$, то $\psi_9=0$;
6) $\tilde{a}_1=0\ \Rightarrow\ R=0$; $\widehat{R}=(3\tilde{a}_1^2-4\tilde{b}_1)(3\tilde{a}_1^2+4\tilde{b}_1)$; $\theta_*=-\tilde{a}_1/2$, $\psi_9=0\ \Rightarrow\ \tilde{c}_2=-3\tilde{a}_1^2/4$;

7) $\tilde{d}_2 - 2\theta_*^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta_* = (\tilde{d}_2/2)^{1/3}$ и $\psi_9 = 0$, поэтому $\tilde{c}_2 = -3(\tilde{d}_2/2)^{2/3}$; $\tilde{a}_1 + 2\theta_* \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \theta_* \neq -\tilde{a}_1/2$ и $\tilde{c}_2 = -3\theta_*^2 \;\Rightarrow\; \tilde{c}_2 \neq -3\tilde{a}_1^2/4$ или $\tilde{a}_1^6 \neq 16\tilde{d}_2^2$; другие связи для элементов и замену в общем виде выписать не удается.

$CF_{24}^{3,0}$: 1) $\widehat{R} = \tilde{d}_1$; при $\tilde{c}_1 = 0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
2) $\tilde{d}_1 = 0 \;\Rightarrow R = 0$; $\widehat{R} = \tilde{d}_1^3 - 2\tilde{d}_2^4$; при $\tilde{d}_2 = 0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
3) $\widehat{R} = 2\tilde{a}_1^4 - \tilde{d}_1$; при $\tilde{a}_1 = 0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
4) $\widehat{R} = (6\tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1 + 2\tilde{c}_2)(\tilde{b}_1^2 + 3\tilde{a}_1^2\tilde{c}_2 + 2\tilde{b}_1\tilde{c}_2 + \tilde{c}_2^2)$; при $\tilde{a}_1 = 0$ и при $\psi_{14} = 0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$ $\square$.

Введем следующие константы:

$\psi_{15} = 3a_1 - b_2$, $\psi_{16} = 12a_1c_1 + c_2^2$, $\psi_{17} = 3a_1 + b_2$, $\psi_{18} = -12a_1d_2 - b_1^2$, $\psi_{19} = b_1^2 - 3a_1c_1$, $\psi_{20} = 3a_1 - 2b_2$, $\psi_{21} = 3a_1b_1 - 3a_1c_2 + b_2c_2$, $\psi_{22} = 3a_1c_2 - 2b_1b_2 - b_2c_2$, $\psi_{23} = 2b_1^2 - 3a_1d_2$, $\psi_{24} = a_1 - b_2$, $\psi_{25} = 9a_1^2c_1 - 3a_1b_1^2 - 6a_1c_1b_2 + 2b_1^2b_2 + c_1b_2^2$, $\psi_{26} = 3a_1^2 - b_2^2$, $\psi_{27} = 2a_1 - b_2$, $\psi_{28} = a_1 + b_2$, $\psi_{29} = a_1d_1^2 + d_2^3$, $\psi_{30} = b_2\theta_* + c_2$, $\psi_{31} = 2b_2^2c_2\theta_*^2 + 2b_2c_2^2\theta_* + 3d_1b_2^2 + c_2^3$, $\psi_{32} = c_1 + 3d_2$, $\psi_{33} = a_1^{1/3} - d_1^{1/3}\zeta_*$, $\psi_{34} = a_1\theta_*^3 + d_2\theta_* + d_1$, $\psi_{35} = a_1\theta_*^3 + d_1$, $\psi_{36} = 2b_1 + c_2$.

Теорема 10. *Система* (86) *с* $\underline{a_2 = 0}$ *и* $\underline{R \neq 0}$ *сводится указанной ниже линейной неособой заменой* (16) *к соответствующей* $\overline{CF^{m,0}}$ $(m = 2,3)$ *только при следующих условиях на коэффициенты:*

$CF_{1,\kappa}^{2,0}$: *1)* $\underline{c_1 = b_1^2(3a_1)^{-1}}$, $\underline{d_1 = b_1(b_1^2 - 9a_1d_2)a_1^{-2}/27}$, $\underline{b_2 = 0}$, $\underline{c_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1 = |a_1|^{-1/2}$, $s_1 = -b_1|d_2|^{-1/2}(3a_1)^{-1}$, $r_2 = 0$, $s_2 = |d_2|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_{1,\kappa}^{2,0}$ *с* $\kappa = \operatorname{sign}(a_1d_2)$, $\sigma = \operatorname{sign} d_2$; *при этом, если* $a_1 > 0$ *и* $\sigma = -1$, *то в утв. 14 указано, как сделать* $\sigma = 1$;

2) $\underline{b_1 = 0}$, $\underline{d_1 = c_1c_2(9a_1)^{-1}}$, $\underline{\psi_{15} = 0}$, $\underline{d_2 = (3a_1c_1 + c_2^2)(9a_1)^{-1}}$, $\underline{\psi_{16} > 0}$, *тогда замена с* $r_1 = (-c_2 + \psi_{16}^{1/2})(6a_1)^{-1}r_2$, $s_1 = (-c_2 - \psi_{16}^{1/2})(6a_1)^{-1}s_2$, $r_2, s_2 = 3|a_1|^{1/2}\psi_{16}^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_{1,+}^{2,0}$ *с* $\kappa = 1$, $\sigma = \operatorname{sign} a_1$;

$CF_{10,\kappa}^{2,0}$: *1)* $\underline{c_1 = -3d_2}$, $\underline{d_1 = -b_1(18a_1d_2 + b_1^2)a_1^{-2}/27}$, $\underline{\psi_{17} = 0}$, $\underline{c_2 = -b_1}$, $\underline{\psi_{18} > 0}$, *тогда замена с* $r_1 = (-b_1 - (3\psi_{18})^{1/2})(6a_1)^{-1}r_2$, $s_1 = (-b_1 + (3\psi_{18})^{1/2})(6a_1)^{-1}s_2$, $r_2 = |3a_1|^{1/2}\psi_{18}^{-1/2}$, $s_2 = -\sqrt{3}|a_1|^{3/2}a_1^{-1}\psi_{18}^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_{10,+}^{2,0}$ *с* $\kappa, \sigma = 1$;

2) $\underline{a_1 = -d_2^3d_1^{-2}}$, $\underline{b_1 = 3d_2^2d_1^{-1}}$, $\underline{c_1 = -3d_2}$, $\underline{b_2 = 3d_2^3d_1^{-2}}$, $\underline{c_2 = -3d_2^2d_1^{-1}}$, *тогда замена с* $r_1 = 0$, $s_1 = d_1|d_2|^{-3/2}$, $r_2 = |d_2|^{-1/2}$, $s_2 = -c_1|d_2|^{-3/2}/3$ *сводит* (86) *к* $CF_{10,+}^{2,0}$ *с* $\kappa, \sigma = 1$;

$CF_1^{3,0}$: *1)* $\underline{\psi_{19} > 0}$, $\underline{d_1 = (9a_1b_1(c_1 - d_2) - 2b_1^3 \pm (6a_1c_1 - 2b_1^2 - 9a_1d_2)\psi_{19}^{1/2})a_1^{-2}/27}$, $\underline{b_2 = 0}$, $\underline{c_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1 = \mp d_2|\psi_{19}|^{-1/2}|d_2|^{-1/2}$, $s_1 = (-b_1 \mp \psi_{19}^{1/2})(3a_1)^{-1}|d_2|^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = |d_2|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_1^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} d_2$, $u = a_1d_2\psi_{19}^{-1}$;

2) $\underline{c_2 \neq 0}$, $\underline{c_1 = b_1(b_1 - c_2)(3a_1)^{-1}}$, $\underline{d_1 = b_1(b_1^2 - 9a_1d_2)a_1^{-2}/27}$, $\underline{b_2 = 0}$, *тогда замена с* $r_1 = -b_1(3c_2)^{-1}|a_1|^{-1/2}$, $s_1 = |a_1|^{-1/2}$, $r_2 = a_1c_2^{-1}|a_1|^{-1/2}$, $s_2 = 0$ *сводит* (86) *к* $CF_1^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} a_1$, $u = (3a_1d_2 - b_1c_2)c_2^{-2}/3$;

3) $\underline{\psi_{20} \neq 0}$, $\underline{\psi_{15} \neq 0}$, $\underline{c_1 = b_1\psi_{21}\psi_{15}^{-2}}$, $\underline{d_1 = b_1\psi_{21}(a_1b_1 - 2a_1c_2 + b_2c_2)(\psi_{15}\psi_{20})^{-2}}$, $\underline{d_2 = a_1b_1^2b_2(4b_2 - 9a_1)(\psi_{15}\psi_{20})^{-2} + a_1b_1c_2(9a_1 - 4b_2)\psi_{15}^{-1}\psi_{20}^{-2} - c_2^2(2a_1 - b_2)\psi_{20}^{-2}}$, *тогда замена с* $r_1 = -b_1\psi_{15}^{-1}r_2$, $s_1 = -\psi_{21}(\psi_{15}\psi_{20})^{-1}s_2$, $r_2 = a_1\psi_{20}\psi_{22}^{-1}|a_1|^{-1/2}$, $s_2 = -\psi_{15}\psi_{20}\psi_{22}^{-1}|a_1|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_1^{3,0}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} a_1$, $u = a_1(b_2 - 2a_1)\psi_{15}^{-2}$;

4) $\psi_{20}=0$, $c_1=0$, $d_1=2b_1(4b_1^2-9a_1d_2)a_1^{-2}/27$, $c_2=2b_1$, $\psi_{23}>0$, *тогда замена с* $r_1=-2b_1(3a_1)^{-1}r_2$, $s_1=(-2b_1+(6\psi_{23})^{1/2})(3a_1)^{-1}s_2$, $r_2=-|6a_1|^{1/2}\psi_{23}^{-1/2}/3$, $s_2=|6a_1|^{1/2}\psi_{23}^{-1/2}/2$ *сводит* (86) *к* $CF_1^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $u=-2/9$;

$CF_{2,\kappa}^{3,0}$: *1)* $\psi_{19}\neq 0$, $d_1=b_1(9a_1c_1-9a_1d_2-2b_1^2)a_1^{-2}/27$, $b_2=0$, $c_2=0$, $6a_1c_1-9a_1d_2-2b_1^2\neq 0$ *при* $a_1d_2<0$, *тогда замена с* $r_1=|a_1|^{-1/2}$, $s_1=-b_1(3a_1)^{-1}|d_2|^{-1/2}$, $r_2=0$, $s_2=|d_2|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_{2,\kappa}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}d_2$, $\kappa=\operatorname{sign}(a_1d_2)$, $u=-\psi_{19}(3a_1d_2)^{-1}$;

2) $b_2\neq 0$, $b_1=c_2\psi_{15}(2b_2)^{-1}$, $c_1=c_2^2\psi_{20}(2b_2)^{-2}$, $d_1=c_2(a_1c_2^2-4b_2^2d_2)(2b_2)^{-3}$, $\psi_{20}\neq 0$ *при* $a_1b_2(4b_2d_2-c_2^2)<0$, *тогда замена с* $r_1=-c_2(2b_2)^{-1}r_2$, $r_2=2|b_2|^{1/2}|4b_2d_2-c_2^2|^{-1/2}$, $s_1=|a_1|^{-1/2}$, $s_2=0$ *сводит* (86) *к* $CF_{2,\kappa}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $\kappa=\operatorname{sign}(a_1b_2(4b_2d_2-c_2^2))$, $u=b_2a_1^{-1}$;

3) $b_1,b_2\neq 0$, $\psi_{15}\neq 0$, $d_1=(9a_1^2c_1-6a_1c_1b_2-b_1^2b_2+c_1b_2^2)(6a_1c_1-b_1^2-2c_1b_2)(9b_1\psi_{24})^{-1}\psi_{15}^{-2}$, $c_2=(6a_1c_1b_2-9a_1^2c_1+3a_1b_1^2-c_1b_2^2)(b_1\psi_{15})^{-1}$, $d_2=b_1^2(9a_1^2-12a_1b_2+b_2^2)(3\psi_{15})^{-2}\psi_{24}^{-1}+ +c_1\psi_{17}(9\psi_{24})^{-1}-2c_1^2\psi_{15}^2\psi_{24}^{-1}(3b_1)^{-2}$, *тогда замена с* $r_1=3b_1^2|2\psi_{24}|^{1/2}(2\psi_{25})^{-1}$, $s_1=(b_1^2+2c_1b_2-6a_1c_1)(3b_1\psi_{24})^{-1}s_2$, $r_2=-\psi_{15}b_1^{-1}r_1$, $s_2=3b_1\psi_{15}\psi_{24}(2\psi_{25})^{-1}|a_1|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_{2,\kappa}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $\kappa=-\operatorname{sign}(a_1\psi_{24})$, $u=\psi_{15}(2a_1)^{-1}$;

4) $\psi_{15}\neq 0$, $b_2\neq 0$, $b_1=0$, $c_1=0$, $d_1=0$, $d_2=-2c_2^2(9\psi_{24})^{-1}$, *тогда замена с* $r_1=0$, $s_1=|a_1|^{-1/2}$, $r_2=3|2\psi_{24}|^{1/2}(2c_2)^{-1}$, $s_2=3\psi_{24}(2c_2)^{-1}|a_1|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_{2,\kappa}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $\kappa=-\operatorname{sign}(a_1\psi_{24})$, $u=\psi_{15}(2a_1)^{-1}$;

$CF_4^{3,0}$: *1)* $d_1\neq b_1(b_1^2-9a_1d_2)a_1^{-2}/27$, $c_1=b_1^2(3a_1)^{-1}$, $b_2=0$, $c_2=0$, *тогда замена с* $r_1=(27a_1^2d_1+9a_1b_1d_2-b_1^3)|d_2|^{-1/2}a_1^{-2}(27d_2)^{-1}$, $s_1=-b_1|d_2|^{-1/2}(3a_1)^{-1}$, $r_2=0$, $s_2=|d_2|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_4^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}d_2$, $u=(27a_1^2d_1+9a_1b_1d_2-b_1^3)^2(9a_1d_2)^{-3}$;

2) $\psi_{15}\neq 0$, $d_1=b_1^2(b_1+c_2)\psi_{15}^{-2}/3-b_1c_2^2(3b_2\psi_{15})^{-1}$, $d_2=c_2^2(3b_2)^{-1}-b_1c_2(3\psi_{15})^{-1}+b_1^2b_2\psi_{15}^{-2}/3$, $c_1=b_1\psi_{21}\psi_{15}^{-2}$, *тогда замена с* $r_1=-b_1\psi_{15}^{-1}r_2$, $s_1=(b_1b_2-c_2\psi_{15})(b_2\psi_{15})^{-1}s_2$, $r_2=-a_1b_2\psi_{15}^2|a_1|^{-5/2}(3\psi_{22})^{-1}$, $s_2=b_2\psi_{15}\psi_{22}^{-1}|a_1|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_4^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $u=b_2\psi_{15}^2(3a_1)^{-3}$;

$CF_9^{3,0}$: *1)* $c_1=b_1(b_1-c_2)(3a_1)^{-1}$, $b_2=0$, $d_2=b_1c_2(3a_1)^{-1}$, *тогда замена с* $r_1=|a_1|^{1/2}a_1^{-1}$, $s_1=-b_1(3a_1)^{-1}s_2$, $r_2=0$, $s_2=|a_1|^{1/2}c_2^{-1}$ *сводит* (86) *к* $CF_9^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $u=(27a_1^2d_1-b_1^3+3b_1^2c_2)(3c_2)^{-3}$;

2) $\psi_{26}\neq 0$, $c_1=(a_1b_1\psi_{15}-b_2c_2\psi_{27})(b_1\psi_{28}-a_1c_2)\psi_{26}^{-2}$, $d_1=(b_1^3\psi_{28}^2-b_1^2c_2\psi_{15}\psi_{28}-b_1b_2c_2^2\psi_{27}+a_1c_2^3\psi_{27})\psi_{26}^{-2}/3$, $d_2=(b_1c_2\psi_{15}^2\psi_{28}-b_1^2b_2\psi_{15}\psi_{28}-b_2^2c_2^2\psi_{27})\psi_{26}^{-2}/3$, *тогда замена с* $r_1=(a_1c_2-b_1\psi_{28})\psi_{26}^{-1}r_2$, $s_1=-(b_1\psi_{24}+c_2\psi_{27})\psi_{26}^{-1}s_2$, $r_2=-\psi_{26}|3\psi_{28}|^{1/2}(\psi_{22}\psi_{28})^{-1}$, $s_2=\psi_{26}|3\psi_{28}|^{1/2}\times\times(3a_1\psi_{22})^{-1}$ *сводит* (86) *к* $CF_9^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_{28}$, $u=\psi_{27}\psi_{28}^2(3a_1)^{-3}$;

3) $b_2=\pm\sqrt{3}a_1$, $b_1^2\pm 2\sqrt{3}a_1c_1\geq 0$, $c_2=(1\pm\sqrt{3})b_1$, $d_1=b_1(7\sqrt{3}\pm 12)(a_1\zeta_*+b_1)(\sqrt{3}b_1\pm 3a_1\zeta_*)(3a_1)^{-2}$, $d_2=(-2\mp\sqrt{3})(3a_1^2\zeta_*^2+(3\pm\sqrt{3})a_1b_1\zeta_*+b_1^2)(3a_1)^{-1}$, *где* ζ_* *– любой из корней соответствующего уравнения* $3a_1^2\zeta^2+(3\pm\sqrt{3})a_1b_1\zeta+(2\sqrt{3}\mp 3)(\sqrt{3}b_1^2\mp a_1c_1\pm 2b_1^2)=0$, *тогда замена с* $r_1=(-2\mp\sqrt{3})(a_1\zeta_*+b_1)a_1^{-1}r_2$, $s_1=\zeta_*s_2$, $r_2=3|2a_1|^{1/2}(3\sqrt{3}\pm 5)^{-1/2}(6a_1\zeta_*+3b_1\pm\sqrt{3}b_1)^{-1}$, $s_2=-|2a_1|^{1/2}(3\sqrt{3}\pm 5)^{1/2}(\sqrt{3}\pm 2)^{-1/2}(6a_1\zeta_*+3b_1\pm\sqrt{3}b_1)^{-1}$ *сводит* (86) *к* $CF_9^{3,0}$ *с* $\sigma=\pm\operatorname{sign}a_1$, $u=2/27$;

$CF_{15}^{3,0}$: *1)* $b_1=c_2\psi_{15}(2b_2)^{-1}$, $c_1=c_2^2\psi_{20}(2b_2)^{-2}$, $d_2=c_2^2(4b_2)^{-1}$, *тогда замена с* $r_1=|b_2|^{-1/2}$, $s_1=c_2|b_2|^{5/6}b_2^{-1}(c_2^3\psi_{24}-8d_1b_2^3)^{-1/3}$, $r_2=0$, $s_2=-2|b_2|^{5/6}(c_2^3\psi_{24}-8d_1b_2^3)^{-1/3}$ *сводит* (86) *к* $CSF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}b_2$, $u=a_1b_2^{-1}$;

2) $\psi_{17}\neq 0$, $c_1=(a_1c_2^2+b_1^2a_1-b_1a_1c_2-b_2b_1c_2)(\psi_{17}\psi_{24})^{-1}$, $d_1=(a_1^2(b_1^2-b_1c_2+c_2^2)+b_2^2(b_1^2+b_1c_2+c_2^2)/3-2a_1b_1b_2c_2)(b_1\psi_{28}-2a_1c_2)\psi_{17}^{-3}\psi_{24}^{-2}$, $d_2=(b_1c_2\psi_{15}-b_1^2b_2-b_2c_2^2)(\psi_{17}\psi_{24})^{-1}$, *тогда замена с* $r_1=(2a_1c_2-b_1\psi_{28})(\psi_{17}\psi_{24})^{-1}r_2$, $s_1=-(b_1+c_2)\psi_{17}^{-1}s_2$, $r_2=\psi_{17}\psi_{24}\psi_{22}^{-1}|a_1|^{-1/2}$, $s_2=-3^{1/3}\psi_{17}\psi_{24}^{2/3}|a_1|^{5/6}(a_1\psi_{22})^{-1}$ *сводит* (86) *к* $CF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $u=(2a_1+b_2)(3a_1)^{-1}$;

3) $\psi_{17}=0$, $c_1=b_1^2(4a_1)^{-1}$, $c_2=-b_1$, $d_2=-b_1^2(12a_1)^{-1}$, *тогда замена с* $r_1=-(2a_1\theta_*+b_1)(4a_1)^{-1}r_2$, $s_1=\theta_*s_2$, $r_2=4|a_1|^{1/2}(6a_1\theta_*+b_1)^{-1}$, $s_2=-2\cdot 6^{1/3}a_1^{4/3}|a_1|^{-5/6}(6a_1\theta_*+b_1)^{-1}$, *где* θ_* *– корень уравнения* $24a_1^3\theta^3+12a_1^2b_1\theta^2+2a_1b_1^2\theta+b_1^3-48a_1^2d_1=0$, *сводит* (86) *к* $CSF_{15}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}a_1$, $u=-1/3$;
при этом, если $u=-1/3$ *и* $\sigma=-1$, *то в утв. 14 указано, как сделать* $\sigma=1$;

$CF_{20}^{3,0}$: *1)* $\psi_{29}\neq 0$, $b_1=3d_2^2d_1^{-1}$, $c_1=-3d_2$, $b_2=3d_2^3d_1^{-2}$, $c_2=-3d_2^2d_1^{-1}$, *тогда замена с* $r_1=d_1|\psi_{29}|^{-1/2}$, $s_1=0$, $r_2=d_2d_1^{-1}r_1$, $s_2=-a_1d_1d_2\psi_{29}^{-1}r_1$ *сводит* (86) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_{29}$, $u=-(a_1d_2)^3d_1^6\psi_{29}^{-4}$;

2) $\psi_{30}\neq 0$, $\psi_{31}\neq 0$, $a_1=-b_2^2(b_2^2\theta_*^3+b_2c_2\theta_*^2+c_2^2\theta_*-3b_2d_1)\psi_{30}^{-3}/3$, $b_1=b_2^2(c_2\theta_*^2+3d_1)\psi_{30}^{-2}$, $d_2=(b_2^2\theta_*^2+b_2c_2\theta_*+c_2^2)(3b_2)^{-1}$, *где* θ_* *– корень уравнения* $b_2^2\theta^3+c_1b_2\theta+c_1c_2-3b_2d_1=0$, *тогда замена с* $r_1=\theta_*r_2$, $s_1=-\psi_{30}b_2^{-1}s_2$, $r_2=|3b_2|^{1/2}|\psi_{30}|^{3/2}(2b_2\theta_*+c_2)^{-1}|\psi_{31}|^{-1/2}$, $s_2=b_2|3b_2|^{1/2}(b_2^2\theta_*^3+b_2c_2\theta_*^2+c_2^2\theta_*-3b_2d_1)|\psi_{30}|^{3/2}(2b_2\theta_*+c_2)^{-1}|\psi_{31}|^{-1/2}\psi_{31}^{-1}$ *сводит* (86) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}(b_2\psi_{30}\psi_{31})$, $u=b_2^3(b_2^2\theta_*^3+b_2c_2\theta_*^2+c_2^2\theta_*-3b_2d_1)^3\psi_{30}^3\psi_{31}^{-4}$;

3) $b_1\neq\pm c_2$, $c_2\neq 0$, $d_1=-c_2^3b_2^{-2}/3$, $a_1=-(b_1^2+c_2^2)b_2c_2^{-2}/6$, $c_1=-c_2^2(3b_1^2+c_2^2)b_2^{-1}(b_1-c_2)^{-2}$, $d_2=c_2^2(b_1^2+3c_2^2)(3b_2)^{-1}(b_1-c_2)^{-2}$, *тогда замена с* $r_1=-c_2(b_1+c_2)b_2^{-1}(b_1-c_2)^{-1}r_2$, $s_1=2c_2^2b_2^{-1}(b_1-c_2)^{-1}s_2$, $r_2=|6b_2|^{1/2}|b_1-c_2|^{1/2}|b_1+c_2|^{-1/2}(b_1+3c_2)^{-1}$, $s_2=(b_1^2+c_2^2)|6b_2|^{1/2}|b_1-c_2|^{1/2}(c_2^2-b_1^2)^{-1}(b_1+3c_2)^{-1}|b_1+c_2|^{-1/2}$ *сводит* (86) *к* $CF_{20}^{3,0}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}(b_2(c_2^2-b_1^2))$, $u=2c_2^2(b_1^2+c_2^2)^3(b_1^2-c_2^2)^{-4}$;

$CF_{23,\kappa}^{3,0}$: *1)* $\psi_{32}\neq 0$, $a_1=-d_2c_2^2\psi_{32}^{-2}$, $b_1=-c_2$, $b_2=-c_1c_2^2\psi_{32}^{-2}$, $d_1=0$, *тогда замена с* $r_1=\psi_{32}c_2^{-1}r_2$, $s_1=-4d_2\psi_{32}c_2^{-1}r_2^3$, $r_2=2^{-7/8}|c_1+d_2|^{-1/8}|d_2|^{-3/8}$, $s_2=4d_2r_2^3$ *сводит* (86) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa=-\operatorname{sign}(d_2(c_1+d_2))$, $u=d_2\psi_{32}|d_2|^{-3/2}|2c_1+2d_2|^{-1/2}$;

2) $d_1c_2+3d_2^2\neq 0$, $a_1=-d_2^3d_1^{-2}$, $b_1=3d_2^2d_1^{-1}$, $c_1=-3d_2$, $b_2=-d_2(2d_1c_2+3d_2^2)d_1^{-2}$, *тогда замена с* $r_1=0$, $s_1=d_1r_2^3$, $r_2=|d_2|^{-1/4}|d_1c_2+2d_2^2|^{-1/8}$, $s_2=d_2r_2^3$ *сводит* (86) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa=-\operatorname{sign}(d_1c_2+2d_2^2)$, $u=(d_1c_2+3d_2^2)|d_2|^{-1}|d_1c_2+2d_2^2|^{-1/2}$;

3) $b_2\neq 0$, $\psi_{17}\neq 0$, $c_1=-3\psi_{28}b_1^2b_2^{-2}/2$, $d_1=b_1^3b_2^{-3}\psi_{28}/2$, $c_2=-3b_1\psi_{28}(2b_2)^{-1}$, $d_2=b_1^2b_2^{-2}\psi_{28}/2$, *тогда замена с* $r_1=b_1b_2^{-1}r_2$, $s_1=0$, $r_2=2^{1/8}b_2b_1^{-1}|\psi_{28}|^{-1/8}|a_1|^{-3/8}$, $s_2=-a_1b_1^2b_2^{-2}r_2^3$ *сводит* (86) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa=-\operatorname{sign}(a_1\psi_{28})$, $u=|a_1|^{1/2}\psi_{17}a_1^{-1}|2\psi_{28}|^{-1/2}$;

4) $b_2=0$, $a_1=2d_2^3d_1^{-2}$, $b_1=0$, $c_1=-3d_2$, $c_2=-3d_2^2d_1^{-1}$, *тогда замена с* $r_2=d_2d_1^{-1}r_1$, $r_1=2^{-3/8}d_1|d_2|^{-1/2}d_2^{-1}$, $s_1=0$, $s_2=-2^{-1/8}|d_2|^{1/2}d_2^{-1}$ *сводит* (86) *к* $CF_{23,-}^{3,0}$ *с* $u=3\sqrt{2}/2$;

5) $d_2=0$, $(9a_1+b_2)\psi_{28}\geq 0$, $b_1=(4a_1d_1^{1/3}\zeta_*-a_1^{2/3}d_1^{2/3}\zeta_*^2-a_1^{4/3})(\zeta_*\psi_{33})^{-1}$, $c_1=2(a_1^{2/3}d_1^{2/3}\zeta_*-a_1^{1/3}d_1\zeta_*^2-a_1d_1^{1/3})(\zeta_*\psi_{33})^{-1}$, $c_2=(a_1^{1/3}d_1\zeta_*^2-2a_1d_1^{1/3}-a_1^{2/3}d_1^{2/3}\zeta_*)\psi_{33}^{-1}$, $d_1^{2/3}\zeta_*^2-a_1^{1/3}d_1^{1/3}\zeta_*+a_1^{2/3}\neq 0$, *где* ζ_* *– корень уравнения* $2a_1^{2/3}d_1^{2/3}\zeta^2+d_1^{1/3}(a_1+b_2)\zeta-a_1^{1/3}\psi_{28}=0$ $(\psi_{28}\neq 0)$, *тогда замена с* $r_1=|\psi_{33}|^{1/8}(a_1^{1/3}+d_1^{1/3}\zeta_*)^{-1}|d_1|^{-1/12}|a_1|^{-1/8}|\zeta_*|^{-1/4}$, $s_1=\zeta_*(3a_1^{2/3}d_1^{2/3}\zeta_*+3a_1^{1/3}d_1\zeta_*^2+a_1d_1^{1/3}+d_1^{4/3}\zeta_*^3)(a_1^{1/3}+d_1^{1/3}\zeta_*)^{-1}r_1^3$, $r_2=\zeta_*r_1$, $s_2=-\zeta_*(3a_1d_1^{2/3}\zeta_*+3a_1^{2/3}d_1\zeta_*^2+a_1^{4/3}d_1^{1/3}+a_1^{1/3}d_1^{4/3}\zeta_*^3)(a_1^{1/3}+d_1^{1/3}\zeta_*)^{-1}d_1^{-1/3}r_1^3$ *сводит* (86) *к* $CF_{23,\kappa}^{3,0}$ *с* $\kappa=-\operatorname{sign}(a_1\psi_{33})$, $u=(a_1^{2/3}-a_1^{1/3}d_1^{1/3}\zeta_*+d_1^{2/3}\zeta_*^2)|a_1|^{1/6}|\psi_{33}|^{1/2}|d_1|^{-1/3}a_1^{-1/3}|\zeta_*|^{-1}\psi_{33}^{-1}$;

6) $a_1^2\vartheta_*^4 + d_2^2 \neq 0$, $d_1 = 0$, *существует* ϑ_* *– корень* $a_1^2\vartheta^4 + 3a_1d_2\vartheta^2 + b_1d_2\vartheta - 2d_2^2 = 0$ $(\vartheta_* \neq 0)$, $c_1 = (2a_1^2\vartheta_*^4 - d_2^2)d_2^{-1}$, $b_2 = (2d_2^2 - a_1^2\vartheta_*^4)\vartheta_*^{-4}a_1^{-1}$, $c_2 = (2a_1^2\vartheta_*^4 - 3a_1d_2\vartheta_*^2 - d_2^2)a_1^{-1}\vartheta_*^{-3}$, *тогда замена с* $r_1 = |\vartheta_*|^{5/2}|a_1|^{3/4}(a_1\vartheta_*^2 - d_2)^{-1}d_2^{-1/4}$, $s_2 = d_2^{1/4}|\vartheta_*|^{3/2}|a_1|^{1/4}(d_2 - a_1\vartheta_*^2)^{-1}\vartheta_*$, $s_1 = \vartheta_* s_2$, $r_2 = d_2a_1^{-1}\vartheta_*^{-3}r_1$ *сводит* (86) *к* $CF^{3,0}_{23,-}$ *с* $\kappa = -1$, $u = (a_1^2\vartheta_*^4 + d_2^2)\vartheta_*^{-2}|a_1|^{-1}d_2^{-1}$;

7) $d_2 = 2a_1^{1/3}d_1^{2/3} - c_1 \neq 0$, $\psi_{34} \neq 0$ *– другие связи и замену выписать не удается;*

8) $d_2 \neq 0$, $\psi_{34} \neq 0$, $\psi_{35} \neq 0$, $d_2^3 + a_1d_2^2\theta_*^2 + a_1d_2\theta_*\psi_{35} \neq 0$, $b_1 = (2d_2^3 - a_1d_2^2\theta_*^2 - 4a_1d_2\theta_*\psi_{35} - a_1\psi_{35}^2)(d_2\psi_{34})^{-1}$, $b_2 = (2d_2^3 + 2a_1d_2^2\theta_*^2 - a_1d_2\theta_*\psi_{35} - a_1\psi_{35}^2)(\psi_{34}\psi_{35})^{-1}$, $c_2 = (2a_1\theta_*\psi_{35}^2 - d_2^3\theta_* - a_1d_2\theta_*^2\psi_{35} - (3d_1 + 4a_1\theta_*^3)d_2^2)(\psi_{34}\psi_{35})^{-1}$, *где* θ_* *– корень* $2a_1^3\theta_*^7 + 2a_1^2d_2\theta_*^5 + 4d_1a_1^2\theta_*^4 - a_1d_2(c_1 + d_2)\theta_*^3 + 2a_1d_1d_2\theta_*^2 + (2a_1d_1^2 - d_2^3 - c_1d_2^2)\theta_* - d_1d_2\psi_{32} = 0$, *тогда замена с* $r_1 = \psi_{35}d_2^{-1}r_2$, $s_1 = -\theta_*(\psi_{35} - d_2\theta_*)^2a_1d_2^{-2}r_2^3$, $r_2 = |d_2|^{3/4}|\psi_{34}\psi_{35}|^{1/8}|a_1\theta_*^2 + d_2|^{-1/8}(\psi_{35} - d_2\theta_*)^{-1}|a_1|^{-3/8}$, $s_2 = -(\psi_{35} - d_2\theta_*)^2a_1d_2^{-2}r_2^3$ *сводит* (86) *к* $CF^{3,0}_{23,\kappa}$ *с* $\kappa = -\mathrm{sign}(a_1\psi_{34}\psi_{35}(a_1\theta_*^2 + d_2))$, $u = (d_2^3 + a_1d_2^2\theta_*^2 + a_1d_2\theta_*\psi_{35} + a_1\psi_{35}^2)|a_1\psi_{34}\psi_{35}|^{1/2}|d_2|^{-1}(a_1\psi_{34}\psi_{35})^{-1}|a_1\theta_*^2 + d_2|^{-1/2}$;

$CF^{3,0}_{24}$ *: 1)* $\psi_{17} \neq 0$, $c_1 = (9a_1^2(b_1^2 - b_1c_2 - c_2^2) + 3a_1b_2(4b_1^2 + b_1c_2 - c_2^2) + b_2^2\psi_{36}^2)\psi_{17}^{-2}(3a_1)^{-1}$, $d_1 = (9a_1^2(b_1^3 - 2c_2^3 - 5b_1c_2^2 - 3b_1^2c_2) + 6a_1b_1b_2\psi_{36}^2 + b_2^2\psi_{36}^3)(a_1\psi_{17})^{-2}/27$, $d_2 = (9a_1^2c_2(3b_1 + 2c_2) - 3a_1b_2(3b_1 + 2c_2)(b_1 - c_2) - b_2^2\psi_{36}^2)(3a_1)^{-1}\psi_{17}^{-2}$, *тогда замена с* $r_1 = -(b_1 + c_2)\psi_{17}^{-1}r_2$, $s_1 = -(3a_1b_1 + b_2\psi_{36})(3a_1\psi_{17})^{-1}s_2$, $r_2 = 3a_1^{2/3}|\psi_{17}|^{5/6}\psi_{22}^{-1}$, $s_2 = -3a_1\psi_{17}|\psi_{17}|^{-1/2}\psi_{22}^{-1}$ *сводит* (86) *к* $CF^{3,0}_{24}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\psi_{17}$, $u = -a_1^{1/3}(2a_1 + b_2)\psi_{17}^{-4/3}$;

2) $b_2d_1^2 - 3d_2^3 \neq 0$, $a_1 = -d_2^3d_1^{-2}$, $b_1 = 3d_2^2d_1^{-1}$, $c_1 = -3d_2$, $c_2 = -3d_2^2d_1^{-1}$, *тогда замена с* $r_1 = 0$, $s_1 = d_1r_2^3$, $r_2 = |b_2d_1^2 - 3d_2^3|^{-1/6}$, $s_2 = d_2r_2^3$ *сводит* (86) *к* $CF^{3,0}_{24}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}(b_2d_1^2 - 3d_2^3)$, $u = d_2(b_2d_1^2 - 2d_2^3)(b_2d_1^2 - 3d_2^3)^{-4/3}$.

Пояснения к теореме 10. План доказательства аналогичен плану для теоремы 9: система (86) с $a_1 \neq 0$, так как $R \neq 0$ и $a_2 = 0$, заменой (16) сводится к канонической форме (17) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix}$, элементы которой задаются формулами (19) из [1, 2.2].

$CF^{2,0}_{1,\kappa}$: 1) $\widehat{R} = d_2$;
2) $\widehat{R} = \psi_{16}$.

$CF^{2,0}_{10,\kappa}$: 1) $\widehat{R} = \psi_{18}$;
2) $d_1 = 0 \Rightarrow R = 0$, $\widehat{R} = d_2$.

$CF^{3,0}_{1}$: 1) $\widehat{R} = d_2$; при $\psi_{19} = 0$ можно получить $CF^{2,0}_1$;
2) $\widehat{R} = 3a_1d_2 - b_1c_2$; при $c_2 = 0$ можно получить $CF^{2,0}_1$;
3) – 4) рассматриваются две возможности: $\psi_{20} \neq 0$ (случай 3) и $\psi_{20} = 0$ (случай 4);
3) $\widehat{R} = (2a_1 - b_2)\psi_{22}$; при $\psi_{15} = 0$ можно получить $CF^{2,0}_1$;
4) $\widehat{R} = \psi_{23}$.

$CF^{3,0}_{2,\kappa}$: 1) $\widehat{R} = d_2$; при $\psi_{19} = 0$ можно получить $CF^{2,0}_1$; $u = -\psi_{19}(3a_1d_2)^{-1} = 3/2 \Leftrightarrow 6a_1c_1 - 9a_1d_2 - 2b_1^2 = 0$, а $\kappa = \mathrm{sign}(a_1d_2)$, поэтому $6a_1c_1 - 9a_1d_2 - 2b_1^2 \neq 0$ при $a_1d_2 < 0$;
2) $\widehat{R} = 4b_2d_2 - c_2^2$; при $b_2 = 0$ можно получить $CF^{2,0}_1$; $u = b_2a_1^{-1} = 3/2 \Leftrightarrow \psi_{20} = 0$, а $\kappa = \mathrm{sign}(a_1b_2(4b_2d_2 - c_2^2))$, поэтому $\psi_{20} \neq 0$ при $a_1b_2(4b_2d_2 - c_2^2) < 0$;
3) – 4) рассматриваются две возможности: $b_1 \neq 0$ (случай 3) и $b_1 = 0$ (случай 4); в обоих случаях при $\psi_{15} = 0$ можно получить $CF^{2,0}_1$, а при $b_2 = 0$ имеем: $u = (3a_1 - b_2)(2a_1)^{-1} = 3/2$, $\kappa = -\mathrm{sign}(a_1(a_1 - b_2)) = -1$, поэтому $b_2 \neq 0$;

3) $\psi_{24}=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=\psi_{25}$;
4) $\psi_{24}=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=c_2$.

$CF_4^{3,0}:$ 1) $\widehat{R}=d_2$; при $d_1=b_1(b_1^2-9a_1d_2)a_1^{-2}/27$ можно получить $CF_1^{2,0}$;
2) $b_2=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=\psi_{22}$; при $\psi_{15}=0$ можно получить $CF_1^{2,0}$.

$CF_9^{3,0}:$ 1) $\widehat{R}=c_2(27a_1^2d_1-b_1^3+3b_1^2c_2)$;
2) – 3) рассматриваются две возможности: $\psi_{26}\neq 0$ (случай 2) и $\psi_{26}=0$ (случай 3).
2) $\widehat{R}=(2a_1-b_2)\psi_{22}\psi_{28}$;
3) $\psi_{26}=0 \;\Leftrightarrow\; b_2=\pm\sqrt{3}a_1$; $\widehat{R}=6a_1\zeta_*+3b_1\pm\sqrt{3}b_1$; где ζ_* – любой из корней соответствующего уравнения $3a_1^2\zeta^2+(3\pm\sqrt{3})a_1b_1\zeta+(2\sqrt{3}\mp 3)(\sqrt{3}b_1^2\mp a_1c_1\pm 2b_1^2)=0$, которые существуют при $b_1^2\pm 2\sqrt{3}a_1c_1\geq 0$.

$CF_{15}^{3,0}:$ 1) $b_2=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=\psi_{24}c_2^3-8d_1b_2^3$;
2) – 3) рассматриваются две возможности: $\psi_{17}\neq 0$ (случай 2) и $\psi_{17}=0$ (случай 3);
2) $\psi_{24}=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=(2a_1+b_2)\psi_{22}$;
3) $\widehat{R}=6a_1\theta_*+b_1$.

$CF_{20}^{3,0}:$ 1) $d_1=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=d_2$; при $\psi_{29}=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
2) – 3) рассматриваются две возможности: $b_2\theta_*+c_2\neq 0$ (случай 2) и $b_2\theta_*+c_2=0$ (случай 3), где θ_* – корень уравнения $b_2^2\theta^3+c_1b_2\theta+c_1c_2-3b_2d_1=0$;
2) $\widehat{R}=b_2(b_2^2\theta_*^3+b_2c_2\theta_*^2+c_2^2\theta_*-3b_2d_1)(2b_2\theta_*+c_2)$; при $\psi_{31}=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
3) $b_2=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=(b_1^2+c_2^2)(b_1+3c_2)$; при $b_1\pm c_2=0$ и при $c_2=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$; $b_2\theta_*+c_2=0 \;\Leftrightarrow\; \theta_*=-c_2b_2^{-1}$, тогда уравнение примет вид $3d_1b_2^2+c_2^3=0$.

$CF_{23,\kappa}^{3,0}:$ 1) $\widehat{R}=c_2d_2(c_1+d_2)$; при $\psi_{32}=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
2) $d_1=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=d_2(d_1c_2+2d_2^2)$; при $d_1c_2+3d_2^2=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
3) – 4) рассматриваются две возможности: $b_2\neq 0$ (случай 3) и $b_2=0$ (случай 4);
3) $\widehat{R}=b_1\psi_{28}$; при $\psi_{17}=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
4) $d_1=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=d_2$;
5) – 8) пусть θ_* – корень уравнения $2a_1^3\theta_*^7+2a_1^2d_2\theta_*^5+4d_1a_1^2\theta_*^4-a_1d_2(c_1+d_2)\theta_*^3+2a_1d_1d_2\theta_*^2+(2a_1d_1^2-d_2^3-c_1d_2^2)\theta_*-d_1d_2\psi_{32}=0$; рассматриваются четыре возможности: а) $d_2=0$ (случай 5); б) $d_2\neq 0,\; \psi_{34}=0 \;\Leftrightarrow\; d_1=-\theta_*(a_1\theta_*^2+d_2)$, тогда уравнение примет вид: $\theta_*(a_1\theta_*^2+d_2)=0 \Leftrightarrow d_1=0$ (случай 6); в) $d_2,\psi_{34}\neq 0,\; \psi_{35}=0 \;\Leftrightarrow\; d_1=-a_1\theta_*^3$, тогда уравнение примет вид: $\theta_*(2a_1\theta_*^2-c_1-d_2)=0$ и либо $\theta_*=0 \;\Leftrightarrow\; d_1=0$ (относится к случаю 6), либо $\theta_*\neq 0,\; 2a_1\theta_*^2-c_1-d_2=0$ (случай 7); г) $d_2,\,\psi_{34},\,\psi_{35}\neq 0$ (случай 8);
5) $\psi_{28}=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=d_1(a_1^{1/3}+d_1^{1/3}\zeta_*)$; при $a_1^{2/3}-a_1^{1/3}d_1^{1/3}\zeta_*+d_1^{2/3}\zeta_*^2=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$; ζ_* – корень уравнения $2a_1^{2/3}d_1^{2/3}\zeta^2+d_1^{1/3}\psi_{28}\zeta-a_1^{1/3}\psi_{28}=0$ ($\zeta_*\neq 0$, так как $\psi_{28}\neq 0$), который существует при $(9a_1+b_2)\psi_{28}\geq 0$; если $\psi_{33}=0 \;\Leftrightarrow\; \zeta_*=a_1^{1/3}d_1^{-1/3}$, то уравнение примет вид $a_1=0$, что невозможно;
6) $\widehat{R}=(a_1\vartheta_*^2-d_2)^6/\vartheta_*$; где ϑ_* – корень уравнения $a_1^2\vartheta^4+3a_1d_2\vartheta^2+b_1d_2\vartheta-2d_2^2=0$ ($\vartheta_*\neq 0$, так как $d_1=0$ и $d_2\neq 0$); при $a_1^2\vartheta_*^4+d_2^2=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
7) $2a_1\theta_*^2-c_1-d_2=0 \;\Leftrightarrow\; d_2=2a_1\theta_*^2-c_1=2(-d_1^{1/3}a_1^{-1/3})^2a_1-c_1 \;\Leftrightarrow\; d_2=2a_1^{1/3}d_1^{2/3}-c_1$, другие связи для элементов и замену выписать не удается;
8) $\widehat{R}=(a_1\theta_*^2+d_2)(\psi_{35}-d_2\theta_*)$; при $d_2^3+a_1(d_2^2\theta_*^2+d_2\theta_*\psi_{35}+\psi_{35}^2)=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$.

$CF_{24}^{3,0}:$ 1) $\widehat{R}=(2a_1+b_2)\psi_{22}$; при $\psi_{17}=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$;
2) $d_1=0 \;\Rightarrow\; R=0,\; \widehat{R}=d_2(d_1^2b_2-2d_2^3)$; при $d_1^2b_2-3d_2^3=0$ можно получить $CF_{10}^{2,0}$. □

7.5 Заключение

Приведем объединенные списки канонических форм двумерных однородных кубических систем для различным значений m, задающих число ненулевых элементов. Напомним, что в квадратные скобки заключены те значения параметров, которых можно избежать при помощи явно указанных в соответствующих теоремах линейных замен переменных.

Список 15. $CF^{2,l}$ с $l = 0, 1, 2, 3$ $(\sigma, \kappa = \pm 1)$:

$$CF^{2,0}_{1,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2, \begin{matrix} \sigma = 1 \text{ при } \kappa = -1 \\ [\sigma = -1] \end{matrix}; \quad CF^{2,1}_2 = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_3;$$

$$CF^{2,2,=}_3 = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_4; \quad CF^{2,2,>}_4 = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_4, \begin{matrix} |u| \le 1 \\ [|u| > 1,\ \sigma = -1] \end{matrix};$$

$$CF^{2,3,=,>}_5 = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_5; \quad CF^{2,3,=,>}_6 = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_5;$$

$$CF^{2,2,=}_{7,\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_6, \ [\sigma = -1]; \quad CF^{2,2,>}_{8,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_4, \begin{matrix} \sigma = 1 \text{ при } \kappa = -1 \\ [\sigma = -1] \end{matrix};$$

$$CF^{2,1}_9 = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7; \quad CF^{2,0}_{10,\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8, \ [\sigma = -1];$$

Список 16. $CF^{3,l}$ с $l = 0, 1, 2, 3$ $(\sigma, \kappa = \pm 1)$:

$$CF^{3,0}_1 = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_4; \quad CF^{3,0}_{2,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} \kappa & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_5, u \ne 3/2 \text{ при } \kappa = -1;$$

$$CF^{3,1}_3 = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_5, \begin{matrix} \sigma = 1 \text{ при } u = 2 \\ [\sigma = -1] \end{matrix}; \quad CF^{3,0}_4 = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_6;$$

$$CF^{3,1}_5 = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_6, \begin{matrix} u \ge 1,\ u \ne 2 \\ [u < 1] \end{matrix}; \quad CF^{3,1}_6 = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_6;$$

$$CF^{3,2,=}_7 = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_6, \begin{matrix} u \ne -1 \\ [|u| > 1] \end{matrix}; \quad CF^{3,1}_8 = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_7, \quad u > 1/4;$$

$$CF^{3,0}_9 = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_7; \quad CF^{3,2,>}_{10} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_7;$$

$$CF^{3,1}_{11,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7; \quad CF^{3,2,=}_{12} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7, \quad u < -1/4;$$

$$CF^{3,2,=}_{13} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_8; \quad CF^{3,1}_{14,\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_8, \begin{matrix} u \ne 1/2 \text{ при } \kappa = 1 \\ [\sigma = -1] \end{matrix};$$

$$CF^{3,0}_{15} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8, \begin{matrix} \sigma = 1 \text{ при } u = -1/3 \\ [\sigma = -1] \end{matrix}; \quad CF^{3,2,>}_{16} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8;$$

$$CF^{3,1}_{17} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8; \quad CF^{3,1}_{19} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9; \quad CF^{3,0}_{20} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9;$$

$$CF^{3,1}_{21} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9, \quad u \ne 2; \quad CF^{3,1}_{22} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10};$$

$$CF^{3,0}_{23,\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \quad [\sigma = -1]; \quad CF^{3,0}_{24} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11};$$

Список 17. $CF^{4,l}$ с $l=0,1,2,3$ $(\sigma,\kappa=\pm 1)$

$$CF_1^{4,l}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_6,\quad \begin{matrix} l=0: & v\ne u, & \begin{matrix}|v|\le 1\\ [|v|>1]\end{matrix}, \begin{matrix} v\ne 1 \text{ при } u=1/9,\,1/3,\\ v\ne -1 \text{ при } u=-1/9;\end{matrix}\\ l=1: & v=u, & |u|<1\ \ [|u|>1];\end{matrix}$$

$$CF_2^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_7,\quad v\ne(3u)^{-1},\,1+2(9u)^{-1},\,(12u+1\pm(1-8u)^{1/2})(8u)^{-1};$$

$$CF_3^{4,l}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&v&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_7,\quad \begin{matrix} l=0: & v\ne -u,\ 3/2\pm(-2u)^{-1/2}, & \begin{matrix}\sigma=1 \text{ при } \{u=-2/9,v=3\}\\ [\sigma=-1]\end{matrix};\\ l=1: & v=-u,\ u\ne -1/2,-2; & \end{matrix}$$

$$CF_5^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_8,\quad u\ne v(v-2)/4,\quad u\ne 1 \text{ при } v=-2,\quad u\ne -1/9 \text{ при } v=1;$$

$$CF_6^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&v\\0&0&1&1\end{pmatrix}_8,\quad v\ne u,\,(9u+2)u^{-2}/27;$$

$$CF_7^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_8,\quad v\ne u,\,(2u-1)u^{-1},\,2u(u+1)^{-1},\ \begin{matrix}u\ge 1\\ [u<1]\end{matrix} \text{ при } v=2;$$

$$CF_{8,\kappa}^{4,l}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&v&0\\0&1&0&\kappa\end{pmatrix}_8,\quad \begin{matrix} & v\ne -3 \text{ при } \{u=-1/3,\,\kappa=1\},\\ l=0: & v\ne(3u-2)(2u-1)\kappa \text{ при } \kappa(1-2u)>0,\\ v\ne\kappa u, & \{|u|<1,\ |v|<1\}, \text{ если } [\{|u|>1,\ |v|>1\}],\\ & u\in[-1/3,1]\ [u\in(-\infty,-1/3)\cup(1,+\infty)] \text{ при } v=\kappa u^{-1};\\ l=2: & v=\kappa u,\ |u|\le 1\ [|u|>1],\quad |u|\ne 1 \text{ при } \kappa=-1;\end{matrix}$$

$$CF_{10}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&v\\0&0&1&0\end{pmatrix}_9,\quad u\ne 1,\quad v\ne(2u-1)^2(2-u)/27,\,u^2(3-2u)/27;$$

$$CF_{11}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_9,\quad v\ne u(2u-1)^{-2};\qquad CF_{12}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\0&0&1&1\end{pmatrix}_9,\quad \begin{matrix}u\ne 1/2,\,-v,\\ 4v(u-1)-1>0;\end{matrix}$$

$$CF_{13}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&1\\0&1&0&v\end{pmatrix}_9,\quad \begin{matrix} v\ne -u^{-2/3},\quad u\ne 2/3 \text{ при } \theta_*(\theta_*^3-12)\ge 0,\\ \text{где } \theta_* - \text{корень кубического уравнения } \theta^3-3\theta v-3=0;\end{matrix}$$

$$CF_{13}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_9,\quad u\ne -1/3,\,2/3;$$

$$CF_{14}^{4,l}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&v\end{pmatrix}_9,\quad \begin{matrix} l=1: & v\ne -u^2,\ v\ne u,\ v\ne u/2 \text{ при } u>-1/2,\\ l=2: & v=-u^2,\ u\ne -1,-1/2,-1/3;\end{matrix}$$

$$CF_{16}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&v\\0&0&1&0\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix} v\ne(1-9u\pm(1-3u)(1-12u)^{1/2})u^{-2}/27,\\ v\ne -2/3 \text{ при } u=1/3;\end{matrix}$$

$$CF_{17}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix} v\ne 2^{1/3}(1-3u/2)u^{-1/3},\\ v\ne -6^{1/3} \text{ при } u=1/3;\end{matrix}$$

$$CF_{18,-}^{4,3}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}_{10},\quad [\sigma=-1];\qquad CF_{19}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix}u\ne(v^3-8)(4v)^{-1},\\ u\ne v^2/4;\end{matrix}$$

$$CF_{20}^{4,3}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&u\\0&1&0&u\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix}u\in(-\infty,-1/9]\cup(0,+\infty)\\ [u\in(-1/9,0)]\end{matrix},\quad \begin{matrix}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{matrix} \text{ при } u=-1;$$

$$CF_{21}^{4,0}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix} v\ne u,\quad v\ne u^{-2} \text{ при } u>0,\\ \{|u|,|v|<1\}, \text{ если } [\{|u|>1,\ 1<|v|<u^4\}];\end{matrix}$$

$$CF^{4,3}_{21,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&\kappa\\1&0&0&\kappa\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{matrix}\ \text{при } \kappa=-1;$$

$$CF^{4,0}_{22}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&v\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix}v\neq u,\ (2u-1)(3u-2)^{-3},\ -16u^2(u-1)^{-1}(3u+1)^{-3},\\ v\neq 1/6\ \text{ при }\ u=1/3;\end{matrix}$$

$$CF^{4,2,>}_{23}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix}|u|\le 1\\ [|u|>1]\end{matrix},\ \ v<0 \text{ при } u=1,\ \ v\neq u,\ u(2-u)/4,\ (2u-1)/4;$$

$$CF^{4,1}_{24}=\sigma\begin{pmatrix}0&1/2&1&v\\0&0&1&0\end{pmatrix}_{11},\quad v<-1/2;$$

$$CF^{4,0}_{25}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&v&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{11},\quad \begin{matrix}v\neq 9^{1/3}\ \text{ при }\ u=1/3,\quad v\neq 3^{1/3}\ \text{ при }\ u=5/9,\\ v\neq(\theta_*^3-3)(2\theta_*)^{-1}\ \text{ при }\ u=(\theta_*^3+1)\theta_*^{-3}/2,\\ \text{где } \theta_* -\ \text{корень уравнения } \theta^9-\theta^6+15\theta^3+9=0;\end{matrix}$$

$$CF^{4,0}_{26}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{11},\quad v\neq -27/32\ \text{ при }\ u=9/8,\quad v\neq 216\ \text{ при }\ u=-18;$$

$$CF^{4,1}_{27}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&1\\0&1&0&v\end{pmatrix}_{11},\quad v\neq -u^{-2},\ (u^{3/2}\pm 2^{3/2})u^{-1/2}/2,\quad u\neq 3\cdot 2^{-4/3}\ \text{ при }\ v=2^{-4/3};$$

$$CF^{4,l}_{28}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},\quad \begin{matrix}l=0: & v\neq -2^{-1/3}(1\pm\sqrt{2})^{1/3}\ \text{ при }\ u=3(2\pm\sqrt{2})^{2/3}/2,\\ v\neq -u, & v\neq 2^{-1/3}\cdot(7\pm 3\sqrt{5})^{1/3}\ \text{ при }\ u=2^{-1/3}\cdot 3(\pm\sqrt{5}-1)^{1/3},\\ & v\neq -3^{1/3}\ \text{ при }\ u=3^{2/3};\\ l=0: & u\neq -3,\ -3/4,\ 3/2,\ 6,\\ \multicolumn{2}{l}{v=-u,\ (92+4\sqrt{29})^{1/3}+20\cdot(92+4\sqrt{29})^{-1/3}+5;}\end{matrix}$$

$$CF^{4,1}_{29}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{11},\quad \begin{matrix}u\neq -1/2,\quad v\neq -u,\ u^2,\ (1-2u)/8,\ (1-2u)^2/8,\\ v\neq(9693/2+337\sqrt{29}/2)^{1/3}/9+(9693/2-337\sqrt{29}/2)^{1/3}/9+2\\ \text{при } u=((9\sqrt{29}/2-61/2)^{1/3}-(9\sqrt{29}/2+61/2)^{1/3}-2)/3;\end{matrix}$$

$$CF^{4,1}_{30}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{12},\quad \begin{matrix}u\neq -v^{-1},\ (v^3-8)(4v)^{-1},\\ u\neq 3\ \text{ при }\ v=-3,\quad u\neq 2\ \text{ при }\ v=3;\end{matrix}$$

$$CF^{4,0}_{31}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{12},\quad v\neq -2^{1/3}/3\ \text{ при }\ u=-2^{1/3}/6,\quad v\neq u\ \text{ при }\ u=2^{1/3}/3;$$

$$CF^{4,l}_{32}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{12},\quad \begin{matrix}l=0:\ v\neq u,\ v\neq -1 \text{ при } u=3;\\ l=1:\ v=u,\ u\neq -3,\ -3/4,\ 3/8,\ 6;\end{matrix}$$

$$CF^{4,1}_{33}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&v\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{12},\quad u\neq 1,\quad v\neq u,\ (4u+1)/8,\ (6u+1\pm(2u+1)(8u+1)^{1/2})/16;$$

$$CF^{4,l}_{34,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\1&0&\kappa&0\end{pmatrix}_{12},\quad \begin{matrix} & v<0 \text{ при } u=\kappa,\ v\neq -(2u-\kappa)(u-2\kappa)/9 \text{ при } u>\kappa/2,\\ & v\neq u/9 \text{ при } \kappa=1,\ v<-1/9 \text{ при } \{u=-1,\ \kappa=1\},\\ l=0: & v\neq -(3+\sqrt{5}\kappa)/18 \text{ при } u=(\sqrt{5}+3\kappa)/2,\\ v\neq u\kappa, & v\neq 1/3 \text{ при } u=-\kappa,\ v\neq -(2+\sqrt{3}\kappa)/3 \text{ при } u=2\kappa+\sqrt{3},\\ & v\in(-1,-1/9)\cup(-1/9,0) \text{ при } \{u=1,\ \kappa=-1\},\\ & \begin{matrix}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{matrix}\ \text{при } \{u=-\kappa,\ v=-1\},\quad \begin{matrix}|u|\le 1\\ [|u|>1]\end{matrix};\\ l=2: & v=u,\ \kappa=1,\ \ |u|<1\ \ [u>1],\ u=-1;\end{matrix}$$

$$CF^{4,0}_{35}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{13},\quad \begin{matrix}\sigma=1\ \ [\sigma=-1]\ \text{ при }\ \{u=(3/2)^{1/3},\ v=2^{1/3}3^{-4/3}\},\\ v\neq(3u)^{-1},\quad v\neq(\pm 3^{5/6}-3^{1/3})/6\ \text{ при }\ u=(3^{2/3}\pm 3^{1/6})/2,\end{matrix}$$

$v \neq 2\cdot 75^{-1/3}/3$ при $u = 2\cdot(3/5)^{1/3}$, $v \neq \theta_*(9\theta_*^6 - 3\theta_*^3 - 1)c_*/3$ при $u = 3\theta_*^2(1+12\theta_*^3)c_*$, где θ_* – корень уравнения $27\theta^9 - 90\theta^6 + 3\theta^3 - 1 = 0$, $c_* = (18\theta_*^6 - 3\theta_*^3 + 1)^{-1}$;

$CF_{36}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & u\\ 1 & 0 & v & 0\end{pmatrix}_{13}$, $v \neq -u^2$, $v \neq 2^{-4/3}$ при $u = -2^{-5/3}$, $v \neq -2^{1/3}$ при $u = 2^{2/3}$, $v \neq (3\pm 3\sqrt{2})^{1/3}$ при $u = 3^{-4/3}\cdot(8\pm 6\sqrt{2})^{1/3}$, $v \neq -(3/2)^{1/3}$ при $u = (2/81)^{1/3}$, $v \neq (9\theta_*^6 - 12\theta_*^3 + 4)\theta_*^{-1}(4 - 9\theta_*^3)^{-1}$ при $u = \theta_*^4(4 - 9\theta_*^3)^{-1}$, где θ_* – корень уравнения $27\theta^9 - 180\theta^6 + 144\theta^3 - 32 = 0$;

$CF_{36}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 0 & u & u\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}_{13}$, $u \neq -2,\ -1/8,\ 1\pm 3\sqrt{2}/4,\ 1/4,\ 4$;

$CF_{37}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 0 & u & v\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}_{14}$, $v \neq u,\ u^2\operatorname{sign} u,\ -(4u + (-u)^{1/2} + 3(-u)^{3/2})(9u+1)^{-1}$, $v \neq -1/81$ при $u = 1/9$.

Список 18. $CF^{5,l}$ или $CSF^{5,l}$ с $l = 1,2,3$ $(\sigma = \pm 1)$:

$CSF_3^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix}u & v & v-u & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{10}$, $u \neq -1$, $v \neq u,\ (u-1)^2u^{-1},\ 2u-2,\ 2u,\ u-3,\ 3u-1,\ 4u,\ u+1,\ 3u+3,\ (2u^2+1\pm(2u+1)(5-4u)^{1/2})(u+1)^{-1}/2,\ u-1\pm 2\sqrt{-u},\ 2(u+1)^2(u+2)^{-1}$, $u \neq (17 + 2(514 - 6\sqrt{57})^{1/3} + 2(514 + 6\sqrt{57})^{1/3})/3$ при $v = (20 + 2(1261 - 57\sqrt{57})^{1/3} + 2(1261 + 57\sqrt{57})^{1/3})/3$;

$CSF_6^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix}u & v & 0 & u-v\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{11}$, $v \neq u,\ 2-3u,\ (3u-2)/2,\ (3u+1)/2,\ 3u-1,\ 3u+3,\ u-1,\ -3u-1,\ 2(u^2-u+1)^{1/2}\mp(u-1),\ (3u^2+4u+2)(u+1)^{-1}/2,\ -1\pm\sqrt{3},\ (-2u-u^2\pm(2u+1)(u^2+u+1)^{1/2})(u+1)^{-1}$, $u \neq -5/9$ при $v = 17/12$, $u \neq -7/12$ при $v = 3/2$, $u \neq 35/3$ при $v = 12$, $u \neq -35/3$ при $v = -41/4$;

$CSF_7^{5,l} = \sigma\begin{pmatrix}u & v_0 & w_0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{11}$, при $l = 2:$ $-v_0,\ w_0 = u$, $u \neq -1, 3$ $(CSF_7^{5,2} = CF_7^{5,2})$; при $l = 1:$ $v_0 = v$, $w_0 = v - u$, $u \neq (v-1)(v-3)(v-2)^{-1}$, $u \neq v(3v - 10 \pm (v^2 + 12v - 12)^{1/2})(4v-8)^{-1}$, $v \neq u,\ 2u,\ 2u+3,\ 3\mp u,\ 3u-3,\ (2u^2-4u+3)(u-2)^{-1},\ u+1\pm 2(u+1)^{1/2},\ 2u+2\pm(u^2+6u+1)^{1/2},\ (2u^2-2u+5\mp(2u-1)(1+4u)^{1/2})(2u-4)^{-1}$, $u \neq (18\sqrt{17}-98)^{1/3} - (18\sqrt{17}+98)^{1/3} - 5$ при $v = u - 3$, $u \neq (79/2 + 9\sqrt{77}/2)^{1/3} + (79/2 - 9\sqrt{77}/2)^{1/3} - 4$ при $v = 3(4 - 6(36+4\sqrt{77})^{1/3} + (36+4\sqrt{77})^{2/3})(36-4\sqrt{77})^{1/3}/8$;

$CSF_8^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix}u & v & w & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{11}$, $v \neq -2$, $w \neq v,\ v-u,\ v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2},\ v(1-u)^{-1},\ -(v+1)u^{-1},\ (v^2-2v)(4u-4)^{-1},\ (uv^2+v^2+2v-4u)(2u+1)^{-2},\ v^2(4u)^{-1},\ (2v-u-1)/4,\ v-3u/4,\ v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2},\ v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2},\ (v-1)^2(2u-1)\theta_* + (v-1)(u-1)(2u+v-1)(2u-2+\theta_*v-\theta_*)^{-1}u^{-2}/2$, где $\theta_* = ((u+1)(1-v)\pm((v-1)(v-9)u^2+2(v+3)(v-1)u+(v-1)^2)^{1/2})(2v-2)^{-1}$, $u \neq (w^{3/2}\mp 1)(w^{1/2}\pm 2)^{-2}w^{-1/2}$ при $v = (2w+1)(\pm w^{1/2}+2)^{-1}$, $u \neq (v^2 + 2 \pm (v^2+v-2)^{1/2}(v+1))(v-2)^{-1}/3$ при $w = -v^2 - v \pm (v^2+v-2)^{1/2}(v+1)$, $v \neq -(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}$ при $w = -(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1}$;

$CF_{22}^{5,2,<} = \sigma\begin{pmatrix}0 & u & -u & u\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{14}$, $u \neq 3/2,\ 6,\ 4\pm\sqrt{13}$;

Список 19. $CF^{m,l}$ или $CSF^{m,l}$ с $m = 6,7,8$, $l = 1,2,3$ $(\sigma = \pm 1)$:

$CF_1^{6,2,<} = \sigma\begin{pmatrix}u & u & uv & 0\\ 0 & 1 & 1 & v\end{pmatrix}_{12}$, $\begin{matrix}|u| \le 1\\ [|u| > 1]\end{matrix}$, $v > 1/4$, $v \neq (3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2}$, $v \neq (u^2-3u+3)(u-3)^{-2},\ (3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}$;

$CF_3^{6,2,<} = \sigma\begin{pmatrix}1 & 1-v & 0 & -v^2\\ 0 & 1 & 1 & v\end{pmatrix}_{13}$, $\begin{matrix}1/4 < v \le 1/2\\ [v > 1/2]\end{matrix}$, $v \neq (49 - 7\sqrt{46})/6,\ 1/3$ $(u = 1)$;

$$CF_4^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & v & 1 & v \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}, \quad \begin{matrix} 0 < v < 1 \\ [-1 < v < 0] \end{matrix}, \quad (u = 1);$$

$$CSF_6^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} uv & u & 0 & u(1+v^2)^2 \\ 1 & 0 & 1 & v(1+v^2) \end{pmatrix}_{14}, \quad \begin{matrix} u \neq -1, \quad u \in (u_-, u_+), & v > 0 \\ u_{\mp} = -((v^2+1)^{1/2} \pm 1)^2 v^{-2}, & [v < 0] \end{matrix};$$

$$CSF_7^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{15}, \quad v < -(u+1)^2/4, \quad u \neq -1, \, -v, \, -v/3 - 1, \, (2v-3)(3-v)^{-1};$$

$$CF_9^{6,3,=} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{15};$$

$$CSF_{11}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{16}, \quad \begin{matrix} u > 0 \\ [u < 0] \end{matrix}, \quad \begin{matrix} v < -u^2/4, \quad v \neq \sqrt{3}u(3u^2 + \sqrt{3}u - 2)(4 - 3u^2)^{-1} \\ \text{при } u \in (0, (7 - \sqrt{37})/\sqrt{3}) \cup (2/\sqrt{3}, (7 + \sqrt{37})/\sqrt{3}); \end{matrix}$$

$$CSF_2^{7,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv+w) & u + wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}_{17}, \quad 0 < v < \sqrt[3]{4}, \; v \neq 1, \; w < -(u+v)^2/4 \leq 0,$$

$$w \neq -uv, uv^{-2} - uv, \; 4v^2w^2 - 4v(2v^3 - 3uv^2 - 2)w + (v^3 - 3uv^2 + 2)^2 < 0;$$

$$CF_1^{8,3,=} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{20}, \; [\sigma = -1].$$

Замечание 16. Для $m = 2, 3, 4$ при всех $l = 0, 1, 2, 3$ только структурными остаются следующие четыре формы: $SF_{18}^{3,l}$, $SF_4^{4,l}$, $SF_9^{4,l}$, $SF_{15}^{4,l}$.

Замечание 17. Согласно спискам 17 и 18 имеются одиннадцать структурных форм: $SF_1^{4,\{0,1\}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}_6$, $SF_3^{4,\{0,1\}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}_7$, $SF_8^{4,\{0,2\}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_8$, $SF_{13}^{4,\{0,1\}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_9$, $SF_{14}^{4,\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_9$, $SF_{21}^{4,\{0,3\}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_{10}$, $SF_{28}^{4,\{0,1\}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_{11}$, $SF_{32}^{4,\{0,1\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_{12}$, $SF_{34}^{4,\{0,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}_{12}$, $SF_{36}^{4,\{0,1\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}_{13}$, $SF_7^{5,\{1,2\}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_{11}$, которые при различных наборах значений элементов оказываются каноническими формами, имеющими одинаковую структуру, и, при этом, позволяющие выделять из многочленов P_1 и P_2 общие множители P_0^l с различной максимальной степенью l $(l \in \{0, 1, 2, 3\})$. При этом оказалось, что $SF_{13}^{4,\{0,1\}}$, $SF_{21}^{4,\{0,3\}}$, $SF_{36}^{4,\{0,1\}}$ согласно введенным нормировочным принципам имеют различную нормировку при разных значениях l, а вопрос о том, может ли $SF_7^{5,0}$ всегда быть сведена к предыдущим формам, не попал в рамки поставленных выше задач.

В заключение приведем исправления замеченных в [1], [2] описок и неточностей.

I_1. В [2] формы $NSF_{11,\kappa}^{3,1}$, $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ были ошибочно обозначены как $NSF_{9,\kappa}^{3,1}$, $CF_{9,\kappa}^{3,1}$.

I_2. В $CF_1^{6,2,<}$ из [1, спис. 9] и [2, спис. 12] вместо $|u| \leq 1$ следует писать $|u| < 1$.

I_3. В $CF_{12}^{4,1}$ из [2, спис. 11, 12] вместо $4v(u-1)-1 \geq 0$ следует писать $4v(u-1)-1 > 0$.

I_4. В [2, спис. 11] для $CF_8^{5,1}$ пропущено условие $w \neq v - u$.

II_1. В [1, спис. 3] и [2, спис. 12] $CF_{20}^{4,3}$ при $u = -1$ заменой с $r_1 = 1/2$, $s_1 = -3/2$, $r_2, s_2 = -1/2$ сводится к $CF_{20}^{4,3}$ с $\sigma = 1$ и тем же u.

II_2. В $CF_{22}^{5,2,<,>}$ из [1, спис. 9] и [2, спис. 12], помимо ограничения $u \neq 3/2$, также

$u \neq 6,\ 4\pm\sqrt{13}$, так как при $u=6$ заменой с $s_1=-3s_2$, $r_2=3r_1/4$ она сводится к $SF_7^{5,2,<,>}$, а при $u=4\pm\sqrt{13}$ заменой с $r_1=(-1\mp\sqrt{13})r_2/6$, $s_2=(-1\pm\sqrt{13})s_1/6$ – к $SF_7^{5,2,<,>}$.

II_3. В $CF_3^{6,2,<,=}$ из [1, спис. 9] и [2, спис. 12] можно дополнительно ограничить параметр $v>1/4$ сверху: $CSF_3^{6,2,<,=}$ с $v=v_*>1/2$ заменой с $r_1=1$, $s_1=(2v_*-1)(4v_*-1)^{-1}$, $r_2=0$, $s_2=(4v_*-1)^{-1}$ сводится к $CF_3^{6,2,<,=}$ с $v=v_*(4v_*-1)^{-1}<1/2$ и тем же σ.

II_4. В $NSF_6^{6,2,<}=\sigma\begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3}\\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1\end{pmatrix}_{14}$ из [1, спис. 8], обозначаемой далее $NSF_{6,*}^{6,2,<}$, $v\neq 1$, $D_0=(v^3-4)v^{-1}<0 \Leftrightarrow v\in(0,\sqrt[3]{4})$ и $D=(v^2(u-v)^2+4u)v^{-2}<0$ $\Leftrightarrow v^2u^2-2(v^3-2)u+v^4<0$. Это неравенство не имеет решений при $v>1$, а при $v\in(0,1)$ в $NSF_{6,*}^{6,2,<,<}$ $c_2=v^{-1}-v^2>0$. Фиксация знака c_2 позволяет согласно н.п. 3 нормировать вместо d_2 элемент c_2, получая $NSF_6^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix} uv & u & 0 & u(1+v^2)^2\\ 1 & 0 & 1 & v(1+v^2)\end{pmatrix}_{14}$ с матрицей $H=\sigma\begin{pmatrix} uv & u(v^2+1)\\ 1 & v\end{pmatrix}$, $(\alpha,2\beta,\gamma)=(1,-v,1+v^2)$, $D_0=-3v^2-4$, $D=v^2(u+1)^2+4u<0$.

Естественно, $CSF_{6,*}^{6,2,<,<}$ с $u=u_*$, $v=v_*$ заменой (16) с $r_1=v_*^{1/4}(1-v_*^3)^{-1/4}$, $s_1, r_2=0$, $s_2=r_1^3$ сводится к $NSF_6^{6,2,<,<}$ с тем же σ, $u=u_*v_*^{-1}$, $v=v_*^{3/2}(1-v_*^3)^{-1/2}>0$.
В результате для $CSF_6^{6,2,<,<}$ из списка 19 выбрана правильная нормировка.

II_5. В $CSF_7^{6,2,<}$ из [1, спис. 9] и [2, спис. 12] $u\neq -1$, так как $CSF_7^{6,2,<}$ с $u=-1$ заменой с $r_1=(v-(v^2-3v+9)^{1/2})r_2/3$, $s_1=(v+(v^2-3v+9)^{1/2})s_2/3$ сводится к $SF_{34,+}^{4,2,<}$.

II_6. В $NSF_{13}^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v)\\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2\end{pmatrix}_{16}$ из [1, спис. 8] $D_0=-v(3v+4)<0$ $\Leftrightarrow v\in(-\infty,-4/3)\cup(0,+\infty)$ и $D=(u+v+1)^2-4u<0 \Leftrightarrow u^2-2(1-v)u+(v+1)^2<0$. Это неравенство не имеет решений при $v>0$, а при $v\in(-\infty,-4/3)$ имеем: $((-v)^{1/2}-1)^2<u<((-v)^{1/2}+1)^2$. Поэтому $v<-4/3$, $u\in(((-v)^{1/2}-1)^2,((-v)^{1/2}+1)^2)$.

Заменой (16) с $r_1=(3uv+3v+3v^2\pm((3uv+3v+3v^2)^2-4uv(3v+2)^2)^{1/2})(3v+2)^{-1}r_2/2$, $s_1=(-uv-v^2-v\pm((3uv+3v+3v^2)^2-4uv(3v+2)^2)^{1/2})(2u-v)s_2/2$ $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ при всех допустимых u,v сводится к $SF_{11}^{6,2,<,<}$, не являясь, тем самым, канонической формой.

Список литературы

[1] *Басов В.В., Федорова Е.В.* Классификация двумерных однородных кубических систем ОДУ при наличии общего множителя - I // Дифференц. уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).—2012.— № 2.— С. 218–276.

[2] *Басов В.В., Федорова Е.В.* Классификация двумерных однородных кубических систем ОДУ при наличии общего множителя - II // Дифференц. уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).—2012.— № 3.— С. 139–167.

[3] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 8, с. 1016–1029.

[4] *Басов В.В., Федорова Е.В.* Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).—2010.— № 4.— С. 49–85.